# 3. Fourier 解析ト確率論 (I).

河田龍夫

(昭和十九年七月廿五日 受付)

主トシテ Fourier 解析, 一般調和解析デ確率論ヲ議論シヤウトスルノガ本稿ノ目的デ得ツヽアル結果ヲ発表シ, 是ニ就テノ御指示ヲ仰ギ度ク思フ。

## 1, 特性函数ノ Fejér 積分

特性函数ノ Fejér 積分ニ就テハ既ニ Cramer, Random variables and probability distributions ノ P. 29 ニ議論サレテヰルガ, 其ノ利用ガモツト広ク思ハレルノデ研究シタイ。特ニ平均濃度函数ヤ Lévy ノ maximum concentration, 又ハ Dirichlet 積分 (河田, The characteristic function of a probability distribution, 東亜数学雑誌, 48 巻, 1941) トノ関係, 等大事ナ事ガ多イ様ニ考ヘラレル。コレノコウイツタ意味ノ性質ニ就テハ追テ本誌デ書ク事ニシテ今日ハ簡単ニ本稿デ必要ナ程度ニ止メテオク。

確率変数 X ノ分布函数，特性函数ヲ夫々 $\sigma(x)$, $f(t)$ トスル。以下 $\sigma(x)=\frac{1}{2}\{\sigma(x+0)+\sigma(x-0)\}$ ト normalize シテ置クノガ便利デアル。

<u>定理 1.</u>

$$(1.1)\quad \int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)e^{ixt}d\sigma(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}(t-u)}{\frac{\alpha}{2}(t-u)^2}f(u)du$$

証．
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}(t-u)}{\frac{\alpha}{2}(t-u)^2}f(u)du$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}(t-u)}{\frac{\alpha}{2}(t-u)^2}du\int_{-\infty}^{\infty}e^{ivu}d\sigma(v)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(v)\int_{-\infty}^{\infty}e^{ivu}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}(t-u)}{\frac{\alpha}{2}(t-u)^2}du$$

$$=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{|v|}{\alpha}\right)e^{itv}d\sigma(v)\qquad(\text{証了})$$

$$(1.2)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}u}{\frac{\alpha}{2}u^2}f(u)du=K_X(\alpha)$$ ト書ク

事ニスル。確率変数 X ニ対スルモノダトイフ意味デアル。

## 定理 2.

$$(1\cdot 3)\quad K_X(\alpha) \leqq P_r(|X| \leqq \alpha) \leqq (1+\eta) K_X\left\{\frac{1+\eta}{\eta}(\alpha+\varepsilon)\right\}$$

茲ニ $\varepsilon$, $\eta$ ハ任意ノ正数デアル。

殆ンド明ラカデアル。何トナレバ

$$|x| \leqq \alpha+\varepsilon \text{ デハ } \quad 1-\frac{\eta}{1+\eta}\cdot\frac{|x|}{\alpha+\varepsilon} \geqq 1-\frac{\eta}{1+\eta}$$

故ニ

$$P_r(|X| \leqq \alpha) \leqq \int_{-\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} d\sigma(x) \leqq (1+\eta)\int_{-\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\left(1-\frac{|x|}{\alpha+\varepsilon}\cdot\frac{\eta}{1+\eta}\right)d\sigma(x)$$

$$\leqq (1+\eta)\int_{-G(\alpha+\varepsilon)}^{G(\alpha+\varepsilon)}\left(1-\frac{|x|}{G(\alpha+\varepsilon)}\right)d\sigma(x) = (1+\eta)K\left(\frac{1+\eta}{\eta}(\alpha+\varepsilon)\right),$$

$G=(1+\eta)/\eta$.

