20. 統計量の獨立性に就て

（昭和十八年七月十九日、数物年会講演）

所員　坂元平八

I. 独立性の判定條件

標本論に於て種々の分布函数の型をきめるのに（例へば、t分布、z分布等）(註1) 統計量商の独立性を明確にする必要が屡々ある。例へば最も簡単な例としてt分布の如き場合に於ても

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2}{n-1}$$

とするとき、mとSとが独立なることを利用すれば m/S の分布法則は容易に決定される。以下本論説に於ては、一変量母集団のn個の標本値、或ひはもっと一般的に正規相関k一変量母集団よりのk個の標本（各々k組の標本値が $n_1, n_2, \cdots n_k$ 個ある）のk（$n_1 + n_2 + \cdots\cdots n_k$）個の一次形式及び二次形式統計量商の独立性の判定條件を研究しようと思ふ。

(註1) J. F. Kenny, mathemstics of statistcis part Two 1939. P.P. 128−163

従来A. T. Craig, A. C. aitken, 及びG. C.

Cochran 等（註2、註3、註4、註5）に依る非常に味ある研究はあるが、Craig の研究は判定を容易にするために條件に若干の制限を設けてゐて應用範囲が狹い上に左程適用容易であるとは思はれない。亦 Aitken の條件は非常に一般的ではあるが、實際に應用するのに多大の困難がある。偖て本論説に於ては係數ベクトル及び係數行列で独立性を判定し得る比較的に一般的で且つ應用の容易と思はれる條件を導き出さうと思ふ。

（註2） A. T. Craig, On the independence of certain estimate of variance The annals of math. statistcis 1938 P.P. 48−56

A. T. Craig の條件は本論説より容易に導かれる。これについては電気試験所彙報に報告する予定である。

（註3） A. C. Aitken On the independence of linear and quadratic form in samples of normally distributed variate. Proceedings of the Royal Society of Edingburgh 1939−1940 vol LX P. P. 40−46

（註4） G. C. Cochran, The distribution

of Covariance, Proc. Camb. Phil. soc, vol. 30 (1939) P.P. 178–191

（註5） S. S. Wilks, Lectures on the Theory of Statistical Inference. 1936–1937. P.P. 44–47

今一変量xの分布法則が$\phi(x)\,dx=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}dx$であらはされてゐるとする。こゝに$\mu$は平均値で$\sigma$は標準偏差であるとする。但しこゝで一般性を失ふことなく$\mu=0$としてもよい。

亦正規相関n一変量$x_i\ (i=1,2,\cdots n)$の同時分布法則は行列の記号を用ひて

$$\phi(x)\,dx=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}\,|V|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(V^{-1}x,\ x)}dx$$

であらはされる。こゝにxはベクトルをあらはし、$x=(x_1,\ x_2,\cdots\cdots x_n)$であるとし、$dx$は

$dx_1,\ dx_2\cdots\cdots dx_n$をあらはすものとする。

亦Vはn個の変量の分散行列（Variance matrix）をあらはし、$|V|$はその行列式を、亦$(V^{-1}x,\ x)$はxの正値二次形式をあらはすものとする。（註6）

（註6） 上記 aitken の論文、或ひは上記 Wilks の著書 P.P. 10–13

247

以上本稿に於ては n 個の同時に観測された値を一つの観測値とする様なベクトル（x_i , y_i , ----）からなる各々の大きさ n_1 , n_2 , ------ , n_k なる k 個の標本 k（$n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_k$）個の elements を一つのベクトルの行に書く、但しこゝで $n = n_1 + n_2 + \cdots\cdots + n_k$ であるとする。例で

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots\cdots + a_n x_n + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots\cdots b_n y_n + \cdots\cdots$ なるとき一次形式にベクトルの内積（α, x）なる如く書く、こゝに $\alpha = (a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, b_1, b_2 \cdots\cdots b_n \cdots\cdots)$ なるものとする。

亦斯かる nk 個の標本値の二次形式は行列論の記号を用ひて（Bx , x）なる形に書くものとする、こゝに $B = \{b_{ij}\}$ は対称形式であるとする。(註7)

此処に於て如何なる條件の下に於て（α , x），（b , x），（Ax , x），（Bx , x）等が互に独立であるかを定理として述べ以てその判定條件の実際上の応用に就て言及したいと思ふ。

（註7） Schreier-Sperner. Vorlesungen über die Theorie der matrizen. 1932. Schreier-Sperner. Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, Erster Band 1931. Zweiter Band 1935

(定理Ⅰ)　ベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ が $f(x)dx=(2\pi)^{-\frac{1}{2}n}|V|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(V^{-1}x,x)}dx$ なる分布法則に従ふものとする。然るとき x より作れる四つの統計量 $\theta_1=(Ax,x)$, $\theta_2=(Bx,x)$, $\theta_3=(a,x)$, $\theta_4=(b,x)$ に於て θ_1 と θ_2, θ_1 と θ_3 或ひは θ_3 と θ_4 が互に独立なるための必要充分條件は夫々 $AVB=0$, $AVB=0$, 或ひは $(Va, b)=0$ なることである。但しこゝに A, B は同次数の對称行列とする。

