22. r分布及ビr検定

兼任所員　佐藤良一郎

§1. r－分布

次ニ述ベル二ツノ定理ハ，後ニ見ルヤウニ頗ル結実ノ多イ定理デアル

定理一　$x_1, x_2, \cdots, x_N$ ヲ正規母集團

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}}\qquad (\sigma,\xi\text{ハ定数})\qquad (1)$$

カラ取ッタ大サNナル任意ノ射倖見本トシ，$a_1, a_2, \cdots, a_N$ ヲ悉クハ相等シクナイ任意ノ定数トスルト，ξ及ビσノ値ノ如何ニカカハラズ次ノコトが成立ツ。

$$N\bar{x}=\sum x_i,\qquad N S_x^2=\sum(x_i-\bar{x})^2 \qquad (2)$$

$$N\bar{a}=N a_i,\qquad N S_a^2=\sum(a_i-\bar{a})^2 \qquad (3)$$

トスレバ

$$r=\frac{\sum_{(i=1)}^{N}(x_i-\bar{x})(a_i-\bar{a})}{N\cdot S_x\,S_a} \qquad (4)$$

ノ元確率法則 $p(r)$ ハ

$$p(r)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}\left(1-r^2\right)^{\frac{N-4}{2}} \tag{5}$$

デ表サレル。

(5) ハ二変数 X, Y ノ正規分布函数ニ於テ $\rho=0$ デアルトキノ X, Y 間ノ見本相関係数 r ノ元確率法則ト全ク同一ノ形デアルガ，相関係数 r ノ場合ハ定義式

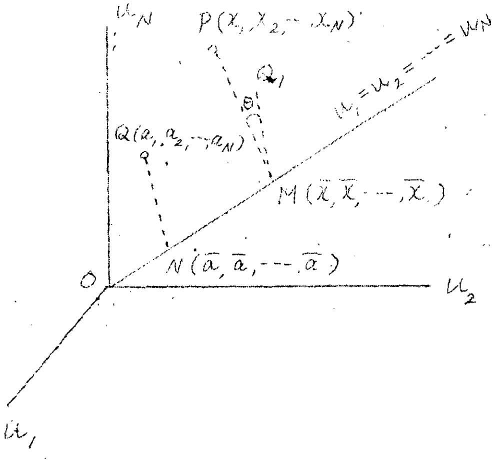
$$r=\frac{\sum(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\overline{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\overline{y})^2}} \tag{6}$$

ニ於ケル x, y ハ共ニ射倖変数デアルノニ對シ，(4) デハ x ダケガ射倖変数デアル。故ニ (4) デ定義サレル r ハ相関係数デハナイ。ソレデ (5) ノ形式デ表サレル分布法則ヲ，t－分布ヤ z－分布ニ倣ッテ，r－分布ト呼ブコトニショウ。

定理ノ証明ハ次ノ通リデアル。

$(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N)$ ヲ N 次元空間ノ点トシ，コレヲ P ト名ヅケ，P カラ直線 $u_1=u_2=\cdots\cdots=u_N$ ニ垂線ヲ引イテソノ足ヲ M トスルナラバ，M ノ座標ハ $(\overline{x}, \overline{x}, \cdots\cdots, \overline{x})$ トナルコト明デアル。

又 $(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N)$ ヲ座標トスル点ヲ Q ト名ヅケ，Q カラ直線 $u_1=u_2=\cdots\cdots=u_N$ ニ引イ



イタ垂線ノ足ヲNトスルト，Nノ座標ハ$(\bar{\alpha},\bar{\alpha},\cdots,\bar{\alpha})$デアル。

仮定ニヨリx_iノ元確率法則ハ(4)デ定義サレテヰルカラ，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ノ同時的元確率法則ヲ$p(x_1, x_2, \cdots, x_N)$トスレバ

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^N e^{-\frac{\sum(x_i-\xi)^2}{2\sigma^2}} \qquad (7)$$

故ニ

$$\sum_{i=1} (x_i-\xi)^2 = R^2 \qquad (R\text{ハ任意定数}) \qquad (8)$$

ナルN次元空間ノ球面上デハ点ガドコニアッテモ確率密度ハ一定シテヰル。

故ニコノ球ヲ直線$u_1 = u_2 = \cdots = u_N$ニ垂直ナ平面デ切ッタ時ニ出来ル円（$N-1$次元ノ球面）ノ周上デモ確率密度ハ一定シテヰル。~~従ッテ前述ノベクトルMPガベクトルNQトナス角ヲθトスルト~~，θハ~~均等分布デナ~~ス。

