28. 信頼限界による百分率の差の略式検定法

中央氣象台技師　小河原　正己

（昭和２０年１月１６日受付）

§1. 信頼限界による差の略式検定法

N回の観測中或事象の生起回数がK回，これと独立なN'回の観測中K'回生起したとき，生起割合$\frac{K}{N}$，$\frac{K'}{N'}$の差の有意性を検定する方法としてはR，A．Fisherの直接確率計算法(註1)があるが，備った場合の数が少し多くなると計算が相當に面倒になる．こゝでは信頼限界を用ひてする簡単な近似検定法を述べようと思ふ(註2)．これは幾つかの頻度割合$\frac{K}{N}$，$\frac{K'}{N'}$，$\frac{K''}{N''}$，---の大小を比較するとき特に便利であらう．

一般に二つの母集団に於て比較しようとする未知常数をθ，θ'とし，その評価量を夫々T，T'実現された標本によって計算したその値を夫々T_0，T_0'（$T_0 > T_0'$）とする．今危険率αを與へ，これ等のT_0，T_0'から求められるθの信頼限界の下限を$\underline{\theta}$，θ'の上限を$\overline{\theta}'$とすれば，定義(註3)によって．

$$P_r\left[T \geqq T_0 \mid \theta = \underline{\theta}\right] = \alpha$$

$$Pr[T' \leqq T_0' \mid \theta' = \overline{\theta}'] = \alpha$$

こゝに、標本の大きさを一定にしておけば

$$\left.\begin{array}{l} Pr[T \geqq T_0 \mid \theta],\quad Pr[T' \geqq T_0' \mid \theta'] \text{は} \\ \text{夫々}\ \theta,\ \theta' \text{の増加函数である} \end{array}\right\} \quad (*)$$

ことを假定しておく、さて上記の信頼限界に於て

$$\overline{\theta}' < \underline{\theta} \qquad (1)$$

であったとする、これは $\theta \leqq \theta'$ なるにもかゝはらず偶然に起きた関係であるかも知れない。そこで帰無假設

$$H \ ; \ \theta \leqq \theta'$$

を設けて見る、$\theta \leqq \theta_0 \leqq \theta'$ なる任意の θ_0 をとり、

$$Pr[T \geqq T_0 \mid \theta = \theta_0]\ Pr[T' \leqq T_0' \mid \theta' = \theta_0'] = \beta(\theta_0)$$

とおけば、(*) なる假定の下に於ては明かに

$$Pr[T \geqq T_0 \mid \theta]\ Pr[T' \leqq T_0' \mid \theta'] \leqq \beta(\theta_0)$$

即ち假設 H を棄却するとき、第一種の過誤を犯す危険率は $\beta(\theta_0)$ 以下である、しかして

$$\overline{\theta}' \leqq \theta_0 \leqq \underline{\theta} \qquad (2)$$

なる θ_0 に対しては明かに

$$\beta(\theta_0) \leqq \alpha^2$$

(2) なる制限を設けないときの $\underset{\theta_0}{Max}\ \beta(\theta_0)$ の大さが問題であるが、殆んどすべての場合に

$$\underset{\theta_0}{Max}\ \beta(\theta_0) \leqq (1+\lambda)\alpha^2$$

であることが保証されゝば，豫め $(1+\lambda)\alpha^2$ が十分小さい様に α を與へておいて，$\underline{\theta}$，$\overline{\theta}'$ を計算し，もしも $\overline{\theta}'<\underline{\theta}$ ならば假設 H を棄て，$\theta>\theta'$ であると認めて差支へない。尚假定 $(\times)$ は吾々が通常遭遇する様な問題に於ては常に成立して居ると見てよいであらう。