亦尓後の応用の必要上次の二つの定理を述べる。

(定理Ⅱ)　定理Ⅰに於ける θ_1 が自由度 m の χ^2—分布をなすための必要充分條件は $AVA=A$ で且行列 A の階数が m なることである。(註8)

(定理Ⅲ)　χ_1^2, χ_2^2, $\cdots\cdots \chi_k^2$ が互に独立で且夫々自由度 n_1, n_2, $\cdots\cdots n_k$ の χ^2 分布をなすものとすれば $\chi^2=\sum_{j=1}^{k}\chi_j^2$ は自由度 $n=\sum_{j=1}^{k}n_j$ の χ^2 分布をなす

仍(定理Ⅰ)の證明のために次の二つの補助

(註8) A.T. Craig, a Certain mean-value Problem in Statistics. Bulletin of the American mathematical Society XLII 1936, P.P. 670-674

定理を挙げる(註2, 註3)

〔補助定理Ⅰ〕 任意の二つの統計量 θ_1, θ_2 が互に独立なるための必要充分なる條件はすべての実数 t_1, t_2 に対して $\varphi(t_1, t_2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2)$ なることである。但しこゝに

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{W(x)} f(x) e^{it_1\theta_1 + it_2\theta_2} dx$$

$$\varphi_1(t_1) = \int_{W(x)} f(x) e^{it_1\theta_1} dx$$

$$\varphi_2(t_2) = \int_{W(x)} f(x) e^{it_2\theta_2} dx$$

にして且つ $W(x) = (-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty, \cdots\cdots -\infty < x_n < \infty)$ なる領域をあらはすものとする(註9)

〔補助定理Ⅱ〕 二つの同次数のエルミット・行列 A, B がすべての t_1, t_2 に対して

$|(E - t_1A)| \, |(E - t_2B)| = |(E - t_1A - t_2B)|$ (1) なる

関係を満足するための必要充分條件は $AB = 0$ なることである。註. 以下の必要なることの證明は筆者の意に満たない。識者の御高教を願へれば幸ひである。

(證明) 先ず充分なることを證明する。

$$|(E - t_1A)| \cdot |(E - t_2B)| = |(E - t_1A) \cdot (E - t_2B)| =$$

$$|(E - t_1A - t_2B + t_1t_2AB)|$$ こゝで $AB = 0$

(註9) 證明は前記 Wilks の著書 P.P. 33-38 を参照されたし

であるから $=|(E-t_1A-t_2B)|$ 依て充分なることが證明された。

次に必要なることを證明する。t_1, t_2 の如何に関せず(1)なる関係式が成立つから亦

$$|(E-\frac{t_1}{x}A)|\cdot|(E-\frac{t_2}{x}B)|=|(E-\frac{t_1}{x}A-\frac{t_2}{x}B)| \quad (2)$$

なる関係も成り立つこと明かである。両辺に x^{2n} を　ずれば (2) 式は

$$|(xE-t_1A)|\cdot|(xE-t_2B)|=x^n|(xE-t_1A-t_2B)| \quad (3)$$

なる形に書ける。今 A, B 及び t_1A+t_2B の特有根を夫々 $\alpha_i\ (i=1,2,\dots\dots n)$, $\beta_i\ (i=1,2,\dots\dots n)$ 及び $\gamma_i\ (i=1,2,\dots n)$ とすれば (3) より明かに

$$\prod_{i=1}^{n}(x-t_1\alpha_i)\prod_{i=1}^{n}(x-t_2\beta_i)=x^n\prod_{i=1}^{n}(x-\gamma_i) \quad (4)$$

なる関係式が成り立つべきである、依て(4)なる関係より $\overbrace{0,0\dots\dots0}^{n}$, $\gamma_1,\gamma_2,\dots\gamma_n$ は $t_1\alpha_1$, $t_1\alpha_2\dots\dots t_1\alpha_n$, $t_2\beta_1$, $t_2\beta_2\dots\dots t_2\beta_n$ の何れかと一致すべきことが云はれる。而して A, B はエルミット行列、従って t_1A+t_2B もエルミット行列であるから、上述の特有根の間の関係から適当なるウニテール行列

$S(t_1,t_2)$ を選んで

$$S^{-1}(t_1, t_2)(t_1A+t_2B)S(t_1, t_2)$$

$$=t_1\begin{pmatrix} \alpha_1' & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_m' & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \beta_1' & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \beta_p' \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$m, p \leqq n, \quad n-m-p \geqq 0$$

ならしめ得る。こゝに $\alpha_1', \alpha_2' \cdots\cdots \alpha_m'$ は $\alpha_1, \alpha_2 \cdots\cdots \alpha_n$ の中の 0 ならざるものを示し、$\beta_1', \beta_2', \cdots\cdots \beta_p'$ は $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots \beta_n$ 中の 0 ならざるものを示すものとする。

(5) の両辺を t_1 に就いて微分して

$$\frac{dS^{-1}(t_1, t_2)}{dt_1}(t_1A+t_2B)S(t_1,t_2)+S^{-1}(t_1, t_2)AS(t_1,t_2)$$
$$+S^{-1}(t_1, t_2)(t_1A+t_2B)\frac{dS(t_1,t_2)}{dt_1}$$

$$=\left(\begin{array}{cc|c|c} \alpha_1' & 0 & & \\ & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_m' & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