直線 $u_1=u_2=\cdots\cdots=u_N$ ニ点 M ニ於テコレニ垂直ナ平面デ球面 (8) ヲ切ル時ニ出来ル円ハ,(N－1)次元ノ球面デアルカラ、M ヲ通リ NQ ニ平行ナルベクトル MQ′ ト MP トノナス角 θ ガ θ±dθ ナル値ヲ取ル確率 p(θ)dθ ハ $\sin^{N-3}\theta d\theta$ ニ比例スル。即チ

$$p(\theta)\propto \sin^{N-3}\theta, \quad 0\leqq\theta\leqq\pi \qquad (9)$$

デアルトイヘル

サテ軸 $u_1, u_2, \cdots u_N$ ト MP ノナス角ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_N$ トシ、NQ ノナス角ヲ $\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_N$ トスルト

$$\cos\alpha_i=(x_i-\bar{x})/\sqrt{N}\,S_x=X_i \qquad (10)$$

$$\cos\beta_i=(a_i-\bar{a})/\sqrt{N}\,S_a \qquad (11)$$

デアルカラ

$$\cos\theta=\sum\cos\alpha_i\cos\beta_i=r \qquad (12)$$

依ツテ

$$\sin\theta=\sqrt{1-r^2}, \quad dr=-\sin\theta d\theta \qquad (13)$$

ソコデ r ノ元確率法則ヲ p(r) トスルト

$$p(r)=p(\theta)\left|\frac{d\theta}{dr}\right|=C(1-r^2)^{\frac{N-4}{2}} \qquad (14)$$

但シ C ハ

$$\int_{-1}^{+1}p(r)\,dr=1$$

トナルヤウニ定メラルベキ定数デ，ソノ値ハ

$$C = \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)} \tag{15}$$

ト計算サレル

故ニ

$$p(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}\left(1-r^2\right)^{\frac{N-4}{2}} \tag{16}$$

即チ定理ハ證明サレタ。

尚ホ

$$t = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

ト置ケバ，t ノ元確率法則トシテ

$$p(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(N-2)}\;\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{N-2}\right)^{-\frac{N-1}{2}} \tag{17}$$

ヲ得ル。即チ $N-2$ ヲ自由度トスル t—分布ニ外ナラナイ。

定理二 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N$ ヲ正規母集團

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi)^2}{2\sigma^2}} \tag{18}$$

（σ, ξ ハ定数）

カラ取ッタ大サNナル任意ノ射倖見本トシ,ξハ既知ノ定数, $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N$ハ悉クハ$\xi$ニ等シクナイ任意定数トスルト, ξノ値ノ如何ニカカハラズ次ノコトガ成立ツ。

$$N\xi S_x^2 = \sum(x_i - \xi)^2 \qquad (19)$$

トシ

$$N\xi S_a^2 = \sum(a_i - \xi)^2 \qquad (20)$$

トスルト

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\xi)(a_i-\xi)}{N\cdot\xi S_x\cdot\xi S_a} \qquad (21)$$

ノ元確率法則$p(r)$ハ

$$p(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{N-3}{2}} \qquad (22)$$

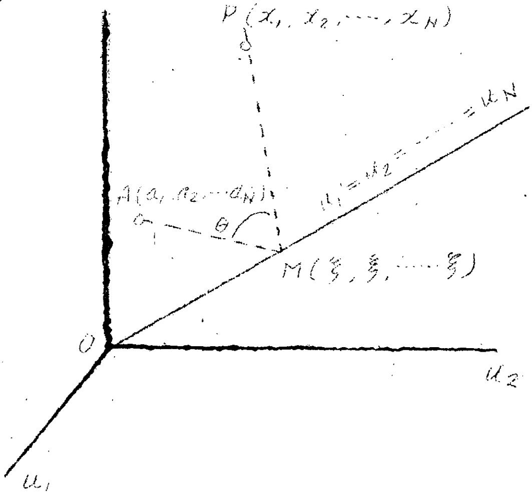
デ与ヘラレル。

(21)デ定義サレタrニ於テハa_iハ何レモ定数デx_iダケガ射倖変数デアル。ソシテコノ場合ノrノ確率法則ハ,定理一ニ於テNノ代リニN+1ヲ置イタモノニ等シイ。定理一ニ於ケルr一分布ヲ自由度N−2ノr一分布ト呼ブナラバ,コレハ自由度~~N−1~~ノr一分布ト呼ンデヨイデアラウ。

以下コノ呼称ヲ用ヒルコトトスル。

証明ヲ述ベルト次ノ通リデアル。

点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ ト点 $M(\xi, \xi, \cdots, \xi)$ デ定マルベクトルMPガ、点 $A(a_1, a_2, \cdots, a_N)$ ト点Mデ定マルベクトルMAトノナス角ヲθトスルト、定理一ノ場合ト全ク同ジ理由ニヨリ



