１８．領域假說檢定ノ理論（其三）

兼任所員　伏藤良一郎

（承前）

$p\{E\in w\mid\theta\}$ ヲ θ ノ函数ト考ヘルトキ，ソレガ θ ニツイテ二回微分可能ナ單調増加（減少）函数デアルナラバ，方程式

$$p\{E\in w\mid\theta_0\}=\alpha \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^2 p\{E\in w\mid\theta\}}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0}=0 \tag{2}$$

ヲ満足サセルヤウナ領域 w ノ中カラ w_0 ヲ

$$\left.\frac{\partial p\{E\in w_0\mid\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}\geqq\left.\frac{\partial p\{E\in w\mid\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} \tag{3}$$

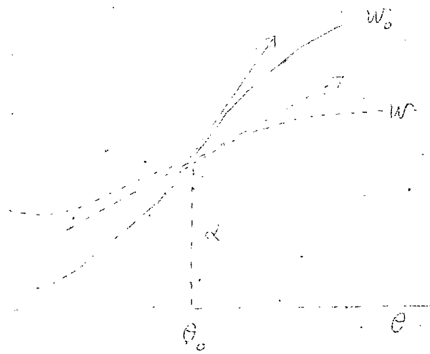
又ハ

$$\left.\frac{\partial p\{E\in w_0\mid\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}\leqq\left.\frac{\partial p\{E\in w\mid\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} \tag{4}$$

ガ成立ツヤウニ選ンデコレヲ合格圏トスルコトモ一ツノ方法デアラウ

コノ構想ハ幾何学的ニイヘバ，θ ノ函数ト考ヘタ $p\{E\in w\mid\theta\}$ ノ図表ガ $\theta=\theta_0$ ニ於テ長サガ α ニ等シイ縦線ヲ有スルト同時ニ彎曲点ヲ有スルヤウニ領域 w ヲ構成シ，コノヤウナ領域ガ唯一ツニ

限ラナイトキニハソノ中カラ彎曲点ニ於ケル切線ノ勾配ノ最モ大キナモノ（最モ小サナモノ）ヲ選ブトイフコトニアル。（図参照）コノヤウニシテ決定サレタ領域W_0ヲ合格圏トシテ用ヒルナラバ$\theta=\theta_0$ノ近傍ニアルθ_0ヨリ大キナ（小サナ）θノ値ニ對應スル母集團ヲ合格サセル確率ハ等式(1), (2)ヲ満足サセル他ノ如何ナルWヲ用ヒタトキヨリモ大キク（小サイ），θ_0ヨリ小サナ（大キナ）θノ値ニ對應スル母集団ヲ合格サセル確率ハ等式(1), (2)ヲ満足サセル他ノ如何ナルWヲ用ヒタトキヨリモ小サイ（大キイ）トイフ特性ガアル。又(1), (2)ヲ満足サセルヤウナ領域Wヲ合格圏ニ取ルトイフコトハ$\theta=\theta_0$ノ近傍ニ於ケルθノ値ニ對応スル母集団ヲ合格サセル変化ヲ急激ニショウトスル意図ニ外ナラナイ。



コノヤウニ考ヘテ来ルト，上述ノヤウナ領域W_0ヲ定メルトイフ問題ヲ解クコトハ必ズシモ無益デ

ハナイデアラウ、トコロデコノヤウナ問題ヲ解クニハ次ニ述ベル定理ガ或ル場合ニ役立タウ。

定理1

$$P\{E\in w|\theta\}=\int\int_w\cdots\int p(E|\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (5)$$

デアルヤウナ負ナラザル函数 $p(E|\theta)$ ガ存在シテ，コノ函数

$$\frac{\partial P\{E\in w|\theta\}}{\partial\theta}=\int\int_w\cdots\int\frac{\partial}{\partial\theta}p(E|\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 P\{E\in w|\theta\}}{\partial\theta^2}=\int\int_w\cdots\int\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}p(E|\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (7)$$

ヲ満足サセルナラバ，(1) 及ビ (2) ヲ満足サセル領域 w ノ中カラ一ツノ領域 w_0 ヲ，ソノ内部デハ到ル点ニ於テ

$$p'(E|\theta_0)\geqq k_1p(E|\theta_0)+k_2p''(E|\theta_0) \qquad (8)$$

ガ成立チ，外部デハ到ル点ニ於テ

$$p'(E|\theta_0)\leqq k_1p(E|\theta_0)+k_2p''(E|\theta_0) \qquad (9)$$

デアルヤウニ定メルナラバ (3) ガ成立ツ。ココニ $p'(E|\theta_0)$，$p''(E|\theta_0)$ ハソレゾレ

$\left.\dfrac{\partial p(E|\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$ 、$\left.\dfrac{\partial^2 p(E|\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$ ヲ表シ

k_1, k_2 ハソレゾレ(1)及ビ(2)ガ成立ツヤウニ定ムベキ定数デアル。

証明ハ次ノ通リデアル。

$$\iint_{w}\cdots\int p'(E|\theta)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n-\iint_{w}\cdots\int p'(E|\theta)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$=\iint_{w_0-w_0w}\cdots p'(E|\theta)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n-\iint_{w-w_0w}\cdots\int p'(E|\theta)\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

$$\geqq\iint_{w_0-w_0w}\cdots\int\{k_1 p(E|\theta)+k_2 p''(E|\theta)\}\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$
$$-\iint_{w-w_0w}\cdots\int\{k_1 p(E|\theta_0)+k_2 p''(E|\theta_0)\}\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