こゝで $t_1 = ah$ と置いて $h \to 0$ ならしめれば ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

$$S^{-1}AS=\left(\begin{array}{cc|c|c} \alpha_1' & 0 & & \\ & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_m' & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad (6)$$

(8)

なる関係を得る。こゝに $\lim_{h\to 0} S(ah, bh) = S$, $\lim_{h\to 0} S^{-1}(ah, bh) = S^{-1}$ と置く。

(こゝで $\dfrac{dS(t_1, t_2)}{dt_1}$ 或は $\dfrac{dS^{-1}(t_1, t_2)}{dt_1}$ に於て $t_1 = ah$, $t_2 = bh$ と置いて $h\to 0$ ならしめた場合、この各々の行列の元素は有界であることは $S(t_1, t_2)$ の性質から明かである。従って (6) なる関係式の出て来ることは当然である)

亦 (5) の両辺を t_2 に就いて微分して $t_1 = ah$, $t_2 = bh$ と置き $h\to 0$ ならしめれば前と魔稍にして

$$S^{-1}BS = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \beta_1' & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \beta_p' & \\ \hline 0 & & 0 & & 0 \end{array}\right) \qquad (7)$$

なる関係を得る.

依て (6) と (7) より ($S^{-1}S = E$ なることは明かだから) $S^{-1}AS\cdot S^{-1}BS = 0$

$$\therefore\ S^{-1}ABS = 0$$

従って $AB = 0$ なることが證明された。

[定理Iの證明] 先づ θ_1 と θ_2 が互に独立なるための判定條件を述べ、然る後、此の條件に依て他の場合を證明する。

25.5

扨初めに θ_1, θ_2 の同時分布の特性函数を計算すれば

$$\varphi(t_1, t_2) = \int_{W(x)} f(x) e^{it_1\theta_1 + it_2\theta_2} dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} |V|^{-\frac{1}{2}} \int_{W(x)} e^{-\frac{1}{2}(Vx, x)} e^{it_1(Ax, x) + it_2(Bx, x)} dx$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} |V|^{-\frac{1}{2}} \int_{W(x)} e^{-\frac{1}{2}(Vx, x) + it_1(Ax, x) + it_2(Bx, x)} dx$$

こゝに於て $(V^{-1}x, x)$ は正値二次形式であるから適当に直行行列 T を選ぶことに依つて、$T'V^{-1}T = D$ なる対角行列に変換できる。然もその対角元素はすべて正値である。亦この変換に依る Jacobian は 1 であるから

$$\varphi(t_1, t_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} |V|^{-\frac{1}{2}} \int e^{-\frac{1}{2}(Dx, x) + it_1(\hat{A}x, x) + it_2(\hat{B}x, x)} dx$$

なる形に書ける。但しこゝに $\hat{A} = T'AT$, $\hat{B} = T'BT$ とする。更に $Q^2 = D^{-1}$ なる如き一つの対角行列 Q を取ると Q 変換に依て (Q の元素は当然実数である。) $|Q| > 0$

$$\varphi(t_1, t_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} |V|^{-\frac{1}{2}} \int_{W(x)} e^{-\frac{1}{2}(x, x) + it_1(\overset{*}{A}x, x) + it_2(\overset{*}{B}x, x)} |Q| dx$$

となり得る。但しこゝに $\overset{*}{A} = Q'\hat{A}Q$, $\overset{*}{B} = Q'\hat{B}Q$ なるものとする。而して $Q^2 = D^{-1} = (T'V^{-1}T)^{-1} = T^{-1}V(T')^{-1} = T'VT$ より $|Q^2| = |T'VT|$ 従つて $|Q| = |V|^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$\varphi(t_1, t_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_{w(u)} e^{-\frac{1}{2}(u, u) + it_1(A^* u, u) + it_2(B^* u, u)} du$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_{w(u)} e^{-\frac{1}{2}(u, u) + i((t_1 A^* + t_2 B^*) u, u)} du$$

である。而して A^*, B^* は亦明らかに対称行列であるから(註10)

$$\varphi(t_1, t_2) = |E - 2it_1 A^* - 2it_2 B^*|^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

なることは容易に計算できる。

同様にして θ_1, θ_2 の特性函数は

$$\varphi_1(t_1) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_{w(u)} e^{-\frac{1}{2}(u, u) + it_1(A^* u, u)} du$$

$$= |E - 2it_1 A^*|^{-\frac{1}{2}} \quad (9)$$

$$\varphi_2(t_2) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}n} \int_{w(u)} e^{-\frac{1}{2}(u, u) + it_2(B^* u, u)} du$$

$$= |E - 2it_2 B^*|^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

なることが計算される。従って〔補助定理Ⅰ〕と(8), (9), (10) より θ_1, と θ_2 が相互に独立なるための必要充分條件は

$$|E - 2it_1 A^* - 2it_2 B^*| = |E - 2it_1 A^*| \cdot |E - 2it_2 B^*| \quad (11)$$