θガ~~θヲ土ストθハオノ値ヲ取ル確率ハθノ大キサ~~ニカカハラズ一定デアルトイヘル。ソシテ今ノ場合ニ於テハ点Mヲ中心トスルN次元空間ノ球面ノ半径MPガ一~~定ナル時ノ半径MA~~トナス角θノ元確率法則P(θ)ニ

~~[illegible]デアルカ~~ラ

$$P(\theta) \propto \sin^{N-2}\theta, \quad 0 \leqq \theta \leqq \pi \qquad (23)$$

デアルトイヘル。トコロデ

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \xi)(a_i - \xi)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\xi)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(a_i-\xi)^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}(x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a} = r \qquad (24)$$

デアルカラ，r ノ元確率法則ヲ $p(r)$ デ表セバ

$$p(r)=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left(1-r^2\right)^{\frac{N-3}{2}} \qquad (25)$$

トナル。即チ證明サレタ。

定理一ニ對スルト同様ニ

$$t=\frac{r\sqrt{N-1}}{\sqrt{1-r^2}} \qquad (26)$$

ト置ケバ，t ノ元確率法則トシテ

$$p(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi(N-1)}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{N-1}\right)^{-\frac{N}{2}} \qquad (27)$$

ヲ得ル。

即チ（26）デ定義サレル t ハ $N-1$ ヲ自由度トスル tー分布ヲナス。

§2. r ノ検定

定理一及ビ二デ定義シタ r ハ諸種ノ異例検出ニ應用出来ル。ソレデ r ヲ検定基準即チ目安ニシテ或事例が，他ノ諸事例ト同一ノ正規母集団ニ屬スルトシテハ著シク常態から外レテヰル，即チ異例デアルトイッテ然ルベキカ否カヲ検定スルコトヲ rー検定ト呼バウ。χ^2ー検定，tー検定，zー検定等トイフノニ倣ツテサウ名ヅケルマデノコトデアル。

尤モ上ニ触レテヰルヤウニγー検定ハtー検定ニ引直スコトが出来ルノデアル。ケレドモ下ニ見ルヤウニ数多ノ検定基準がγー分布カラ生レ出ルノデ寧ロγー検定ヲ用ヒル方が便利デアルトイヘヤウ。殊ニ利用シ得ベキ数表※が備ッテヰルカラγー検定ヲtー検定ニ引直ス必要ハナイ。

§3. $|x_N-\bar{x}|$ノ顕著性検定※※

$x_1, x_2, ---, x_N$が同一ノ正規母集団カラ射倖的ニ取ッタ大キサNノ一見本デアル時，コノ中ノ一ツ例ヘバx_Nが$\bar{x}=\frac{1}{N}\Sigma x_i$ト著シクカケハナレテヰルナラバ$x_N$ハ，$x_1, x_2, ---, x_{N-1}$ト共ニ同一ノ正規母集団カラ出タモノトシテハ異例デアル，或ハ$|x_N-\bar{x}|$ハ顕著デアル，或ハx_Nト$\bar{x}$トノ差ハ著シイトイフ。

$|x_N-\bar{x}|$ノ顕著性検定ニγヲ用ヒルコトが出来ル。

※ 拙著：数理統計学附録，IV.

統計科学研究会編 統計数値表第33表

※※ 有意性検定ノ代リトシテ提供スル。有意性トイフト意志又ハ意識ノ有意トイフコトト混淆サレル。

ソノコトヲ次ニ示サウ。場合ガ二ツニ分レル。

(I) 母集団ニ於ケル平均ξノ値ノ既知ナル場合

(II) 母集団ニ於ケル平均ξノ値ノ未知ナル場合

但シ何レノ場合ニモ標準偏差σノ値ハ問ハナイノデアル。勿論既知デアッテモ差支ヘナイ。

(I)ノ場合ニ於ケル$|x_N - \bar{x}|$ノrニヨル顕著性検定法

定理二ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_{N-1} = -1 + \xi,$$

$$a_N = N - 1 + \xi$$

ト置ケバ

$$N\ {}_{\xi}S_a^2 = N(N-1)$$

トナルカラ、

$$r = \frac{\sum (x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N-1} (x_i - \xi)(-1) + (x_N - \xi)(N-1)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \sqrt{N-1}} = \frac{x_N - \bar{x}}{{}_{\xi}S_x \sqrt{N-1}}$$

即チ

$$r = \frac{x_N - \bar{x}}{{}_{\xi}S_x \sqrt{N-1}} \qquad (28)$$

トナル。コノrハ定理二ニヨレバ

$$p(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)} (1-r^2)^{\frac{N-3}{2}} \tag{29}$$

