230

~~229~~

19. "ストカスチック"補間法に関する Kolmogroff の論文に就て

（其の一）

所員　坂元平八

宇野利雄博士は本講究録第一巻第五号に"ストカスチック"補間法と題して興味ある論文を発表された。(註1)

此の論文の中に引用されてゐる, A. Kolmogroff, sur l'interpolation et extrapolation des suites stationaires, C. R 208 (1939) の結果は非常に興味あるものであるが証明が省略してあり且此の証明の文献も見当らないので本誌上に筆者に依つて得られた一証明を招介することにする。Kolmogroff に依る証明は恐らく此処に得られたるものよりは見事なるものであらうと

〔註1〕宇野氏の結果は伊藤清氏に依れば氏の論文

K. Itô, On the normal stationary process with no Hysteresis. proc. Imp. Acad Tokyo Vol. XX No. 4

に於て得られた結果からも導かれることが指摘されてゐる。

想像されるが，以下同論文の内容と筆者の証明を述べようと想ふ。

今 $X_t(\omega)$ $t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ を

$E_\omega\{X_t(\omega)\}=0$, $E_\omega\{X_t(\omega)^2\}=1$

なる如き一つの stochastic sequence であるとせよ。

若し此の sequence の間の相関係数

$$R(K)=E_\omega\{X_{t+K}(\omega)\cdot X_t(\omega)\}$$

がKのみに depend するとせば此の sequence $X_t(\omega)$ は（Khintchine の意味に於て）stationary であるといふ

然るときはよく知られてゐる様に stationary sequence の相関係数 $R(K)$ は次の様な形で書ける（註Ⅱ）

$$R(K)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iK\lambda}\, dS(\lambda)$$

こゝで函数 $S(\lambda)$ は次の様な形で示される。

$$S(\lambda)=(\pi+\lambda)R(0)+\Sigma'\frac{R(K)}{iK}e^{iK\lambda}$$

但し $\Sigma'=\sum_{K=-\infty}^{K=-1}+\sum_{K=1}^{\infty}$ を示す

（註Ⅱ） H. Wold, A study in the analysis of stationary time series. Upsala, 1938

$S(\lambda)$ は intervall $-\pi \leqq \lambda \leqq \pi$ で非減少函数だからその微係数

$$s(\lambda) = S'(\lambda)$$

はこの intervall の殆んど凡ての点で存在する。

此処で述べる補間法の問題とは次の様な意味のものである。

即ち 或る正の整数 n に対して最小二乗法に依り次の様な linear form

$$L_{2n}(\omega) = a_{-n}x_{t-n}(\omega) + a_{-n+1}x_{t-n+1}(\omega) + \cdots$$
$$\cdots + a_{-1}x_{t-1}(\omega) + a_1 x_{t+1}(\omega) + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1}x_{t+n-1}(\omega) + a_n x_{t+n}(\omega),$$

を $\quad E_\omega\{(x_t(\omega) - L_{2n}(\omega))^2\} = \sigma_n^2(1) = min$

なる如き條件の下で決めることである。

此処で係数 a_i は只 $R(k)$ のみに depend する。而して明らかに $\sigma_n^2(1)$ は non increasing である。

"ストカスチック"補間法について Kolmogroff の得たる結果は

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n^2(1) = \sigma^2(1) = \frac{1}{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{s(\lambda)}}$$

である。但し特別な場合として $s(\lambda)$ が positive

measure の set の上で 0 であるか或は積分

$$\int_0^{\pi} \frac{d\lambda}{s(\lambda)}$$

が diverge する場合には $\sigma^2(1)=0$ である

亦"ストカスチック"補外法 (extrapolation) の問題は同様にして以下の様に説明することが出来る。

即ち以下或る正の整数 n 及び k に対して最小二乗法に依り次ノ様な linear form

$$M_n^{(k)}(\omega)=a_{n+k}X_{t-n-k}(\omega)+a_{n+k-2}X_{t-n-k+1}(\omega)+\cdots\cdots+a_k X_{t-k}(\omega),$$