[(8),(9)ニヨル]

$$\geqq\iint_{w_0}\cdots\int\{k_1 p(E|\theta_0)+k_2 p''(E|\theta)\}\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$
$$-\iint_{w}\cdots\int\{k_1 p(E|\theta)+k_2 p''(E|\theta)\}\,dx_1 dx_2\cdots dx_n$$

[(1),(2)ニヨル]

依ッテ

$$\left.\frac{\partial P\{E\in w_0|\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}\geqq\left.\frac{\partial P\{E\in w|\theta\}}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}$$

即チ証明サレタ。

定理 2　定理1ニ於テスベテノ不等號ノ向キヲ変更シタモノモ成立ツ。

證明ハ定理1ノ證明ニ於テ不等號ノ向キヲ変更スルダケノコトデアル。

注意　若シ

$$\frac{\partial \log p(E/\theta)}{\partial \theta} = \varphi_1(\theta), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \varphi_2(\theta)$$

トオクナラバ，定理1ニ於ケル不等式(8)及ビ(9)ハソレゾレ次ノヤウニ書ケル．

$$\varphi_1(\theta_0) \geqq k_1 + k_2\{\varphi_2(\theta_0) + \varphi_1^2(\theta_0)\} \qquad (10)$$

$$\varphi_1(\theta_0) \leqq +k_1 + k_2\{(\varphi_2(\theta_0) + \varphi_1^2(\theta_0)\} \qquad (11)$$

何トナレバ

$$p'(E/\theta) = \varphi_1(\theta)\, p(E/\theta)$$

$$p''(E/\theta) = \{\varphi_2(\theta) + \varphi_1^2(\theta)\}\, p(E/\theta)$$

デアルカラデアル，(8),(9)ノ代リニ(10),(11)ヲ用ヒレバ時ニ計算ノ簡單ニナルコトガアル。

次ニ上述ノ定理ノ應用例ヲ擧ゲヨウ。

例1. 前ニ用ヒタ例

$$p\{E \in w / \xi\} = \iint \cdots \int_w \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\Sigma (x_i - \xi)^2}{2}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad (12)$$

ヲ取ルコトニスルト，コレハ(6),(7)ヲ満足サ

セルカラ

$$\varphi_1(\xi)=\Sigma(x_i-\xi)=n(\bar{x}-\xi)\ ,$$

$$\varphi_2(\xi)=-n.$$

コノコトニ注意スルト，求メルトコロノ領域 w_0 ハ，不等式

$$n(\bar{x}-\xi_0)\geqq k_1+k_2\{-n+n^2(\bar{x}-\xi_0)^2\} \qquad (13)$$

ニヨツテ定義サレル．ココニ ξ_0 ハ ξ ノ格段ナ値ヲ表ス．

故ニ

$$p\{E\in w_0|\xi_0\}=\iint_{w_0}\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_0)^2}{2}}dx_1dx_2\cdots\cdots dx_n=\alpha \qquad (14)$$

$$\left.\frac{\partial^2 p\{E\in w_0|\xi_0\}}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}=\iint_{w_0}\cdots\int\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{\Sigma(x_i-\xi_0)}{}}\right\}_{\xi=\xi_0}dx_1dx_2\cdots dx_n=0 \qquad (15)$$

トナルヤウニ（13）ニ於ケル定数 k_1，k_2 ヲ定メルコトガ出来レバ，所要ノ w_0 ハ完全ニ定マル．トコロデ（14），及ビ（15）ハソレゾレ次ノヤウニ書ケル．

$$\iint_{w_0}\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n(\bar{x}-\xi_0)^2+\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{2}}dx_1dx_2\cdots dx_n=\alpha。 \qquad (16)$$

$$\iint_{w_0}\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n(\bar{x}-\xi_0)^2+\sum(x_i-\bar{x})^2}{2}}$$

$$\left\{-n+n^2(\bar{x}-\xi_0)^2\right\}dx_1dx_2\cdots dx_n=0 \qquad (17)$$

シカシ（17）ハ（16）ヲ用ヒルト次ノヤウニ書ケル

$$n\iint_{w_0}\cdots\int\left(\frac{6}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{n(\bar{x}-\xi_0)^2+\sum(x_i-\bar{x})^2}{2}}(\bar{x}-\xi_0)^2$$

$$dx_1dx_2\cdots dx_n=\alpha \qquad (18)$$

今 $\sqrt{n}(\bar{x}-\xi_0)=u$ トオクトキハ，W_0 ヲ定義スル不等式（13）ハ

$$\sqrt{n}\,u\geqq k_1+nk_2(u^2-1) \qquad (19)$$

ト書クコトが出来，（16），（17）ハヨク知ラレタ変数変換ニヨレバソレゾレ

$$\int_{w_0'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\alpha \qquad (20)$$

$$\int_{w_0'}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du=\alpha \qquad (21)$$