ナル元確率法則ニ従フカラ，$0<\alpha<1$ナル任意ノ定数αニ對シ

$$P\{|r|>r_0\} = \alpha$$

ヲ満足サセルヤウナr_0ヲ定メルコトが出来ル。※
従ッテ$|x_N-\overline{x}|$ノ顕著性ヲ検定スルニ用ヒルコトが出来ル。

(II) ノ場合ニ於ケル$|x_N-\overline{x}|$ノrニヨル顕著性検定法

定理一ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = -1, \qquad a_N = N-1$$

ト置ケバ

$$\overline{a} = 0, \qquad N S_a^2 = (N-1)N$$

トナルカラ

$$r = \frac{\sum (x_i-\overline{x})(a_i-\overline{a})}{N\ S_x\ S_a}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{N-1}(x_i-\overline{x})+(N-1)(x_N-\overline{x})}{N\ S_x\sqrt{N-1}} = \frac{x_N-\overline{x}}{S_x\sqrt{N-1}}$$

※ 拙著：数理統計学附録 IV デハ$\alpha=.1,\ 0.05,\ 0.02,\ 0.01$ニ對スル$r_0$ヲ表示シテアル。ソシテ本表中ノnハ$N-1$ニ等シイ。

即チ

$$r = \frac{x_N - \bar{x}}{S_x\sqrt{N-1}} \tag{30}$$

トナル。コノ r ハ定理一ニヨレバ

$$p(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{N-4}{2}} \tag{31}$$

ナル先確率法則ニ従フカラ，$0<\alpha<1$ デアルヤウナ任意ノ定数 α ニ對シテ

$$P\{|r| > r_0\} = \alpha$$

ヲ満足サセルヤウナ r_0 ヲ定メルコトが出来ル。ソレ故 $|x_N - \bar{x}|$ ノ顕著性ヲ検定スルニ用ヒルコトが出来ル。※

§4. $|x_N - \xi|$ ノ顕著性検定

前節ニ於テ (I) ノ場合ニ，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ ノ中ノ一ツ例ヘバ x_N が，$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{N-1}$ ト共

※ Thompson ノ棄却検定法トイフノハ r ノ代リニ $\tau = \sqrt{N-1}\ r$ ヲ用ヒタモノデアル。尚ホ拙著数理統計学附録 IV 表又ハ統計科学研究會編統計数理表第33表ヲ用ヒルニハ $N-2$ ヲ n ニ取レバヨイ。

ニ母集団平均ξノ既知ナ正規母集団カラ出タ値トシテハ若シクξトカケハナレテヰル、即チ $|x_N - \xi|$ ガ顕著デアルトイフコトデ検定スルタメノ旧安アハ、次ノヤウニシテ導キ出セル。

定理二ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{N-1} = \xi, \qquad a_N = 1 + \xi$$

ト置ケバ

$$N\,{}_\xi S_a^2 = 1$$

トナルカラ

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_\xi S_x \cdot {}_\xi S_a}$$

$$= \frac{x_N - \xi}{N \cdot {}_\xi S_x \sqrt{\frac{1}{N}}} = \frac{x_N - \xi}{{}_\xi S_x \sqrt{N}}$$

即チ

$$r = \frac{x_N - \xi}{{}_\xi S_x \sqrt{N}} \qquad (32)$$

但シ $N \cdot {}_\xi S_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \xi)^2$

トナル、コノ r ノ元確率法則ハ (29) デ與ヘラレル

カラ、コレニ基イテ、

$$P\{|r| > r_0\} = \alpha$$

ヲ満足サセルヤウニ γ_0 ヲ定メレバ $|x_N-\xi|$ ノ顕著性ヲ検定スルコトガ出来ル。※ 実際ニ多々行ハレ出シタアノ表ヲ用ヒル時ニハ $n=N-1$ トスレバヨイ。

§5. $|x_p-x_q|$ ノ顕著性検定

$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots \leqq x_{N-1} \leqq x_N$ ヲ同一ノ正規母集団カラ射倖的ニ取ッタN箇ノ値ト ~~[illegible]~~ トスルトキ、$|x_1-x_2|$ 又ハ $|x_{N-1}-x_N|$ 或ハ又 $|x_1-x_N|$ ガ、$x_1, x_2, \cdots, x_N$ ガ同一ノ正規母集団カラ出タモノトシテハ顕著デアルトイヘルカドウカトイフコトヲ検定スルタメノ目安ハ次ノヤウニシテ導キ出セル。

コノ三ツヲ引括メテ $|x_p-x_q|$ ノ顕著性検定ト考ヘ次ノ二ツノ場合ヲ分ケテソノ目安ヲ求メルコトトスル。

(I) 母集団ノ標準偏差 σ ハ未知又ハ既知デ、平均 ξ ハ既知ノ場合

(II) 母集団ノ標準偏差 σ ハ未知又ハ既知デ、平均 ξ モ亦未知ノ場合

(I) ノ場合ニ於ケル $|x_p-x_q|$ ノ顕著性検定

※ Chauvenet ノ方法ニ代ルベキモノデアル。

定理二ニ於テ

$$a_p = 1 + \xi, \qquad a_q = -1 + \xi$$

ト置キ，他ノaハ悉クξト置クト

$$N \, {}_{\xi}S_a^2 = 2$$

トナルカラ

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{(x_p - \xi) - (x_q - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \sqrt{\frac{2}{N}}} = \frac{x_p - x_q}{{}_{\xi}S_x \sqrt{2N}}$$