を $E_\omega\{(X_t(\omega)-M_n^{(k)}(\omega))^2\}=\sigma_n^2(\mathcal{E},k)=\min$

なる如き條件の下で訳めることである。

然るとき

(2) $\sigma^2(\mathcal{E},1)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2(\mathcal{E},1)=e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\log s(\lambda)d\lambda}$

(3) $\sigma^2(\mathcal{E},k)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2(\mathcal{E},k)=\sigma^2(\mathcal{E},1)(1+b_1^2+\cdots\cdots+b_{k-1}^2)$,

なる結果が得られる、

但しここで

$$4\begin{cases}\log s(\lambda)\sim a_0+a_1\cos\lambda+a_2\cos 2\lambda+\cdots\cdots \\ e^{\frac{1}{2}(a_1\omega+a_2\omega^2\cdots\cdots)}=1+b_1\omega+b_2\omega+\cdots\cdots\end{cases}$$

である、特別な場合として、$s(\lambda)$ が positive

measure の set の上で 0 であるか或は積分

$\int_0^{\pi} \log s(\lambda)\, d\lambda$ が diverge する場合にはたが何であっても $\sigma^2(\varepsilon, k) = 0$ である．

仮以下 Kolmogroff の得たる結果の証明に移らう；先づ第一に (1) を証明しよう

・今内積 (X_{t+k}, X_t) を $E_\omega\{X_{t+k}(\omega)X_t(\omega)\}$ で定義すれば集合 $X_t(\omega)$, $t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ で決定される、closed linear subspace は Hilbert space であると考へられる．

　　註Ⅲ 前記伊藤氏の論文参照

今 $\mathcal{L}_{2n}$ を集合 $X_{-n}(\omega), X_{-n+1}(\omega), \cdots\cdots\cdots, X_{-1}(\omega), X_1(\omega), \cdots\cdots X_{n-1}(\omega), X_n(\omega)$ で決定される linear manifold であるとすれば

$$L_{2n}(\omega) = \sum_{K=1}^{n} \{a_K X_K(\omega) + a_{-K} X_{-K}(\omega)\}$$

は $X_0(\omega)$ の $\mathcal{L}_{2n}$ への orthogonal projection である。[$X_{t-n}(\omega), X_{t-n+1}(\omega), \cdots\cdots, X_{t-1}(\omega), X_t(\omega), X_{t+1}(\omega), \cdots\cdots, X_{t+n-1}(\omega), X_{t+n}(\omega)$ の代りに $X_{-n}(\omega), X_{-n+1}(\omega), \cdots\cdots, X_{-1}(\omega), X_0(\omega), X_1(\omega), \cdots\cdots X_{n-1}(\omega), X_n(\omega)$ を考へても一般性を失はぬことは stationary なる性質から明らかである．]

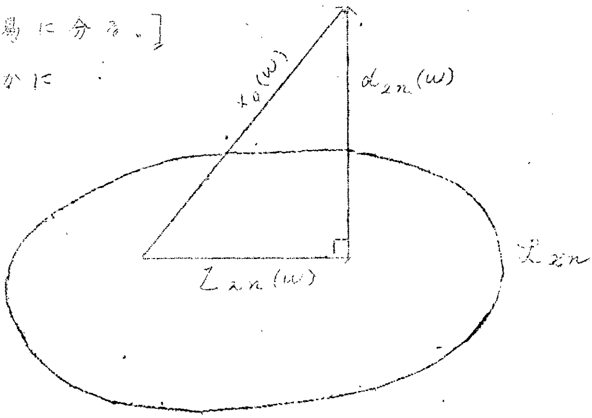
然るとき

$$d_{2n}(\omega) = X_0(\omega) - L_{2n}(\omega) = \sum_{-n}^{n} a_l^{(n)} X_l(\omega)$$