ト書クコトが出来ル．ココニ W_0' ハ（19）デ定義サレタ変数 u ノ區域ヲ表ス．

サテ方程式

$$nk_2u^2-\sqrt{n}\,u+(k_1-nk_2)=0 \qquad (22)$$

ノ二実根（（17）が如何ナル場合ニ実根ヲ有スル

1

カハ後デ吟味スルコトシテ，α_2 トシ $\lambda_1 < \lambda_2$ トスルト（19）ハ

$$\lambda_1 \leqq u \leqq \lambda_2$$

デ表サレルカラ，（20），（21）ハソレゾレ次ノヤウニ書ケル

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1}^{\alpha_2} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \alpha \tag{23}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \alpha \tag{24}$$

トコロデ，（23）ト（24）カラ

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\lambda_1}^{\alpha_2} (1-u^2)\, e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 0 \tag{25}$$

ガ得ラレ，コノ左辺ノ被積分函数ハ $u < -1$ 及ビ $u > +1$ ニ対シテハ負トナリ，$- \leqq u \leqq +1$ ニ対シテハ負トナラナイノミナラズ，

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-u^2)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty}(1-u^2)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}(1-u^2)\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = 0 \tag{26}$$

デアルコトカラ，

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+1}(1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+1}^{+\infty}(1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1}(1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$
$$=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{0}(1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (28)$$

ヲ得ル故積分

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{+1-t}^{+1+\varphi(t)}(1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}du \text{ 及ビ } \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1-\varphi(t)}^{-1+t}(1-u^2)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

ニ於テ $\varphi(t)$ ヲ

$$\varphi(0)=0, \qquad \varphi(1)=+\infty$$

デアルヤウナ単調増加函数トスルト，(23)，(24) ヲ同時ニ満足サセル λ_1，λ_2 ノ値ハ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{+1-t}^{+1+\varphi(t)}e^{-\frac{1}{2}u^2}du=\alpha\\&\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{+1-t}^{+1+\varphi(t)}(1-u^2)e^{-\frac{1}{2}u^2}du=0\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

ヲ満足サセルヤウナ t ノ値又ハ

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1-\varphi(t)}^{-1+t} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = \alpha \\ &\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1-\varphi(t)}^{-1+t} (1-u^2)\,e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

ヲ同時ニ満足サセルヤウナ t ノ値ヲ求メルコトニ帰スル。

但シ $0 \leqq t \leqq 1$ デアル。

今

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{1-t}^{1+\varphi(t)} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = g_1(t)$$

トオケバ、

$$g_1(0) = \alpha, \qquad g_1(1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = 1$$

デアルシ又

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1-\varphi(t)}^{-1+t} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du = g_2(t)$$

トオケバ、

$$g_2(0) = 0, \qquad g_2(1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du \doteqdot 1$$

デアルカラ、(29)′ 或ハ (30) ヲ満足サセルヤウナ t ノ値ハ必ズ求メラレル，ソレデ

$$g_1(t) = \alpha \quad \text{又ハ} \quad g_2(t') = \alpha \qquad (31)$$

デアルヤウナ t' ヲ求メテ

$$\lambda_1' = 1 - t', \qquad \lambda_2' = 1 + \varphi(t')$$

トスルカ又ハ

$$\lambda_1'' = -1 - \varphi(t) \qquad \lambda_2'' = -1 + t'$$

トスルナラバ λ_1', λ_2' 又ハ λ_1'', λ_2'' ガ必要ノ値デアル, 従ッテ求メル領域ハ,

$$\lambda_1' \leqq \sqrt{n}(\bar{x} - \xi_0) \leqq \lambda_2' \qquad (32)$$

又ハ

$$\lambda_1'' \leqq \sqrt{n}(\bar{x} - \xi_0) \leqq \lambda_2'' \qquad (33)$$

デアル.

(25), (26) ハソレゾレ次ノヤウニ書イテモヨイ.

$$\xi_0 + \frac{\lambda_1'}{\sqrt{n}} \leqq \bar{x} \leqq \xi_0 + \frac{\lambda_2'}{\sqrt{n}} \qquad (32')(25')$$

$$\xi_0 + \frac{\lambda_1''}{\sqrt{n}} \leqq \bar{x} \leqq \xi_0 + \frac{\lambda_2''}{\sqrt{n}} \qquad (33')(26')$$

ココニ注意スベキハ λ_1', λ_2' ハ何レモ正ノ数値デアリ, λ_1'', λ_2'' ハ何レモ負ノ数値デアルトイフコトデアル.

以上デ所要ノ領域 w_0 ガ求メラレタノデアルガ, (25') 或ハ (26') デ定義サレタ領域 w_0 ニツイテ確率 $P\{E \in w_0 | \xi\} \equiv \beta(\xi | w_0)$ ヲ考ヘ, コレヲ

ξ ノ函数ト考ヘルト $\beta(\xi|w_0)$、即チ w_0 ノ ξ ニ関スル検定力函数ハドノヤウナ変化ヲスルカ、少シク立入ッテシラベテミヨウ。

$$\beta(\xi|w_0) = p\{E \in w_0|\xi\}$$
$$= \iint_{w_0}\cdots\int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\{n(\bar{x}-\xi)^2+\sum(x_i-\bar{x})^2\}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$
$$= \int_{\xi_0+\frac{\lambda'_1}{\sqrt{n}}}^{\xi_0+\frac{\lambda'_2}{\sqrt{n}}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(\bar{x}-\xi)^2}{2}} d\bar{x} \qquad (34)$$

$$\frac{\partial\beta(\xi|w_0)}{\partial\xi} \equiv \frac{\partial p\{E\in w_0|\xi\}}{\partial\xi}$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\frac{n(V_2-\xi)^2}{2}} - e^{-\frac{n(V_1-\xi)^2}{2}}\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(V_2-\xi)^2}{2}}\left\{1 - e^{-\frac{n}{2}(V_2-V_1)\times(V_2+V_1-2\xi)}\right\}$$