即チ

$$r = \frac{x_p - x_q}{{}_{\xi}S_x \sqrt{2N}} \qquad (32)$$

トナル。コノrノ元確率法則ハ（29）デ与ヘラレルカラ，$|x_p - x_q|$ノ顕著性検定ニ用ヒルコトガ出来ル。

（II）ノ場合ニ於ケル$|x_p - x_q|$ノ顕著性検定

定理一ニ於テ

$$a_p = 1, \qquad a_q = -1$$

ト置キ，残リノaハ悉ク0ト置クト

$$\bar{a} = 0, \qquad N S_a^2 = 2$$

トナルカラ

$$r = \frac{x_p - x_q}{S_x \sqrt{2N}} \qquad (33)$$

トナル。ソシテコノγノ元確率法則ハ(31)デ与ヘラレル。故ニ$|x_p - x_q|$ノ顕著性検定ニ用ヒルコトが出来ル。※

~~$p=1$, $q=N$ ナル場合ノ $|x_p - x_q|$~~ ノ顕著性検定ハ，x_i が大サノ順デ第i番目ニナル時ニハ，変異ノ幅(Range)ノ顕著性ヲ検定スルコトニ外ナラナイ。特ニコノ場合ヲ抜キ出シテイヘバ，

(α) 母集団平均がξ(既知ノ値)デ標準偏差σが未知又ハ既知デアル一ツノ正規母集団カラ取ッタ大サNナル見本ニツイテ次ノ定理が成立ツ。コノ見本ニ於ケル変異ノ幅ヲlトスレバ，

$$\gamma = \frac{l}{{}_{\xi}S_x\sqrt{2N}} \quad 但シ\ {}_{\xi}S_x = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma(x_i-\xi)^2} \quad (34)$$

ノ元確率法則 $p(\gamma)$ ハ

$$p(\gamma) = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{N-1}{2})}(1-\gamma^2)^{\frac{N-3}{2}} \quad (35)$$

デ表サレル。

(II) ~~母集団平均ξハ未知デ標準偏差σハ既知又~~

※ Irwin ノ方法ニ代ルベキモノデアル。Irwin ノ方法デハσヲ既知トスルノデアルがγー検定デハσノ値ハ問ハナイ。

ハ未~~知ノ一ツノ正規母集団カラ取~~ッタ大サNナル見本ニツイテ次ノ定理ガ成立ツ。コノ見本ニ於ケル変異ノ幅ヲ l トスレバ

$$r=\frac{l}{S_x\sqrt{2N}} \quad 但シ \quad S_x=\sqrt{\frac{1}{N}\sum(x_i-\bar{x})^2} \qquad (36)$$

ノ元確率法則 $p(r)$ ハ

$$p(r)=\frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)}(1-r^2)^{\frac{N-4}{2}} \qquad (37)$$

~~デ表サレル~~。

§6. $|\bar{x}-\xi|$ ノ顕著性検定

母集団標準偏差 σ ハ未知又ハ既知デ平均 ξ ガ既知デアル一ツノ正規母集団カラ取ッタ大サNナル見本ノ平均 $\bar{x}=\sum x_i/N$ ガ ξ ト著シクカケハナレテヰルカドウカヲ検定スルタメノ r ハ、次ノヤウニシテ求メラレル。

定理二ニ於テ，$a_1=a_2=\cdots\cdots=a_N=1+\xi$ ト置クト

$$N\,{}_\xi S_a^2=N \quad 即チ \quad {}_\xi S_a=1$$

トナルカラ

$$r=\frac{\sum(x_i-\xi)(a_i-\xi)}{N\cdot{}_\xi S_x\cdot{}_\xi S_a}=\frac{\sum(x_i-\xi)}{N\cdot{}_\xi S_x}=\frac{\bar{x}-\xi}{{}_\xi S_x}$$

即チ

$$r = (\overline{x} - \xi) / {}_{\xi}S_x \qquad (38)$$

ガ所要ノrデアル。

所謂 tー検定デハ

$$t = \frac{\overline{x} - \xi}{\frac{s}{\sqrt{N}}} \qquad 但シ \quad S^2 = \frac{\Sigma (x_i - \overline{x})^2}{N-1}$$