§2. 百分率（頻度割合）の場合

百分率の場合について，上記の $(1+\lambda)\alpha^2$ がどの程度になるかを調べて見よう。

$\frac{K}{N} > \frac{K'}{N'}$ とし，両母集団の生起確率を p，p' とする。危険率 α に対し，p の信頼限界の下限を $\underline{p}$，p' の上限を $\overline{p}'$ とする。（註 4） このとき $\overline{p}'<\underline{p}$ であったとし，前節に於て $\theta_0 = p$ とおけば

$$F_{K/N}(p) = P_r\left[\frac{X}{N} \geqq \frac{K}{N} \,\middle|\, p\right] = \frac{1}{B(K,\ N-K+1)} \int_0^p x^{K-1}(1-x)^{N-K}\,dx \qquad (3)$$

$$F^{*}_{K'/N'}(p) = P_r\left[\frac{X}{N'} \leqq \frac{K'}{N'} \,\middle|\, p\right] = \frac{1}{B(K'+1,\ N'-K')} \int_p^1 x^{K'}(1-x)^{N'-K'-1}\,dx \qquad (4)$$

であるから

$$\beta(p) = F_{K/N}(p) F^{*}_{K'/N'}(p) \tag{5}$$

然るに

$$F_{K/N}(\underline{p}) = F_{K'/N'}(\bar{p}') = \alpha \tag{6}$$

であるから，$\underline{p} = \bar{p}' + h \quad (h > 0)$，$p = \bar{p}' + h + x$

とおき，

$$f(x) = \beta(\bar{p}' + h + x) - \alpha^2$$

とおけば，(5) から

$$f(x) = \alpha f_1(x) - \alpha f_2(x) - f_1(x) f_2(x) \tag{7}$$

但し

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{B(K, N-K+1)} \int_{\bar{p}'+h}^{\bar{p}'+h+x} x^{K-1} (1-x)^{N-K} dx \\ f_2(x) &= \frac{1}{B(K'+1, N'-K')} \int_{\bar{p}'}^{\bar{p}'+h+x} x^{K'} (1-x)^{N'-K'-1} dx \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

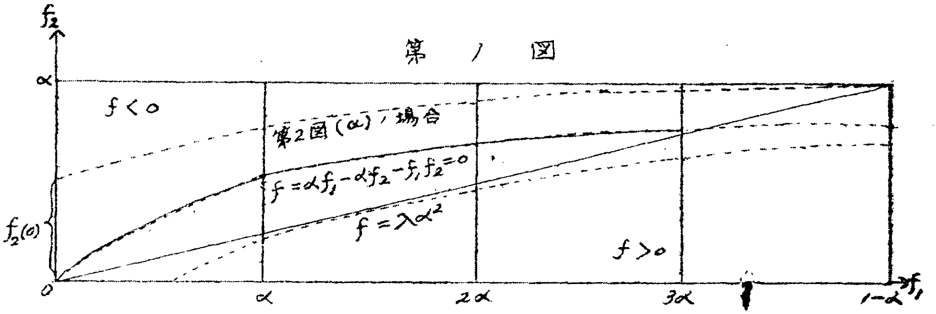
となる．この $f(x)$ の大きさを $x > 0$ について調べれば十分である．

f_1，f_2 を直角座標にとるとき

$$f = 0$$

は第1図の実線で示した様な双曲線となる．

第 1 図



この双曲線の上側に於ては $f<0$，下側では $f>0$ である，x が 0 からだんだん大きくなるとき，$f_1(x)$ は 0 から単調に増加して $\bar{p}'+h+x=1$ のとき $f_1(x)=1-\alpha$ となり，$f_2(x)$ は $f_2(0)>0$ なる値から単調に増加して最後に α になる（第2図(a)参照）．この時第1図に於て点 (f_1, f_2) は f_2 軸上の点 $(0, f_2(0))$ から出発して，点 $(1-\alpha, \alpha)$ まで単調に変化する、その曲線が f の負域にあれば $\beta(\dot{x})<\alpha^2$ であるが，これがどの程度まで f の正域に侵入して動く可能性があるかが問題になる．

(8) から

$$\frac{d^2 f_2}{d f_1^2}=A(x)\left\{(N-N')(\bar{p}'+h+x)-(K-K'-1)\right\} \qquad (9)$$