又 $$K_X(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(1-\frac{|x|}{\alpha}\right)d\sigma(x) \leqq \int_{-\alpha}^{\alpha} d\sigma(x)$$

$$\leqq P_r(|X| \leqq \alpha). \qquad (証了)$$

コノ定理カラ次ノ定理ガ容易ニ得ラレル。

**定理 3** $\{X_n\}$ ヲ確率変数列トスル。$X_n$ ガ 0 ニ確率収斂スルタメ必要充分ナ條件ハ、任意ノ $\alpha>0$ ニ対シテ $K_{X_n}(\alpha) \to 1$ ナル事デアル。

## 2、大数ノ法則

定理３ヲ用ヒテ大数ノ法則ヲ証明スル。本質的ニハ新シイト云ヘナイガ、Lévy, continuity theorem ヲ経由シナイデソノ代リニ上ノ $K(\alpha)$ ヲ用ヒタマデデアル。Lévy ノ定理ハ K ヲ用ヒテ証明サレルノデアルカラコノ事ハ寧ロ当然デアル。今茲デハ充分條件ニ就テノミ述ベル。

<u>定理 4</u>　$X_1, X_2, \cdots$ ヲ独立ナ確率変数列トシソノ特性函数ヲ夫々, $f_1(t), f_2(t), \cdots$ トスル。モシ

$$(2.1)\quad f_k(t) = 1 + i m_{k,n} t + \varepsilon_{k,n}(t),$$

$$k, n = 1, 2, \cdots$$

ナル如キ常数 $m_{k,n}$ ガ存在シ、アル $\{a_n\}$ ニ対シテ

$$(2.2)\quad \sum_{k=1}^{n} m_{k,n}^2 = o(a_n^2),\quad a_n > 0$$

$$(2.3)\quad \sum_{k=1}^{n} \left|\varepsilon_{k,n}\left(\frac{t}{a_n}\right)\right| \to 0$$

ガ任意ノ $t$ ノ有限区間デ一様ニ成立スルナラバ

$$(2.4)\quad \frac{1}{a_n}\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k - M_n\right\}$$

ガ 0 ニ確率収斂スル如キ常数列 $\{M_n\}$ ガ存在スル。

証明　$M_n = \sum_{K=1}^{n} m_{K,n}$ ト選ブ

$\dfrac{X_K - m_{K,n}}{a_n}$ ノ特性函数ハ $e^{-i\frac{m_K t}{a_n}} f_K\left(\dfrac{t}{a_n}\right)$

サテ

$$e^{-im_{K,n}\frac{t}{a_n}} f_K\left(\frac{t}{a_n}\right)$$

$$= \left(1 - im_{K,n}\frac{t}{a_n} + O\left(\frac{m_{K,n}^2 t^2}{a_n^2}\right)\right)\left(1 + im_{K,n}\frac{t}{a_n} + \varepsilon_{K,n}\left(\frac{t}{a_n}\right)\right)$$

$\left(\dfrac{m_{K,n}}{a_n} \to 0 \quad (K = 1, 2 \cdots n)\right.$ ガ (2.2) ヨリ得ラレルカラ)

$$= 1 + O\left(\varepsilon_{K,n}\left(\frac{t}{a_n}\right)\right) + O\left(\frac{m_{K,n}^2}{a_n^2} t^2\right)$$

故ニ $Z_n = \sum_{K=1}^{n} \dfrac{X_K - m_{K,n}}{a_n}$ ノ特性函数ヲ $\varphi_n(t)$ トスルト

$$\varphi_n(t) = \prod_{K=1}^{n} \left(1 + O\left(\varepsilon_{K,n}\left(\frac{t}{a_n}\right)\right) + O\left(\frac{m_{K,n}^2}{a_n^2} t^2\right)\right).$$

$$1 - K_{Z_n}(2\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha u}{\alpha u^2}(1 - \varphi_n(u))\,du$$

$$|1 - \varphi_n(u)| = \left|1 - \prod_{K=1}^{n}\left(1 + \varepsilon_K\left(\frac{u}{a_n}\right) + O\left(\frac{m_K^2}{a_n^2}u^2\right)\right)\right|$$

$$= O\left(\sum_{K=1}^{n}\left|\varepsilon_{K,n}\left(\frac{u}{a_n}\right)\right| + \sum_{K=1}^{n}\frac{m_K^2}{a_n^2}u^2\right)$$

$$1-K_{Z_n}(2\alpha) \leqq 0\left( \int_{|u|\leqq A} \frac{\sin^2\alpha u}{\alpha u^2} \sum_{K=1}^{n} \left|\varepsilon_{K,n}\left(\frac{u}{a_n}\right)\right| du \right.$$