但シ $V_1 = \xi_0 + \frac{\lambda'_1}{\sqrt{n}}$, $V_2 = \xi_0 + \frac{\lambda'_2}{\sqrt{n}}$ デアルトナルカラ

$$\frac{\partial p\{E\in w_0|\xi\}}{\partial\xi} = 0 = 1 - e^{-\frac{n}{2}(V_2-V_1)(V_2+V_0-2\xi)}$$

ナラシメル ξ ノ値ハ明ニ

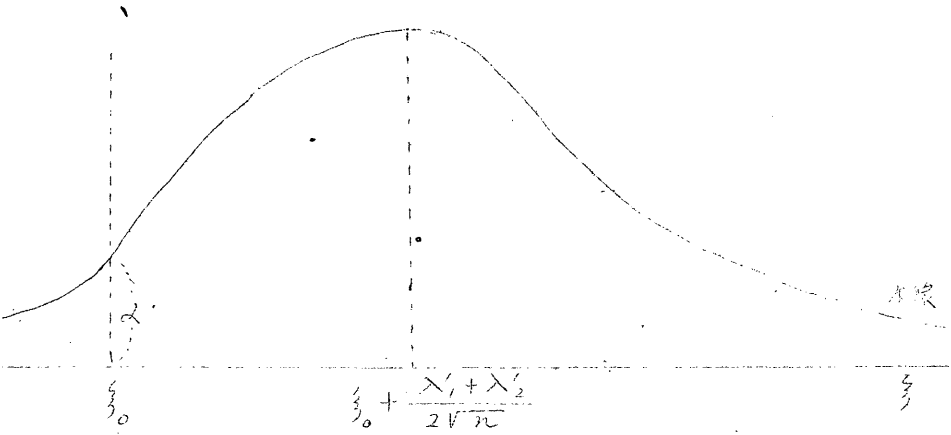
$$\xi = \frac{V_2 + V_1}{2} = \xi_0 + \frac{\alpha'_1 + \lambda'_2}{2\sqrt{n}}$$

トナリ、コノトキ $p\{E \in W_0 \mid \xi\}$ ガ極大而カモ最大トナルコトハ容易ニ知ラレル.

ソレ故 W_0 トシテ

$$\xi_0 + \frac{\lambda'_2}{\sqrt{n}} \leqq \overline{x} \leqq \xi_0 + \frac{\lambda'_2}{\sqrt{n}}$$

ヲ取ルトキハ ξ ノ函数トシテ見タ $p\{E \in W_0 \mid \xi\}$ ノ変化ハ次ノヤウニナル、



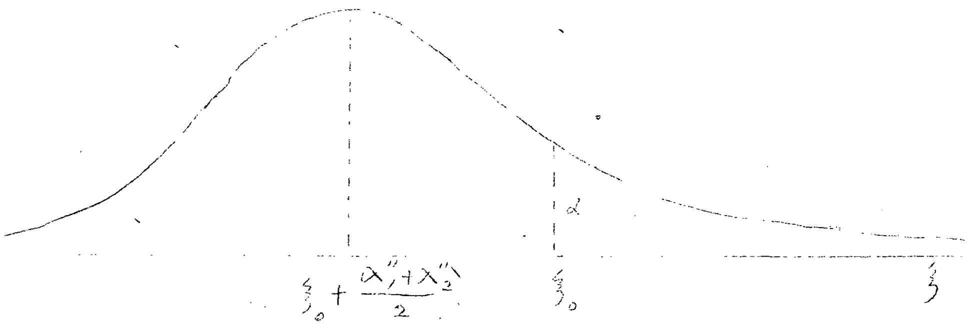
コノ曲線ハ $\xi = \xi_0$ ニ於テ変曲点ヲ有シ且 α ニ等シイ縦線ヲ有スルガ $\xi = \xi_0 + \frac{\alpha'_1 + \lambda'_2}{2\sqrt{n}}$ ニ於テ極大点ヲ有シ，コノ点ヲ過ギルト縦線ハ小サクナルカラ．

$\xi_1 < \xi_2$ デアルカラトイッテ必ズシモ

$$P\{E \in w_0 \mid \xi_1\} < P\{E \in w_0 \mid \xi_2\}$$

トハナラナイ，

w_0 ガ(33)又ハ(33')デ定義サレテヰルトキモ，上ト同様ニシテ $\xi = \xi_0 + \frac{\lambda_1'' + \lambda_2''}{2\sqrt{n}}$ ノトキニ $P\{E \in w_0 \mid \xi\}$ ハ極大（最大）トナリ，$\xi = \xi_0$ ニ於テ変曲点ヲ有シ且ツ α ニ等シイ縦線ヲ有スル，ソノ様子ヲ図示スレバ次ノヤウニナル。