なることが證明された。

この (11) なる関係と〔補助定理Ⅱ〕よりして (11) なる関係は $A^* B^* = 0$ と同等である。

$$A^* = Q' \hat{A} Q = Q' T' A T Q, \quad B^* = Q' \hat{B} Q = Q' T' B T Q$$

であるから

(11)。

$$A^*B^* = Q'A'ATQ\,Q'T'BTQ = Q'T'ATQ^2T'BTQ$$

$$= (Q'A')ATQ^{-1}T'B(TQ)$$

こゝで $T'V^{-1}T = D$ より $D^{-1} = (T'V^{-1}T)^{-1} = T^{-1}VT'^{-1}$

を得るから

$$A^*B^* = (Q'T')ATT^{-1}VT'^{-1}T'B(TQ) = (Q'T')AVB(TQ)$$

而して $A^*B^* = 0$ であるから $AVB = 0$ となる（$|TQ| \neq 0$ なるため） 依て θ_1 と θ_2 とが相互に独立なる,ための必要充分條件は $AVB = 0$ なることが證明できた。

仮 $\theta_1 = (Ax, x)$ と $\theta_3 \doteq (\alpha x, x)$ が相互に独立なることをいふには θ_1, θ_3^2 が独立なることをいへばよい。仮 θ_3^2 は二次形式であるから $\theta_3^2 = (Bx, x)$ と置いてよい。こゝに（註11）

（註10） （註2）の A. T. Craig の論文或ひは（註5）の S. S. Wilks の著書参照

（註11） 此等の記号は前記 Schreier–Sperner の著書に従つた。

$$B=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots\cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & & a_2a_n \\ & & \cdot & \\ a_na_1 & a_na_2 \cdots & & a_n^2 \end{pmatrix}=(a_1\alpha',\ a_2\alpha' \cdots\ a_n\alpha')$$

である　但し $|\alpha|=|a_1^2+a_2^2+\cdots\cdots+a_n^2|^{\frac{1}{2}}\neq 0$ とする

亦 $\alpha'=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とする。

θ_1 と θ_3 が相互に独立なるための條件は上述の證明に依つて $A\,V B=0$ であるから

$$A\,V(a_1\alpha',\ a_2\alpha' \cdots\cdots a_n\alpha')=0 \quad \text{である。}$$

$$A\,V=\begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{I}_n \end{pmatrix} \quad \text{であらはすと} \quad \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \\ \mathcal{I}_n \end{pmatrix}(a_1\alpha',\ a_2\alpha' \cdots a_n\alpha')=0$$

なる関係が成立つ。

従つて $(\mathcal{I}_i,\ a_K\alpha)=0 \quad (i=1,2\cdots\cdots n \quad K=1,2\cdots n)$

$$\therefore\ a_K(\mathcal{I}_i\,\alpha)=0 \quad (K=1,2,\cdots\cdots n)$$

$|\alpha|\neq 0$ なるを以て α 組成分子 $a_1\,a_2\cdots\cdots a_n$ の中で 0 で無いものがある。それを a_m とすれば $a_m(\mathcal{I}_i\,\alpha)=0$ なるに $(\mathcal{I}_i\,\alpha)=0 \ (i=1,2\cdots n)$ なることが云はれる。従つて $A\,V\alpha=0$ なることが出て来た。逆に $A\,V\alpha=0$ ならば $A\,V B=0$ なることは容易に云へる。故に θ_1 と θ_3 が独立なるための必要充分條件は $A\,V\alpha=0$ なることが證明できた。

然ると同様にして θ_3 と θ_4 が独立となるための必要充分條件が $(\nabla\alpha\ \nabla\beta)=0$ なることが云はれる。

以上で定理Ⅰの證明は完結した。この定理は $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ の数が一般に n 個の場合に於ても成立つことは当然である。

（定理Ⅱの證明）　$\theta = A(x;x)$ が自由度 m の χ^2-分布をなすための必要充分條件は θ の特性函数が $\varphi = \frac{1}{(1-2it)^{m/2}}$ $(m \leqq n)$ なる形に書けることである。然るに (9) と同様にして $\varphi(t) = |E-2itA^*|^{-\frac{1}{2}}$ なる関係式が成立する。A^* の特有根を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ とすれば

$$\varphi(t) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(1-2i\alpha_k t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-2it)^{\frac{m}{2}}}$$

となってこの関係式は t の如何にかゝはらず成立しなければならぬ。従って $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\cdots\cdots=\alpha_m=1$, $\alpha_{m+1}=\alpha_{m+2}=\cdots\cdots=\alpha_n=0$ なる如く書かれなければならぬ。而して A^* は対称行列であるから適当に直交行列 S を選ぶことに依て

$$S'A^*S = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \cdots \ 1}^{m} & & 0 \\ & \overbrace{0 \ \cdots \ 0}^{n-m} & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

なる形に書くことができる。

2.58

$$S'A^*SS'A^*S = S'A^*EA^*S = S'A^{*2}S = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

従って　$S'A^*S = S'A^{*2}S$　より $A^* = A^{*2}$ を得る。而してこゝで $A^{*2} = (Q'T')A(TQ)(Q'T')A(TQ)$ $= (Q'T')AVA(TQ) = A^* = (Q'T')A(TQ)$　であるから $AVA = A$ なる関係を得る。且行列の階数は m であることは上の事実に依り明かである。