ヲ目當ニシテヰルノデアル。

§7. $|\overline{x}_1 - \overline{x}|$ ノ顕著性検定

同一ノ正規母集団カラ大サNノ見本ヲ取リ，ソノNノ値ヲ何カノ順（大サノ順，或ハ取ツタ順，或ハ他好ミノ順）ニ並ベタモノヲ$x_1, x_2, \cdots, x_N$トスル時，初メノk（＜N）個ノ値ノ平均

$\overline{x}_1 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ ガ，$x_1, x_2, \cdots, x_N$ガ同一ノ正規母集団カラ出タモノトシテハ $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ ト著シグカケハナレテヰルトイヘルカドウカ

即チ$|\overline{x}_1 - \overline{x}|$ガ顕著デアルトイヘルカドウカヲ検定スルタメノ$r$ハ次ノヤウニシテ定メラレル。

(I) 母集団平均ξガ既知デ標準偏差σガ未知又ハ既知ノ場合

定理二ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_k = -1 + \xi$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots\cdots = a_N = \frac{k}{N-k} + \xi$$

ト置ケバ

$$N \cdot {}_{\xi}S_a^2 = k + \frac{k^2}{N-k} = \frac{Nk}{N-k}.$$

トナルカラ

$$r = \frac{\Sigma(x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{k}(x_i - \xi) + \frac{k}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(x_{k+i} - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{-(N-k)\sum^{k}(x_i - \xi) + k\sum^{N-k}(x_{k+i} - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a\,(N-k)}$$

$$= \frac{-Nk(\overline{x}_1 - \xi) + Nk(\overline{x} - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \sqrt{k(N-k)}}$$

$$= \frac{\overline{x} - \overline{x}_1}{{}_{\xi}S_x \sqrt{\frac{N-k}{k}}}$$

即チ

$$r = \sqrt{\frac{k}{N-k}} \cdot \frac{\overline{x} - \overline{x}_1}{{}_{\xi}S_x} \qquad (39)$$

ヲ得ル。コレガ所要ノrデアル。

イフマデモナイコトナガラ，$k=1$ノ時ハ(28)ト同値ノモノニナル。

（II） 母集団標準偏差 σ ハ未知又ハ既知デ母集団平均 ξ ガ未知ノ場合

定理一ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = -1$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_N = k/(N-k)$$

トオケバ

$$\bar{a} = 0, \qquad N S_a^2 = k + (N+k)\left(\frac{k}{N-k}\right)^2 = \frac{Nk}{N-k}$$

トナルカラ，前ノ場合ト同様ニシテ

$$\gamma = \sqrt{\frac{k}{N-k}} \cdot \frac{\bar{x} - \bar{x}_1}{S_x} \qquad (40)$$

ヲ得ル。コレガ所要ノ γ デ，前ノ場合ト異ナルノハ ξS_a ノ代リニ S_x ガハイッテキタコトト，ソノ確率法則ノ自由度ガ異ナッテヰテ前ノ場合ハ $N-1$，後ノ場合ハ $N-2$ デアルコトデアル

（40）ニ於テ $k=1$ ト置ケバ（30）ト同値ノモノヲ得ル。

§8. $|\bar{x}_1 - \xi|$ ノ顕著性検定

§7ニ於テ（I）ノ場合ニ，$|\bar{x}_1 - \xi|$ ノ顕著性ヲ検定スルニハ如何ナル γ ヲ用ヒテヨイカ、コレヲ求メルニハ，

定理二ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1 + \xi$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_N = \xi$$

ト置ク、サウスルト、

$$N \ {}_{\xi}S_a^2 = k \qquad \text{従ッテ} \quad {}_{\xi}S_a = \sqrt{k/N}$$

トナルカラ

$$r = \frac{\sum (x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a} = \frac{k(\bar{x}_1 - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \sqrt{k/N}}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 - \xi}{{}_{\xi}S_x \sqrt{\frac{N}{k}}}$$

即チ

$$r = \sqrt{\frac{k}{N}} \cdot \frac{\bar{x}_1 - \xi}{{}_{\xi}S_x}, \quad \text{但シ} \ \bar{x}_1 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \qquad (41)$$

ヲ得ル。コレガ所要ノ r デアル

當然ノコトナガラ $k = 1$ トオケバ (32) ト同値ノモノ, $k = N$ トオケバ (38) ト同ジモノヲ得ル。

§ 9. $|\bar{x} - \bar{y}|$ ノ顕著性検定

標準偏差 σ ガ未知デアル同一ノ正規母集団カラ

$$x_1, x_2, \cdots, x_k$$

$$y_1, y_2, \cdots, y_l$$

ナル二組ノ見本ヲ取ツタ時, コノ二ツノ見本ノ平均

$$\bar{x} = \frac{1}{k}\sum x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{l}\sum y_i$$