を得る．こゝに $A(x)$ は常に正の函数である．

さて，$f(x)$ が極大になり得るのは，主として $f_1(x)$ が急激に増加する附近であって

$$\frac{K'}{N'} < \bar{p}' + k + x \lesssim \frac{K-1}{N} \qquad (10)$$

なる範囲の x に対しては，明かに

$$(N-N')(\bar{p}' + k + x) - (K-K'-1) < 0 \qquad (11)$$

又 N, K がそれぞれ N', K' に比し著しく大きくない場合には $\frac{K}{N}$ の附近の $\bar{p}' + k + x$ に対し，やはり（11）が成立つ，この様な x の範囲に於ては（9）により（f_1, f_2）の画く曲線は上に凸である．x が更に右方に動くときは，$F^{*}_{K,N'}$ が著しく小さくなるために $f<0$，即ち曲線は負域にある，依て大抵の場合には曲線（f_1, f_2）は原点と（$1-\alpha$, α）を結ぶ直線の上側にあると見てよい．双曲線

$$\alpha f_1 - \alpha f_2 - f_1 f_2 = \lambda \alpha^2 \qquad (12)$$

がこの直線に切する様に λ を定めると

$$\lambda = \frac{(2\alpha-1)^2}{4\alpha(1-\alpha)} \qquad (13)$$

を得る．この λ に對しては

$$f(x) \leqq \lambda\alpha^2 \quad \text{即ち} \quad \beta(p) \doteqdot (1+\lambda)\alpha^2 \qquad (14)$$

が近似的に成立つ．

百分率の信頼限界はF分布の表を用ひて，求められるが，統計数値表（統計科学研究會編）には $\alpha=20\%$ に対する表があるから，$\alpha=0.2$ にと

ると，(14)は

$$\beta(p) \leqq 0.06$$

となり，5%危険率による通常の検定と殆んど同程度となる

第2図には $\alpha=0.2$ に對し $\overline{p}'<\underline{p}$ なる場合の三つの例につき数値計算を行つた結果を示した．実線は $F_{K/N}(p)$，$F^{*}_{K'/N'}(p)$ の曲線，点線の曲線が $\beta(p)$ であつて，これ等の例では何れも $\beta(p) \leqq 0.03$ となつて居る．第1図の f の負域にある点線の曲線は第2図(ハ)に對應するものである．

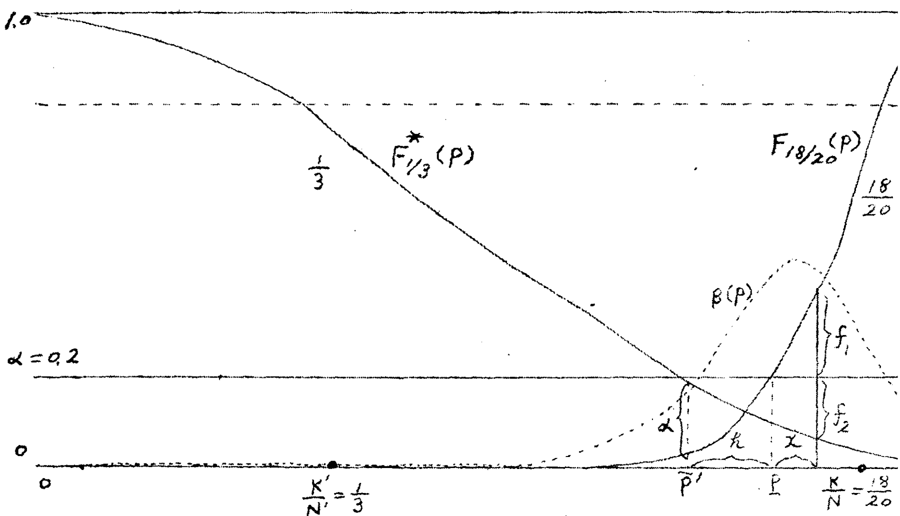
$\beta(p)$ の大きさの評價を嚴密に行ふことは可也繁雑になる様に思はれるが(註5) 上記の大雑把な方法に於て問題になるのは N が N' に比し著しく大きく，$F^{*}_{K'/N'}(p)$ が緩やかに減少するに対し，$F_{K/N}(p)$ が急激に増加する場合である．(註6) このとき n が十分小さいと，$\beta(p)$ は可成り大きくなる可能性がある．この $Max\,\beta(p)$ と N，N'，K，K' との関係をはつきりと求めることは，残された問題であるが，第2図に例示した程度の場合には，信頼限界によつて十分に百分率の差を検定することができると考へられる．