逆に $AVA = A$ で階数 $A = m$ ならば $A^{*2} = A^*$ なることは直ちに判る。A^* は対称であるから適当に直交行列を取って

$$S'A^*S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_m & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha_K \neq 0,\ K = 1, 2, \cdots m)$$

ならしめ得るから　$S'A^{*2}S = (S'A^*S)^2 = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_m^2 & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$

であることが導かれる。これより $\alpha_K = \alpha_K^2$ $(K = 1, 2, \cdots\cdots m)$　従って　$\alpha_K(1 - \alpha_K) = 0$ で $\alpha_K \neq 0$　$(K = 1, 2, \cdots\cdots m)$ なることより　$\alpha_K = 1$ $(K = 1, 2, \cdots\cdots m)$　を得るから

$$\varphi(t) = \frac{1}{\prod_{K=1}^{m}(1 - 2i\alpha_K t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1 - 2it)^{m/2}}$$

である。従って θ は自由度 m の χ^2 分布をなすことが云はれる。

【定理Ⅲの證明】 $\chi_1^2, \chi_2^2 \cdots\cdots \chi_k^2$ が相互に独立で且 χ_j^2 $(j=1, 2, \cdots\cdots k)$ の特性函数が $\dfrac{1}{(1-2it)^{n_j/2}}$ なることに注目すれば定理の事実は極めて明らかである。

Ⅱ. 応用

次に本論説の定理の実際の場合に於ける応用に就て述べる。

(a) 正規分布法則 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ に従ふ一変量 x の n 個の独立な標本値 $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$ より作った平均値及び variance の評価値を

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_1)^2}{n-1} \tag{1}$$

$$\alpha = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \cdots\cdots \frac{1}{n}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n}, & 1-\frac{1}{n} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

とするとき

$m_1 = (\alpha, x)$ $\quad S^2 = \dfrac{1}{n-1}(Ax, x)$ であらはされる

而してこゝで $V = \sigma^2 E$ であるから $AV\alpha = A(\sigma^2 E)\alpha$

$= \sigma^2 A \alpha$

$$= \sigma^2 \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n}, & 1-\frac{1}{n} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n}, & -\frac{1}{n} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots \frac{1}{n}\right) = 0$$

依て〔定理Ⅰ〕に依て S_1^2 と m_1 が独立なることが證明された。

亦 $\left(\frac{1}{\sigma^2}A\right)V\left(\frac{1}{\sigma^2}A\right)=\left(\frac{1}{\sigma^2}A\right)(\sigma^2E)\left(\frac{1}{\sigma^2}A\right)=\frac{1}{\sigma^2}A^2=\left(\frac{1}{\sigma^2}A\right)$ なることも(2)なる関係から明かである：然も A の階数は $n-1$ であるから $\frac{1}{\sigma^2}(Ax, x)$ は自由度 $n-1$ の χ^2 分布をなす。従って $t=\frac{\sqrt{n}\ m_1}{S}$ は Student 分布（自由度 $n-1$ の）をなすことが決定できる。

B)（註に）次に二の標本の平均値の差を検定する場合に起る独立性の問題に就て述べる。今一つは n_1 個の独立な標本値 $x_i\ (i=1, 2, \cdots\cdots n_1)$ を取り他の一つは n_2 個の独立な標本値 $y_j\ (j=1, 2, \cdots\cdots n_2)$ を取る二つの標本があたへられたとする。x_i と y_j とが同じ正規分布法則に従ふや否やを決定するために、吾々は次の方法を用ゐる。即ち今この二つの標本の平均値を m, m' とするとき $|m-m'|$ を母集団の variance $\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}\sigma^2\left(=\frac{1}{n_1}\sigma^2+\frac{1}{n_2}\sigma^2\right)$ の評価値と比較すること、即ち適当な t 分布を求めることに依て検定する。この n_1+n_2 個の標本値 $x_i\ (i=1, 2\cdots\cdots n_1)$ $y_j\ (j=1, 2\cdots\cdots n_2)$ を次の如きベクトルの形に書く。

$$x=(x_1, x_2\cdots\cdots x_{n_1}, y_1, y_2\cdots\cdots y_{n_2}) \quad (1)$$

然るとき $m-m'$ は (α, x) なる如き一次形式

241

に書ける、但してゝで、

$$\alpha = \left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}, \cdots\cdots \frac{1}{n_1}, -\frac{1}{n_2}, -\frac{1}{n_2}, \cdots\cdots \frac{1}{n_2}\right) \quad (2)$$ とする

$m-m'$ に対する Variame の不偏評価値は

$$S^2 = \{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2\}/(n_1+n_2-2) = \left\{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-m)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(y_i-m')^2\right\}/n_1+n_2-2 \quad (3)$$

で計算される(註13)