ノ差 $|\bar{x} - \bar{y}|$ ノ顕著性ヲ検査スルタメノ γ ヲ求メルニハ、次ノヤウニスレバヨイ。

(I) 母集団平均 ξ ガ既知ノ場合

$N = k + l$ ト置キ、$y_1, y_2, \cdots, y_l$ ヲ $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_N$ ト書クコトトシタ上デ、定理ニニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = -1 + \xi$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_N = \frac{k}{N-k} + \xi$$

ト置クト

$$N\,{}_{\xi}S_a^2 = k + (N-k)\left(\frac{k}{N-k}\right)^2 = \frac{Nk}{N-k}$$

トナルカラ

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \xi)(a_i - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{k} (x_i - \xi) + \frac{k}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} (x_{k+i} - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{-k(\bar{x}_1 - \xi) + k(\bar{x}_2 - \xi)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \sqrt{\frac{k}{N-k}}}$$

$$= \frac{k(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{N \cdot {}_{\xi}S_x \sqrt{\frac{k}{N-k}}}$$

即チ

$$\gamma = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{{}_{\xi}S_x \sqrt{\frac{N^2}{k(N-k)}}}$$

但シ　$\overline{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i$ ，　$\overline{x}_2 = \frac{1}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k} x_{k+i}$

ヲ得ル。ソコデ $\overline{x}_1$ ヲ $\overline{x}$ ト書キ，$\overline{x}_2$ ヲ $\overline{y}$ ト書キ改メ

且　$N_\xi S_x^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\xi) = \sum_{i=1}^{k}(x_i-\xi)^2+\sum_{i=1}^{l}(y_i-\xi)^2$

$= kS_1^2+lS_2^2$ ト書クナラバ

$$r = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{kS_1^2+lS_2^2}\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{1}{l}}} \qquad (42)$$

但シ $kS_1^2 = \sum_{i=1}^{k}(x_i-\xi)^2$,　　$lS_2^2=\sum_{i=1}^{l}(y_i-\xi)^2$

ヲ得ル、コレガ所要ノ r デアル。コノ r ハ自由度 $N-1$ ノ r－分布ヲナス

(II) 母集団平均 ξ ガ未知ノ場合

(I) ノ場合ト同様デアルガ，コノ場合ニハ

$$a_1=a_2=\cdots=a_k=-1$$

$$a_{k+1}=a_{k+2}=\cdots a_N=\frac{k}{N-K}$$

$$N\overline{x}=\sum_{i=1}^{k}x_i+\sum_{i=1}^{N-k}x_{k+i}$$

ト置ク、サウスルト

$$\overline{a}=0 \qquad NS_a^2 = k+(N-k)\left(\frac{k}{N-k}\right)^2=\frac{Nk}{N-k}$$

トナルカラ r トシテハ

$$r = \frac{-\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})+\frac{k}{N-k}\sum_{i=1}^{N-k}(x_{k+i}-\overline{x})}{N\cdot S_x\cdot S_a}$$

$$= \frac{-k(\bar{x}_1 - \bar{x}) + k(\bar{x}_2 - \bar{x})}{N \cdot S_x \cdot S_a}$$

$$= \frac{k(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{N \cdot S_x \sqrt{\frac{k}{N-k}}}$$

但シ $\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_i \\ \bar{x}_2 = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_{k+i} \end{cases}$

ヲ得、ココデ $NS_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{l} (y_i - \bar{x})^2$$

$= kS_1^2 + lS_2^2$ ト置キ、$N-k$ ヲ l、$\bar{x}_1$ ヲ $\bar{x}$、$\bar{x}_2$ ヲ $\bar{y}$ ト書キ直スナラバ

$$r = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{kS_1^2 + lS_2^2}\sqrt{\frac{1}{k} + \frac{1}{l}}} \qquad (43)$$

但シ $kS_1^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2$

$$lS_2^2 = \sum_{i=1}^{l} (y_i - \bar{x})^2$$

$$(k+l)\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{l} y_i$$

トナル、コレガ所要ノ r デ、コノ r ハ自由度 $N-2$ ノ rー分布ヲナス。

今ノ場合ニ對スル所謂 t ー検定ハ

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s\sqrt{\frac{1}{k} + \frac{1}{l}}}$$

但シ
$$s^2 = \frac{(k-1)s_1^2 + (l-1)s_2^2}{k+l-2},$$

$$s_1^2 = \frac{1}{k-1}\Sigma(x_i - \bar{x})^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{l-1}\Sigma(y_i - \bar{y})^2$$

ヲ用ヒル。γ ー検定トノ主要ナチガヒハ，s_1，s_2 ノ取リ方ニアル。t ー検定デハ s_1 ハ $x_1, x_2, \cdots, x_k$ ノ平均 $\bar{x}$ ノ周リニ於ケル見本標準偏差，s_2 ハ $y_1, y_2, \cdots, y_l$ ノ平均 $\bar{y}$ ノ周リニ於ケル標準偏差デアルノニ對シテ，γ ー検定デハ s_1，s_2 ハ $x_1, x_2, \cdots, x_k, y_1, y_2, \cdots, y_l$ ノ全部ノ平均 $\bar{x}$ ノ周リニ於ケル各見本ノ標準偏差デアル。