ソレ故(33)又ハ(33')デ定義サレタ領域 w_0 ヲ取ルト，$\xi_1 < \xi_2$ デアルカラトイツテ必ズシモ

$P\{E \in w_0 \mid \xi_1\} > P\{E \in w_0 \mid \xi_2\}$ ハ成立タナイ．

唯ダ

$$-\infty < \xi < \frac{\lambda_1' + \lambda_2'}{2\sqrt{n}} + \xi_0 \text{ ノ範囲ニ於テハ}$$

$$\xi_0 + \frac{\lambda_1'}{\sqrt{n}} \leqq \bar{x} \leqq \xi_0 + \frac{\lambda_2'}{\sqrt{n}}$$

デ定義サレタ領域 W_0 ハ

$\xi_2 > \xi_1$ ニ対シテ $p\{E \in W_0 \mid \xi_2\} > p\{E \in W_0 \mid \xi_1\}$

デアル上ニ，$\xi = \xi_0$ ノ近傍ニ於テハ，$\xi > \xi_0$ ナル如キ ξ ノ値ニ對シテハ $p\{E \in W_0 \mid \xi\} > p\{E \in W \mid \xi\}$ デアルカラ，W_0 ヲ合格圏ニ採レバ他ノ領域 W ヲ採ッタ時ヨリモ大キナ確率ヲ以テ $\xi > \xi_0$ ナル母集団ヲ合格サセ，$\xi < \xi_0$ ナル如キ母集団ヲ他ノ領域 W ヨリモ小サナ確率ヲ以テ合格サセルシ，又

$\frac{\lambda_1'' + \lambda_2''}{2\sqrt{n}} + \xi < \xi < +\infty$ ナル範囲ニ於テハ

$$\xi_0 + \frac{\lambda_1''}{\sqrt{n}} \leqq \bar{x} \leqq \xi_0 + \frac{\lambda_2''}{\sqrt{n}}$$

デ定義サレタ領域 W_0 ハ

$\xi_2 > \xi_1$ ニ對シテ $p\{E \in W_0 \mid \xi_0\} < p\{E \in W_0 \mid \xi_1\}$

デアル上ニ，$\xi = \xi_0$ ノ近傍ニ於テハ $\xi > \xi_0$ ナル如キ ξ ノ値ニ對シテハ $p\{E \in W_0 \mid \xi\} > p\{E \in W \mid \xi\}$ デアルカラ，W_0 ヲ合格圏トシテ採レバ他ノ領域 W ヲ採ッタ時ヨリモ大キナ確率ヲ以テ $\xi > \xi_0$ ナル母集団ヲ合格サセ，$\xi < \xi_0$ ナル如キ母集団ヲ，他ノ領域 W_0 ヨリモ小サナ確率ヲ以テ合格サセル。コノヤウナ譯デアルカラ，若シ ξ ノ値ガ上述ノヤウナ範囲ノ何レカニアルコトガ何等カノ根據デワカッテヰルナラバ，(32) 又ハ (33) ノ何レカデ

定義サレタ領域 w_0 ガ合格圏トシテ適当ナルモノト考ヘラレルデアラウ。

例二，コノ場合ニモ，前ニ用ヒタ例

$$p\{E\in w\mid\sigma\}=\iint_{w}\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{n}e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

ヲ取ルコトトスルト，コレハ（6）;（7）ヲ満足サセルカラ

$$\varphi=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum x_i^2}{\sigma},\qquad \varphi_2=\frac{n}{\sigma^2}-\frac{3\sum x_i^2}{\sigma^4}\qquad(35)$$

ナルコトニ注意スルト，求メルトコロノ領域 w_0 ハ，不等式

$$\varphi_1(\sigma_0)\geqq k_1+k_2\left(\varphi_2(\sigma_0)+\varphi_2(\sigma_0)+\varphi_1^2(\sigma_0)\right)\qquad(36)$$

デ定義出来ル，但シココデハ

$$\left.\frac{\partial p\{E\in w_0\mid\sigma\}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}\leqq\left.\frac{\partial p\{E\in w\mid\sigma\}}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_0}\qquad(37)$$

ヲ満足サセルヤウニ w_0 ヲ定メルコトトスル，ソレハ実用的見地カライッテ σ ノ値ノ小ナル母集団ヲ大ナルモノヨリモ大キナ確立デ合格サセルコ

トヲ望ム場合ガ多イト思フカラデアル。

今 $\sum\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2 = \chi^2$ ト置ケバ，(35)ハ

$$\varphi_1(\sigma_0) = -\frac{n}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma}\chi^2, \quad \varphi_2(\sigma_0) = \frac{n}{\sigma_0^2} - \frac{3}{\sigma_0^2}\chi^2$$

ト書ケルカラ，不等式(36)ハ次ノヤウニ書ケル

$$-\frac{n}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0}\chi^2 \leqq k_1 + k_2\left\{\frac{n}{\sigma_0^2} - \frac{3}{\sigma_0^2}\chi^2 + \left(\frac{1}{\sigma_0}\chi^2 - \frac{n}{\sigma_0}\right)^2\right\}$$

即チ

$$k_2\chi^4 - (\sigma_0 + 3k_2 - 2n)\chi^2 + n\sigma_0 + k_1\sigma_0^2 + nk_2 + n^2 \geqq 0 \quad (38)$$