従って $S^2 = \frac{(Ax, x)}{n_1+n_2-2}$ である。但してゝに

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1-\frac{1}{n_1}, & -\frac{1}{n_1} & \cdots\cdots & \frac{1}{n_1} & & & & \\
-\frac{1}{n_1}, & 1-\frac{1}{n_1} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n_1} & & 0 & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
-\frac{1}{n_1}, & -\frac{1}{n_1} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{n_1} & & & & \\
\hline
 & & & & 1-\frac{1}{n_2} & -\frac{1}{n_2} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n_2} \\
 & 0 & & & -\frac{1}{n_2} & 1-\frac{1}{n_2} & \cdots\cdots & -\frac{1}{n_2} \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & & & & -\frac{1}{n_2} & -\frac{1}{n_2} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{n_2}
\end{array}\right) \quad (4)$$

(a)の場合と全く同様に

$$AV\alpha = A(\sigma^2 E)\alpha = \sigma^2 A\alpha = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
1-\frac{1}{n_1}, & \frac{1}{n_1} & \cdots\cdots & \frac{1}{n_1} & & & & \\
-\frac{1}{n_1}, & 1-\frac{1}{n_1} & \cdots\cdots & \frac{1}{n_1} & & & & \\
\cdots & \cdots & & & & & & \\
-\frac{1}{n_1}, & -\frac{1}{n_1} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{n_1} & & & & \\
\hline
 & & & & 1-\frac{1}{n_2} & -\frac{1}{n_2} & \cdots & -\frac{1}{n_2} \\
 & & & & -\frac{1}{n_2} & 1-\frac{1}{n_2} & \cdots & \frac{1}{n_2} \\
 & & & & -\frac{1}{n_2} & -\frac{1}{n_2} & \cdots & 1-\frac{1}{n_2}
\end{array}\right)$$

$$\times \left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}, \cdots \frac{1}{n_1}, -\frac{1}{n_2} \cdots\cdots -\frac{1}{n_2}\right) = 0$$

(註13) 前記 Kenny の著書 P.125 参照

従って $m-m'$ と S^2 は独立である。亦 $(\frac{1}{\sigma^2}A)V(\frac{1}{\sigma^2}A)$
$=(\frac{1}{\sigma^2}A)(\sigma^2E)(\frac{1}{\sigma^2}A)=(\frac{1}{\sigma^2}A^2)=(\frac{1}{\sigma^2}A)$ なることも(4)から容易に判り且 A の階数が n_1+n_2-2 であるから $\frac{1}{\sigma^2}(Au,u)$ は自由度 n_1+n_2-2 の χ^2 分布をなす。従って $t=\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\frac{m-m'}{S}$ は自由度 n_1+n_2-2 の Student 分布をなすことが決定できる。

此処に於て S^2 は m と m' の如何なる一次結合 $pm+qm'$ とも相互に独立なることが云へる。

c)(註12) 仮 $m-m'$ に対する variance の不偏評価値として(8)の場合の如きものを用ゐず (n_1+n_2) 個の標本値の平均値 $\hat{m}$ を含むもの、即ち

$$\hat{S}^2=\left\{\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\hat{m})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\hat{m}^2\right\}\Big/n_1+n_2-1 \qquad (1)$$

を用ひれば如何になるであらうか。

此の場合 $m-m'$ と $\hat{S}^2$ とは独立ではない。

即ち此の際 $\alpha=(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_1},\cdots\frac{1}{n_1},-\frac{1}{n_2},-\frac{1}{n_2},\cdots-\frac{1}{n_2})$ (2)

$$A=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n_1+n_2} & -\frac{1}{n_1+n_2} & \cdots & -\frac{1}{n_1+n_2} \\ -\frac{1}{n_1+n_2} & 1-\frac{1}{n_1+n_2} & \cdots & -\frac{1}{n_1+n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{1}{n_1+n_2} & -\frac{1}{n_1+n_2} & \cdots & 1-\frac{1}{n_1+n_2} \end{pmatrix} \qquad (3)$$

と置けば $AV\alpha=A(\sigma^2E)\alpha=\sigma^2A\alpha=\sigma^2(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_1},\cdots\frac{1}{n_1},-\frac{1}{n_2},-\frac{1}{n_2}\cdots-\frac{1}{n_2})\neq0$

263

であるから $m-m'=(\alpha, w)$ と $\hat{s}^2=\frac{(Aw,\ w)}{n_1+n_2-1}$
とは独立でない。(註) 此際 aitken は二つの標本が同じ大いさであれば $m-m'$ と $\hat{s}$ は独立になる。と結論してゐるがこれは aitken の計算問題である。
(註記 aitken の論文参照のこと)

D) 次に統計的仮説の検定に関する Neyman-Pearson の理論中第一原理の不充分なることの證明に出てくる例を本論説の定理で説明しよう。(註14) それは $\bar{x}'=(x_1-x_2)/\sqrt{n}$　$S'^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}'^2$
$=\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2+\sum_{i=3}^{n}x_i^2\right\}$ とするとき $\mathfrak{s}=\frac{\bar{x}'}{S'}$
も亦 Student 分布をなすことをその一部分として證明してゐる。それを〔定理I〕及び〔定理II〕に依て證明する $\bar{x}'$ の係数ベクトルは

$\alpha=\left(\frac{1}{\sqrt{2n}},\ -\frac{1}{\sqrt{2n}},\ 0\cdots\cdots0\right)$ で S'^2 の係数行列は