［$a_l^{(n)}$ は real であり　$a_0^{(n)} = 1$,　$a_l^{(n)} = a_{-l}^{(n)}$

なることは容易に分る。］

と置けば明らかに



$$(d_{2n}, X_K) = \sum_{-n}^{n} a_l^{(n)} (X_l, X_K) = 0$$

$$K = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \pm n$$

$$(d_{2n}, X_0) = \sum_{-n}^{n} a_l^{(n)} (X_l, X_0)$$

$$(d_{2n}, X_0 - d_{2n}) = 0$$

が成立する。　且つ $(d_{2n}, X_0 - d_{2n}) = 0$ より

$$(d_{2n}, d_{2n}) = (d_{2n}, X_0) = \sigma_n^2(1) \triangleq f$$

なることも容易に分る。

依て

$$(d_{2n}, X_K) = \sum_{-n}^{n} a_l^{(n)} R(l-K)$$

$$= \sum_{-n}^{n} a_l^{(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-K)\lambda} dS(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda}\left\{\sum_{-n}^{n} a_{\ell}^{(n)} e^{i\ell\lambda}\right\} dS(\lambda)$$

$$(d_{2n}, d_{2n}) = \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{m=-n}^{n} a_{\ell}^{(n)} a_{m}^{(n)} R(\ell-m)$$

$$= \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{m=-n}^{n} a_{\ell}^{(n)} a_{m}^{(n)} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-m)\lambda} dS(\lambda)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left\{\sum_{\ell=-n}^{n} a_{\ell}^{(n)} e^{i\ell\lambda}\right\}\left\{\sum_{\ell=-n}^{n} a_{\ell}^{(n)} e^{-i\ell\lambda}\right\} dS(\lambda)$$

今ここで $\underline{\sum_{\ell=-n}^{n} a_{\ell}^{(n)} e^{i\ell\lambda}} = f_n(\lambda)$ と置くと，$a_{\ell}^{(n)} = a_{-\ell}^{(n)}$ なる事に依り $\overline{f_n(\lambda)} = f_n(\lambda)$ であるから

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f_n(\lambda)\}^2 dS(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda)\, dS(\lambda) = \sigma_n^2(1) \leqq 1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\lambda} f_n(\lambda)\, dS(\lambda) = 0 \qquad k = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n$$

亦

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(\lambda) f_m(\lambda)\, dS(\lambda) = \sigma_n^2(1), \qquad m < n$$

なることは上の関係式より簡単に導かれる

従って

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f_n(\lambda) - f_m(\lambda)\}^2 dS(\lambda) = \sigma_n^2(1) - \sigma_n^2(1) - \sigma_n^2(1)$$

$$+ \sigma_m^2(1) = \sigma_m^2(1) - \sigma_n^2(1)$$

である．故に $\sigma_m^2(1) - \sigma_n^2(1) \geqq 0$ で

$$1 \geqq \sigma_1^2(1) \geqq \sigma_2^2(1) \geqq \cdots\cdots \geqq 0$$

依て $\sigma_n^2(1)$ は converge して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f_n(\lambda)-f_m(\lambda)\}^2 dS(\lambda)\to 0 \qquad n>m\to\infty$$

である．

故に $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f_n(\lambda)-f(\lambda)\}^2 dS\to 0 \qquad n\to\infty$

なる如き $f(\lambda)\in L^2$ が存在して且つ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}f(\lambda)\,dS(\lambda)=0$$

$$K=\pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\cdots$$

(4) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\,dS(\lambda)=\sigma^2(1)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda)=\sigma^2(1)$$

である 但 $\sigma^2(1)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n^2(1)$ である (註Ⅳ)

$f(\lambda)$ の L^2 integrable なることより Schwarz の不等式に依り $f(\lambda)$ が L integrable なることが出て来る．

依って

(註Ⅳ) かかる事実は $X_K(\omega)$, $K=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$ に依って決定される．closed linear subspace が Hilbert space と考へられることより明らかである