4.044

8

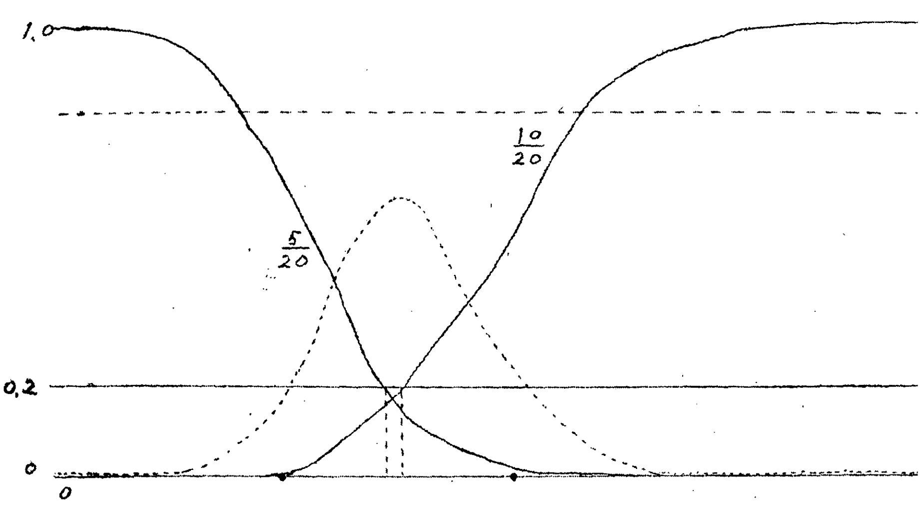
第 2 圖

(a) $\frac{K}{N}=\frac{18}{20}$, $\frac{K'}{N'}=\frac{1}{3}$

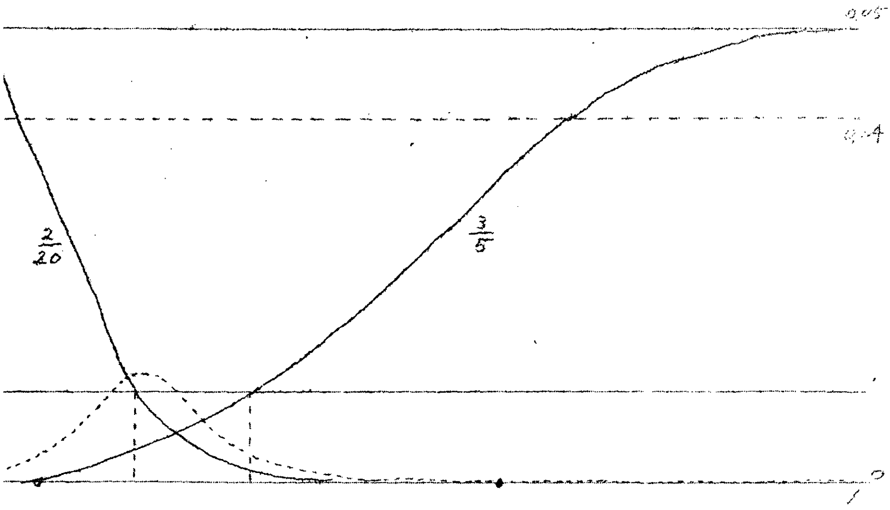


第 2 図

(b) $\frac{K}{N}=\frac{10}{20}$, $\frac{K'}{N'}=\frac{5}{20}$



(C) $\frac{K}{N}=\frac{3}{5}$, $\frac{K'}{N'}=\frac{2}{20}$



(註1) 統計数値表90頁又は増山元三郎:少数例の纏め方と立て方34頁参照

(註2) 二つの相関係数の差の判定に信頼限界を應用することについては筆者が氣象集誌第二輯20, 296-311頁中に述べたことがある。

(註3) 本講究録(第一巻第十三號)に於ける筆者の「信頼限界について」の項を参照

(註4) 計算法については前註「信頼限界について」の例2を参照

（註5）適當な方法がありましたら、御教示を願ひます。

（註6）この様な場合には、危險率$\alpha=0.05$に對するp'の上限$\bar{p}'$を求め、$\bar{p}'<\frac{k}{N}$なら、その差を有意と看做してもよいであらう。