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & 0 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

であらはされるから

$$A\alpha=0$$

$$\frac{1}{\sigma^2}(nA)V\frac{1}{\sigma^2}(nA)=\frac{1}{\sigma^2}(nA)(\sigma^2E)\frac{1}{\sigma^2}(nA)$$
$=\frac{1}{\sigma^2}(nA)^2=\frac{1}{\sigma^2}(nA)$ なることより $\mathfrak{s}$ が自由度 $n-1$ の Student 分布をなすことが容易に證明される

e)[註15] 次に変量分析法の際に起る独立性の判定に就き述べる。今 $N=ab$ 個の同時に観測された値 x_{11} x_{12} ----- x_{1b}, x_{21}, x_{22} ----- x_{2b}, --- x_{a1} x_{a2} ----- x_{ab} が

$$(2\pi)^{-\frac{1}{2}N}|V|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}(V^{-1}x,\,x)}\,dx \qquad (1)$$

なる如き分布法則に従ふものとする。但しこゝで

$$x=(x_{11},x_{12}\cdots\cdots x_{1b},x_{21},x_{22}\cdots\cdots x_{2b}\cdots\cdots x_{a1},x_{a2}\cdots\cdots x_{ab}) \qquad (2)$$

$$V=\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots\cdots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots\cdots & \rho\sigma^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \cdots\cdots & \sigma^2 \end{pmatrix}}_{N} \qquad (3)$$

であるとする。

今斯かる観測値が次の如く a 行 b 列に排列されたとする。

$$\begin{matrix} x_{11}, x_{12} \cdots\cdots x_{1b} \\ x_{21}, x_{22} \cdots\cdots x_{2b} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_{a1}, x_{a2} \cdots\cdots x_{ab} \end{matrix} \qquad (4)$$

(註14) J. Neyman: Lectures and Conferences on mathematical Statistics 1937. P35-41 を参照のこと。亦同書 P. 41-44 の例も本法方によつて容易に證明できる。

(註15) 前記Kennyの著書P. 147-153 或ひは前記A.T. Craigの論文(註2)參照の事

仮 $\bar{x}_{j\cdot}$, $\bar{x}_{\cdot K}$, $\bar{x}$ を夫々 j 行の標本値の平均値、K列の標本値の平均値、全標本値の平均値をあらはすものとすれば容易に次の関係が證明される。

即ち

$$\sum_1^a \sum_1^b (x_{jK}-\bar{x})^2 = b\sum_1^a (\bar{x}_{j\cdot}-\bar{x})^2 + a\sum_1^b (\bar{x}_{\cdot K}-\bar{x})^2$$

$$+\sum_1^a \sum_1^b (x_{jK}-\bar{x}_{j\cdot}-\bar{x}_{\cdot K}+\bar{x})^2 = \theta_1+\theta_2+\theta_3$$

である。然るとき $\theta_1=(Av,v)$　$\theta_2=(Bv,v)$　$\theta_3=(Cv,v)$ なる形に書ける。但し A, B, C は下式に示すが如き行列である。即ち

$$a_j=\Big(\underbrace{\overbrace{-\frac{1}{ab},\cdots\cdots,-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}}_{1\text{番目}},\cdots\cdots\underbrace{\overbrace{-\frac{1}{ab}\cdots\cdots-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}}_{j-1\text{番目}}\underbrace{\overbrace{\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}\cdots\cdots\frac{1}{b}-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}}_{j\text{番目}}$$

$$\underbrace{\overbrace{-\frac{1}{ab},\cdots\cdots-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}}_{j+1\text{番目}},\cdots\cdots,\underbrace{\overbrace{-\frac{1}{ab}\cdots\cdots-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}}_{a\text{番目}}\Big)$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots a)$$

$$b_K=\Big(\overbrace{-\frac{1}{ab},\cdots\cdots,\underset{(K\text{番目})}{\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}},\cdots\cdots-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}\cdots\cdots\overbrace{-\frac{1}{ab}\cdots\cdots\underset{(K\text{番目})}{\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}}\cdots\cdots,-\frac{1}{ab},}^{b\text{個}}$$

$$\cdots\cdots\overbrace{-\frac{1}{ab}\cdots\cdots\underset{(K\text{番目})}{\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}}\cdots\cdots-\frac{1}{ab}}^{b\text{個}}\Big)$$

$$(K=1,2,\cdots\cdots b)$$

$$L_{jK}=\Big(\overbrace{\tfrac{1}{ab},\cdots\underset{(K番目)}{\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{a}},\cdots\tfrac{1}{ab}}^{b個},\cdots\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{ab},\cdots\underset{(K番目)}{\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{a}},\cdots\tfrac{1}{ab}}^{b個}}_{(j-1)番目},$$

$$\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{b},\cdots\underset{(K番目)}{\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{b}-\tfrac{1}{a}+1},\cdots\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{b}}^{b個}}_{j番目},$$

$$\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{ab},\cdots\underset{(K番目)}{\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{a}},\cdots\tfrac{1}{ab}}^{b個}}_{(j+1)番目}\cdots\underbrace{\overbrace{\tfrac{1}{ab}\cdots\underset{(K番目)}{\tfrac{1}{ab}-\tfrac{1}{a}}\cdots\tfrac{1}{ab}}^{b個}}_{a番目}\Big)$$