(38)ヲ χ^2 ニ関スル二次方程式ト考ヘタトキノ実根ヲ λ_1, λ_2 トシ且 $\lambda_1 < \lambda_2$ トスレバ(38)ハ $k_2 > 0$ ナル如ク k_2 ノ値ヲ定メルコトニスレバ

$$\chi^2 \leqq \lambda_1 \quad \text{及ビ} \quad \chi^2 \geqq \lambda_2 \quad (39a)$$

$k_2 < 0$ ナル如ク k_2 ノ値ヲ定メルコトニスレバ

$$\lambda_1 \leqq \chi^2 \leqq \lambda_2 \quad (39b)$$

デ表セル

トコロデ

$$P\{E \in w_0 \mid \sigma_0\} = \iint_{w_0}\cdots\int\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma_0^2}} \, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \alpha \quad (40)$$

$$\left.\frac{\partial^2 p\{E \in w_0 \mid \sigma\}}{\partial \sigma^2}\right|_{\sigma=\sigma_0} = \iint_{w_0}\cdots\int \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{\Sigma x_i^2}{2\sigma_0^2}}\right\} dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = 0 \qquad (41)$$

ハ W_0 ヲ (26α) ノヤウニ取ルナラバ結局ソレゾレ

$$\int_0^{\lambda_1} p(\chi^2)\, d(\chi^2) + \int_{\lambda_2}^{+\infty} p(\chi^2)\, d(\chi^2) = \alpha \qquad (42)$$

$$\int_0^{\lambda_1}\left\{\frac{n}{\sigma_0^2} - \frac{3}{\sigma_0^2}\chi^2 + \left(\frac{1}{\sigma_0}\chi^2 - \frac{n}{\sigma_0}\right)^2\right\} p(\chi^2)\, d(\chi^2)$$
$$+ \int_{\lambda_2}^{+\infty}\left\{\frac{n}{\sigma_0^2} - \frac{3}{\sigma_0^2}\chi^2 + \left(\frac{1}{\sigma_0}\chi^2 - \frac{n}{\sigma_0}\right)^2\right\} p(\chi^2)\, d\chi^2) = 0 \qquad (43)$$

但シ

$$p(\chi^2) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \qquad (44)$$

(42) ハ更ニ次ノヤウニ書ケル

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\chi^2)\, d(\chi^2) = 1 - \alpha \qquad (45)$$

又 (43) ハ

$$\frac{n}{\sigma_0^2}(1+n)\left\{1 - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\chi^2)\, d(\chi^2)\right\} - \frac{1}{\sigma_0^2}(3+2n)$$
$$\left\{n - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \chi^2 p(\chi^2)\, d(\chi^2)\right\} + \frac{1}{\sigma_0^2}\left\{n(n+2) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \chi^4 p(\chi^2)\, d(\chi^2)\right\} = 0$$

即チ

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \chi^4 p(\chi^2)\,d(\chi^2) - (3+2n)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \chi^2 p(\chi^2)\,d(\chi^2) = n(1+n)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\chi^2)\,d(\chi^2) \qquad (46)$$

ト書ケルガ，(44) ヲ代入スレバ

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\chi^2)^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d(\chi^2) - (3+2n)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\chi^2)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d(\chi^2) = n(n+1)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}}\,d(\chi^2) \qquad (47)$$

(45)，(47) ヲ満足サセルヤウナ λ_1，λ_2 ヲ求メルニハ如何ニスルカ，今ノトコロ筆者ニハソノ一般的ナ手段ヲ知ラナイガ，コレヲ求メラレタトスルナラバ※，所要ノ領域 w_0 ハ

$$\sum x_i^2 \leqq \lambda_1 \sigma_0^2 \quad 及ビ \quad \sum x_i^2 \geqq \lambda_2 \sigma_0^2 \qquad (48)$$

デ定義サレル．

サテコノヤウニ定義サレタ w_0 ニ対シテ

$$P\{E \in w_0 \mid \sigma\}$$

ハ σ ノ変動スルニ伴ツテ如何ニ変動スルデアラウカ，$\sigma = \sigma_0$ ノ近処ニ於ケル変動ノ状況ハ w_0 ノ

※コノヤウナ λ_1，λ_2 ノ存在スルコトハ後ニコレヲ示ス

性質カラ明白デアルガ，$\sigma=\sigma_0$ ヲ離レタトコロデハドウイウ状況ヲ呈スルカ，ソレヲ次ニ調ベテミヨウ、

トコロデ上ノ確率ハ

$$P\{E\in w_0|\sigma\}=1-\underset{\lambda_1\sigma_0^2\leqq\sum x_i^2\leqq\lambda_2\sigma_0^2}{\iint\cdots\int}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}dx_1\,dx_2\cdots dx_n \tag{49}$$

ト表サレ，コレハ $\sum\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2=\chi^2$ トオケバ

$$P\{E\in w_0|\sigma\}=1-\underset{\lambda_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2\leqq\chi^2\leqq\lambda_2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2}{\iint\cdots\int}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\chi^2}dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$=1-\int_{\lambda_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2}^{\lambda_2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\chi^2}d(\chi^2) \tag{50}$$