§10. $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ ノ顕著性検定

$x_1, x_2, \cdots, x_N$ ヲ同一ノ正規母集団カラ取ツタ射倖見本トスル時，或一群ノ平均 $\bar{x}_1$ ガ他ノ一群ノ平均 $\bar{x}_2$ ト著シクカケハナレテヰルカドウカトイフコト即チ $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ ノ顕著性ノ検定ニ用ヒ得ベキ γ ハ次ノヤウニシテ定メラレル。

~~$x_1, x_2, \cdots, x_N$ ハ何等カノ順序（大サノ順序，~~
或ハ觀察ノ順序，或ハ他ノ何カノ順序）ニ列ベラ

レ~~テアルモノトシ、従ッテ x_i ハソノ順序ニ於テ第~~

三番目~~ノ値ヲ表スモノトスルトソシテ~~比較ショウトスル平均 $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ハソレゾレ

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i , \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l} x_{k+1}$$

$$k + l \leqq N$$

デアルトスル。

(I) 母集団標準偏差 σ ハ未知又ハ既知デ，平均 ξ ガ既知ノ場合

定理二ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots a_k = -1+\xi$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots\cdots = a_{k+l} = \frac{k}{l}+\xi$$

$$a_{k+l+1} = a_{k+l+2} = \cdots\cdots = a_N = \xi$$

ト置クト

$$N\cdot {}_{\xi}S_a^2 = k + l\left(\frac{k}{l}\right)^2 = \frac{k(k+l)}{l}$$

トナリ，

$$r = \frac{-\sum_{i=1}^{k}(x_i-\xi)+\frac{k}{l}\sum_{i=1}^{l}(x_{k+i}-\xi)}{N\cdot {}_{\xi}S_x\cdot {}_{\xi}S_a}$$

$$= \frac{-k(\bar{x}_1-\xi)+k(\bar{x}_2-\xi)}{N\cdot {}_{\xi}S_x\cdot {}_{\xi}S_a} = \frac{k(\bar{x}_2-\bar{x}_1)}{N\cdot {}_{\xi}S_x\sqrt{\frac{k(k+l)}{Nl}}}$$

$$= \frac{\bar{x}_2-\bar{x}_1}{{}_{\xi}S_x\sqrt{\frac{N(k+l)}{kl}}}$$

即チ

$$\gamma = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{{}_\xi S_x \sqrt{\frac{N(k+l)}{k\,l}}} \qquad (44)$$

但シ $N \cdot {}_\xi S_x^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \xi)^2$

ヲ得ル、コレガ所要ノγデ，コノγハ自由度$N-1$ノγ－分布ヲナス。

(II) 母集団標準偏差σハ既知又ハ未知デ母集団平均ξガ未知デアル場合

定理一ニ於テ

$$a_1 = a_2 = \cdots\cdots = a_k = -1$$

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots\cdots = a_{k+l} = \frac{k}{l}$$

$$a_{k+l+1} = a_{k+l+2} = \cdots\cdots = a_N = 0$$

ト置ケバ

$$\bar{a} = 0, \quad N S_a^2 = k + l\left(\frac{k}{l}\right)^2 = \frac{k(k+l)}{l}$$

トナリ

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})(a_i - \bar{a})}{N \cdot S_x \cdot S_a} = \frac{-\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}) + \frac{k}{l}\sum_{i=1}^{l}(x_{k+i} - \bar{x})}{N \cdot S_x \cdot S_a}$$

$$= \frac{-k(\bar{x}_1 - \bar{x}) + k(\bar{x}_2 - \bar{x})}{N \cdot S_x \sqrt{\frac{k(k+l)}{N\,l}}} = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S_x \sqrt{\frac{N(k+l)}{k\,l}}}$$

即チ

$$\gamma = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{S_x \sqrt{\frac{N(k+l)}{k\,l}}} \qquad (45)$$

但シ $NS_x^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$

ヲ得ル、コレガ所要ノχデ，コノχハ自由度$N-2$ノχ－分布ヲナス。

本節ニ於テ$k+\ell=N$ト置イタ場合ガ前節ノ場合ニ外ナラナイ。

附記　χ－分布及ビχ－検定ニ聯関シテ種々ノ問題ガ考ヘラレルガ、ソレ等ニツイテハ次ノ機會ニ述ベル。殊ニ実用上ノ問題及ビ回帰ニ関スル問題ハ成ルベク早イ機会ニ発表シタイト思ッテイル。