$$+ \int_{|u|\leqq A} \frac{\sin^2\alpha u}{\alpha u^2} \sum_{K=1}^{n} \frac{m_{K,n}^2}{a_n^2} u^2 du$$

$$\left. + \int_{|u|>A} \frac{\sin^2\alpha u}{\alpha u^2} du \right)$$

0 ノ中ヲ $I_1+I_2+I_3$ トオケバ (2,3) ヨリ

$n > n_0$ デ

$$|I_1| \leqq \varepsilon \int_{|u|\leqq A} \frac{\sin^2\alpha u}{\alpha u^2} du < \varepsilon$$ （$\varepsilon$ ハ任意ノ正数）

$$|I_2| \leqq \frac{1}{a^n} \sum_{K=1}^{n} m_{K,n}^2 \cdot A^2$$

$$|I_3| \leqq \frac{1}{\alpha A}.$$

故ニ $\frac{1}{\alpha A} < \varepsilon$ ナル如ク $A$ ヲトリソシテソレニ対シテ

$n \geqq N_0 > n_0$ デ

$\frac{1}{a_n} \sum_{K=1}^{n} m_{K,n}^2 < \varepsilon$ ナル如ク $N_0$ ヲトレバ

$$|1-K_{Z_n}(2\alpha)| < 3\varepsilon.$$

$\alpha$ハ任意ノ正数デアルカラ是デ証明サレタ.

<u>定理 5.</u> $X_1, X_2, \cdots\cdots$ ヲ独立ナ変数ノ数列トシ,

$\sigma_K(x)$ ヲ $X_K$ ノ分布函数トスルトキ.

モシ.

$$(2.5)\quad \sum_{K=1}^{n}\int_{|x|\geqq a_n} d\sigma_K(x)\to 0$$

$$(2.6)\quad \frac{1}{a_n^2}\sum_{K=1}^{n}\int_{|x|\leqq a_n} x^2 d\sigma_K(x)\to 0$$

ナラバ (2.4) ガ 0 ニ確率収斂スル如キ常数列 $\{M_n\}$ ガ存在スル。 (W. Feller)

証 $m_{K,n}=\int_{|x|<a_n} x\, d\sigma_K(x)$ トシテ (2.2), (2.3)

ノ満足サレルコトヲ云ヘバヨイ。

(2.2) ハ

$$\sum_{K=1}^{n} m_{K,n}^2=\sum_{K=1}^{n}\left(\int_{|x|\leqq a_n} x\, d\sigma_K(x)\right)^2\leqq\sum_{K=1}^{n}\int_{|x|\leqq a_n} x^2 d\sigma_K(x)$$

$$= o(a_n^2)\quad ,\ ((2.6)\text{ ヨリ})$$

(2.3) ニ就テハ次ノ通リ,

$$f_K(u)=\int e^{ixu}\, d\sigma_K(x)$$

$$=\int_{|x|>a_n} e^{ixu} d\sigma_K(x) + \int_{|x|\leqq a_n} (1+iux+O(u^2x^2))\, d\sigma_K(x).$$

$$= 1 + ium_{K,n} + \varepsilon_{K,n}(u)$$

トオクト:

$$\varepsilon_{K,n}(u) = \int_{|x|>a_n} e^{ixu} d\sigma_K(x) - \int_{|x|>a_n} d\sigma_K(x)$$

$$+ O\left(u^2 \int_{|x|\leqq a_n} x^2 d\sigma_K(x)\right)$$

$$= O\left(\int_{|x|\geqq a_n} d\sigma_K(x)\right) + O\left(u^2 \int_{|x|\leqq a_n} x^2 d\sigma_K(x)\right)$$

故ニ (2,5), (2,6) ヨリ $|u| \leqq A$ (A; 任意) デ一様ニ

$\sum_{K=1}^{n} \left| \varepsilon_{K,n}\left(\frac{u}{a_n}\right) \right| \to 0$ ガ得ラレル。 証了リ。

(続ク)