トナル

ソレ故若シ σ ガ σ_0 ヨリ大デアッテ増大スルトキハ，(50) ノ右辺ニアル積分ノ値ハ減少スルカラ，$P\{E\in W|\sigma\}$ ノ値ハ増大シ吾々ノ最初ノ目的ニハ添ハナイコトトナル、

若シ W_0 ヲ (26 b) ノヤウニ取ルナラバ，λ_1，λ_2 ハ

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}p(\chi^2)\,d(\chi^2)=\alpha \tag{51}$$

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \chi^4 p(\chi^2)\,d(\chi^2) - (3+2n)\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \chi^2 p(\chi^2)\,d(\chi^2)$$

$$= n(n+1)\alpha \qquad (5\cdot2)$$

ヲ満足サセルヤウニ定メナケレバナラナイ。コノヤウナλ_1，λ_2ノ値ガ求メラレタトスルナラバ※，所要ノ領域w_0ハ

$$\lambda_1\sigma_0^2 \leqq \sum x_i^2 \leqq \lambda_2\sigma_0^2 \qquad (5\cdot3)$$

デ定義サレル．

不等式デ定義シタ領域w_0ニ対スル$p\{E\in w_0 \mid \sigma\}$ヲ$\sigma$ノ函数トシテ考察スルト．

$$p\{E\in w_0 \mid \sigma\} = \underset{\lambda_1\sigma_0^2 \leqq \sum x_i^2 \leqq \lambda_2\sigma_0^2}{\int\int\cdots\cdots\int} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}}$$

$$dx_1\,dx_2\cdots dx_n$$

$$= \underset{\lambda_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2 \leqq \chi^2 \leqq \lambda_2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2}{\int\int\cdots\cdots\int} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\chi^2} dx_1\,dx_2\cdots dx_n .$$

$$\left[\chi^2 = \sum\left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \int_{\lambda_1\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2}^{\lambda_2\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d(\chi^2)$$

トナリ，$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\chi\right)^2 = Z^2$ トオケバ，$\sigma \gtrless \sigma_0$ ナルニ従

※コノ可能ナルコトハ後ニ示ス

ツテ

$$p\{E\in w_0|\sigma\}=\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^n\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(Z^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{\sigma_0^2}{2\sigma^2}Z^2}d(Z^2)$$

$$\lesseqgtr\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^n\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(Z^2)^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}Z^2}d(Z^2)\lesseqgtr\alpha\left(\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)^n \qquad (54)$$

トナル。故ニ次ノコトガイヘル.

i) $\sigma>\sigma_0$ デアル時ハ, $p\{E\in w_0|\sigma\}$ ハ α ヨリモ小デアツテ, σ ノ値ガ増大スルトソレニ伴ツテ減少スル

ii) $\sigma<\sigma_0$ デアル時ハ $p\{E\in w_0|\sigma\}$ ハ α ヨリモ大デアツテ, σ ノ値ガ減少スルトソレニ伴ツテ増大スル.

約言スレバ $p\{E\in w_0|\sigma\}$ ハ σ ノ単調減少函数デアツテ, $\sigma=\sigma_0$ ナルトキニ α ナル値ヲ取リ且コレニ對應スル点ガソノ変動ヲ示ス曲線ノ変曲点トナル.

(58)及ビ(52)ヲ満足サセルヤウニ λ_1, λ_2 ヲ定メルコトノ可能性ハ次ノヤウニシテ知ラレル、即チ(46)ガ(52)ト同値ノモノデアルトイフコ

ト＝注意スレバ，λ_1：λ_2 ハ

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\chi^2)\,d(\chi^2) = \alpha \qquad (55)$$

及ビ

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\{\chi^4-(3+2n)\chi^2-n(n+1)\right\} p(\chi^2)\,d(\chi^2) = 0 \qquad (56)$$

ヲ満足サセルヤウニ定メラルベキデアルトイフコトニナルガ，$p(\chi^2) \geqq 0$ デアッテ

$$\chi^4-(3+2n)\chi^2-n(n+1) \qquad (57)$$

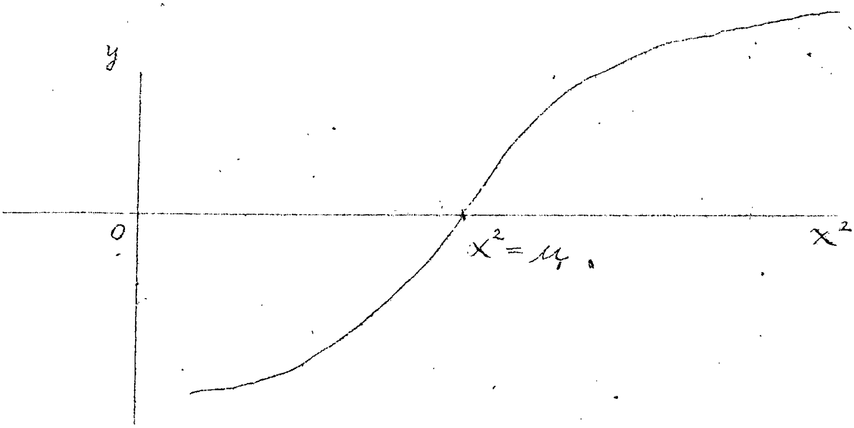
ハ，$0 < \chi^2$ ノ範囲ニ於テハ

$$\chi^2 = \frac{1}{2}\left\{3+2n+\sqrt{(3+2n)^2+n(n+1)}\right\} \text{（}=u\text{ トオカウ）} \qquad (58)$$