$$(j=1,2,\cdots\cdots a,\quad K=1,2,\cdots\cdots b)$$

と置けば

$$A=\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_1\end{matrix}\right\}(b個)\\ \left.\begin{matrix}\alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_2\end{matrix}\right\}(b個)\\ \vdots\\ \left.\begin{matrix}\alpha_a\\ \vdots\\ \alpha_a\end{matrix}\right\}(b個)\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}\left.\begin{matrix}b_1\\ \vdots\\ b_1\end{matrix}\right\}(a個)\\ \left.\begin{matrix}b_2\\ \vdots\\ b_2\end{matrix}\right\}(a個)\\ \vdots\\ \left.\begin{matrix}b_b\\ \vdots\\ b_b\end{matrix}\right\}(a個)\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}L_{11}\\ \vdots\\ L_{1b}\\ L_{21}\\ \vdots\\ L_{2b}\\ \vdots\\ L_{a1}\\ \vdots\\ L_{ab}\end{pmatrix}\qquad(5)$$

である。然も A, B, C は対称であり、且、A B の階数は夫々 $(a-1)$, $(b-1)$ なることは(5)に示せる行列中の行ベクトルに注目すれば容易に判定し得る。(註16) 亦(5)に依て容易に $A^2=A$,

267

$B^2=B,\ C^2=C$ (6) なることを知る。一方 $(\alpha_j\ \ell_k)=0$ $(\alpha_j\ \Sigma_{jk})=0,\quad (\ell_k,\ \Sigma_{jk})=0$ が j, k の如何にかゝはらず成立するから

$$AB=0,\quad AC=0,\quad BC=0 \qquad (7)$$

なることは A, B, C が対称なることを考慮して (5) より明らかである。而して容易に計算できる如く

$$AV=\sigma^2(1-\rho)A,\quad BV=\sigma^2(1-\rho)B,$$

$$CV=\sigma^2(1-\rho)C, \qquad (8)$$

であるから此と (7) より

$$AVB=\sigma^2(1-\rho)\ A\cdot B=0$$

$$BVC=\sigma^2(1-\rho)\ B\cdot C=0$$

$$AVC=\sigma^2(1-\rho)A\cdot C=0$$ なることが云へ

従って〔定理I〕に依て $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ は相互に独立である。亦 (6) と (8) より

$$AVA=\sigma^2(1-\rho)A\cdot A=\sigma^2(1-\rho)A^2=\sigma^2(1-\rho)A, \qquad (9)$$

$$BVB=\sigma^2(1-\rho)B\cdot B=\sigma^2(1-\rho)B^2=\sigma^2(1-\rho)B$$

$$CVC=\sigma^2(1-\rho)C\cdot C=\sigma^2(1-\rho)C^2=\sigma^2(1-\rho)C$$

なることを知る。これから $\dfrac{\theta_1}{(1-\rho)\sigma^2},\ \dfrac{\theta_2}{(1-\rho)\sigma^2},\ \dfrac{\theta_3}{(1-\rho)\sigma^2}$ が χ^2－分布をなし、且初の二つは夫々自由度 $(a-1)$; $(b-1)$, の χ^2 分布をなすことは〔定理II〕に依て明かである。

(註16) 前記 Schreier-Sperner の著書參照の事

而して $\frac{1}{(1-\rho)\sigma^2}\sum_1^a\sum_1^b(x_{jk}-\bar{x})^2$ は明らかに自由度 $N-1$ の χ^2 分布をなすから〈定理Ⅲ〉に依って $\frac{\theta_3}{(1-\rho)\sigma^2}$ は自由度 $N-1-(a-1)-(b-1)=ab-a-b+1=(a-1)(b-1)$ なる χ^2 分布をなすことが證明される。

従って

$$\frac{(b-1)\theta_1}{\theta_3}=\frac{\theta_1}{(a-1)(1-\rho)\sigma^2}\Big/\frac{\theta_3}{(a-1)(b-1)(\rho-1)\sigma^2} \quad (10)$$

$$\frac{(a-1)\theta_2}{\theta_3}=\frac{\theta_2}{(b-1)(1-\rho)\sigma^2}\Big/\frac{\theta_3}{(a-1)(b-1)(\rho-1)\sigma^2}$$

は ρ の如何にかゝはらず夫々 $n_1=a-1$, $n_2=(a-1)(b-1)$, $n_1=(b-1)$, $n_2=(a-1)(b-1)$ なる分布をなすことが F 分布をなすことが示される。例でゝで $\rho=0$ と置けば上述の理論は正規分布をなす一変量の $N=ab$ 個の独立に観測された標本値の普通の変量分析法に帰着する。以上の理論は母集団の分布が斯かる場合の如き相関のあるものでも F-test 或ひは Z-test が普通の変量分析法と何等変更なく利用出来ることを示してある。

（註）θ_3 の自由度は直接にベクトルから判定できるが、判定困難である。此の点につき前記（註2）の A. T. Craig の論文には難点がある。