ニ對シテノミ零トナリ，u ヨリ小ナル値ニ對シテハ負，u ヨリ大ナル値ニ對シテハ正トナルコトニ注意スルト，（56）ノ被積分項ハ $\chi^2 < u$ ニ対シテハ負トナリ，$\chi^2 > u$ ニ対シテハ正トナルコトガ知ラレル

説明

図的ニ示セバ次ノ図ノヤウニナッテヰル．



尚ホ簡便ノタメニ(56)ノ被積分函数ヲ $\Phi(\chi^2)$ ト書キ且

$$\int_0^{+\infty} p(\chi^2)\,d(\chi^2)=1, \qquad \int_0^{+\infty} \chi^2 p(\chi^2)\,d(\chi^2)=n,$$

$$\int_0^{+\infty} \chi^4 p(\chi^2)\,d(\chi^2) = n(n+2)$$

ナルコトニ注意スルト※

$$\int_0^{+\infty} \Phi(\chi^2)\,d(\chi^2)=\int_0^{u} \Phi(\chi^2)\,d(\chi^2)+\int_u^{+\infty} \Phi(\chi^2)\,d(\chi^2)$$

$$= -2n(n+1) < 0 \qquad (59)$$

トナルカラ

※拙著：数理統計学第334頁ヲ参照サレタシ

$$-\int_0^{u}\Phi(x^2)\,d(x^2) > \int_u^{+\infty}\Phi(x^2)\,d(x^2) \qquad (60)$$

故ニ

$$-\int_0^{u}\Phi(x^2)\,d(x^2) = \int_u^{+\infty}\Phi(x^2)\,d(x^2) \qquad (61)$$

ヲ満足サレルヤウナ値 λ ガ 0 ト u トノ間ニ存在スル筈デアル、ココニ u ハ (46) デ定義シタ点デアル。

今

$$-\int_{u-t}^{u}\Phi(x^2)\,d(x^2) = \int_u^{u+\varphi(t)}\Phi(x^2)\,d(x^2) \qquad (62)$$

ナル如キ t ノ函数 $\varphi(t)$ ヲ考ヘルト

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(u-\lambda) = +\infty \qquad (63)$$

デアッテ、t ノ単調増加函数デアル。

ソレデ積分

$$\int_{u-t}^{u+\varphi(t)} p(x^2)\,d(x^2) = g(t) \qquad (64)$$

ヲ考ヘルト

$$g(0) = 0, \qquad g(u-\lambda) \leqq \int_\lambda^{+\infty} p(x^2)\,d(x^2) \qquad (65)$$

ナルコトガ知ラレ従ッテ

$$\alpha \leqq \int_\lambda^{+\infty} p(x^2)\,d(x^2) \qquad (66)$$

ナラバ，所要ノ λ_1，λ_2 ナル値ガ存在スルトイヘル。

何トナレバ（66）ノ條件ガ成立ツテヰルナラバ

$$\int_{\nu}^{+\infty} p(x^2)\,d(x^2) = \alpha \qquad (67)$$

ヲ満足サセルヤウナ ν ガ求メラレル筈デアルカラ，$\mu-\nu$ ヲ以テ λ_1 トシ，$\mu+\varphi(\nu)$ ヲ以テ λ_2 トスレバ，確ニ（55）ト（56）ガ満足サセラレル。即チ λ_1，λ_2 ノ存在スルコトガ知ラレル。

上ニ見ル通リ $\lambda_1=\mu-\nu$ デ，μ ハ既知，ν ハ（67）ニ依ツテ求メラレルカラ，λ_1 ハ容易ニ定マル。従ツテ積分

$$\int_0^{\lambda_1} x^2 p(x^2)\,d(x^2), \qquad \int_0^{\lambda_1} x^2 p(x^2)\,d(x^2)$$

$$\int_0^{\lambda_1} p(x^2)\,d(x^2)$$

モ亦知ラレル，ソレ故，λ_2 ハ

$$\int_0^{\lambda_2} x^4 p(x^2)\,d(x^2) - (3+2n)\int_0^{\lambda_2} x^2 p(x^2)\,d(x^2)$$

$$= n(n+1)\alpha + \int_0^{\lambda_1} x^4 p(x^2)\,d(x^2) - (3+2n)\int_0^{\lambda_1} x^2 p(x^2)\,d(x^2)$$

即チ

$$\int_0^{\lambda_2} x^4 p(x^2)\,d(x^2) - (3+2n)\int_0^{\lambda_2} x^2 p(x^2)\,d(x^2) = A$$

但シ

$$A = n(n+1)\alpha + \int_0^{\lambda_1} x^4 p(x^2)\,d(x^2) - (3+2n)\int_0^{\lambda_1} x^2 p(x^2)\,d(x^2)$$

ヲ満足サセルヤウニ定メレバヨイ。コノヤウナλ_2ヲ求メル一般的ナ手段ハ今ノトコロ筆者ニハ持合セガナイガ，nノ格段ナ値ニ対シテλ_2ノ近似値ヲ求メルコトハ，サマデ困難デハナイ。