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(\lambda)\, dS(\lambda)$$

は有界変分の函数であり　従って $\varphi(\lambda)$ は $(-\pi, \pi)$ なる interval の殆んど凡ての点で連続であることが分る．

故に

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda)\, dS(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda}\, d\varphi(\lambda) = 0$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)\, dS(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi(\lambda) = \sigma^{2}(1)$$

より　$\varphi(\lambda)$ の連続点に於ては

$$\varphi(\lambda) = (\pi + \lambda)\, \sigma^{2}(1)$$

なることが容易に証明出来る．

これより

$$\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda) = \varphi(\lambda_{k+1}) - \varphi(\lambda_k)$$

$$= \sigma^{2}(1)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)$$

が得られる、但し λ_k, λ_{k+1} は $\varphi(\lambda)$ の連続点である、

仮て　$\displaystyle\int_{\lambda_k}^{\lambda_{k+1}} \{f(\lambda) - A_{xk}\}^{2}\, dS(\lambda)$

$$= \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) - 2A_{\lambda_K}\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda) + A^2_{\lambda_K}\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)$$

$$= \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) - \frac{\left\{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda)\right\}^2}{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)} + \frac{\left\{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda) - A_{\lambda_K}\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)\right\}^2}{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)}$$

$$\geqq \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) - \frac{\left\{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda)\right\}^2}{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)}$$

但しこゝに A_{λ_K} は或る常数とする。

此とSchwarzの不等式に依り

$$\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda) - A_{\lambda_K}\}^2 dS(\lambda)$$

$$\geqq \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) - \frac{\left\{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda)\right\}^2}{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)} \geqq 0$$

なる関係が得られる。而して

$$\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} f(\lambda)\, dS(\lambda) = \sigma^2(1)(\lambda_{K+1} - \lambda_K)$$

であるから

$$(5)\quad \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda)-A\lambda_K\}^2 dS(\lambda)$$

$$\geqq \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} \{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) - \frac{\sigma^4(1)(\lambda_{K+1}-\lambda_K)^2}{S(\lambda_{K+1})-S(\lambda_K)} \geqq 0$$

なることが云はれる。

今 interval $(-\pi,\pi)$ を $S(\lambda)$ の連続点 λ_1, $\lambda_2,\cdots,\lambda_{n-1}$ で n 分し 且

$$p_n(\lambda) = A\lambda_K \quad \text{for } \lambda_K \leqq \lambda < \lambda_{K+1}$$

$$s_n(\lambda) = \frac{S(\lambda_{K+1})-S(\lambda_K)}{\lambda_{K+1}-\lambda_K} \quad \text{for } \lambda_K \leqq \lambda < \lambda_{K+1}$$

なる函数 $p_n(\lambda)$, $s_n(\lambda)$ を定義すれば (5) に依て

$$(6)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(\lambda)-p_n(\lambda)\}^2 dS(\lambda)$$

$$\geqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma_0^4(1)}{s_n(\lambda)} d\lambda \geqq 0$$

なる関係が成立する。

故に Fatouの定理に依て（註V）

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma^4(1)}{s_n(\lambda)} d\lambda \geqq \frac{\sigma^4(1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{s(\lambda)}$$

依って

（註V） Titchmarsh, The Theory of Functions, p. 346 参照

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) \geqq \frac{\sigma^4(I)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)} .$$

而して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda) = \sigma^2(I)$$ であるから

$$(ア) \qquad \sigma^2(I) \geqq \sigma^4(I)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$$

依て $s(\lambda)$ が positive measure の set で 0 であるか或は

$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$ が diverge する場合には $\sigma^2(I) = 0$ で無ければならぬ。

亦若し $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$ が converge する場合には先づ(ア)により

$$\sigma^2(I) - \sigma^4(I)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)} \geqq 0$$

なることが云へる。亦 $\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$ も converge するのであるから、これより Schwarz の不等式を用ひることにより：

$$\frac{(\lambda_{K+1}-\lambda_K)^2}{S(\lambda_{K+1})-S(\lambda_K)} = \frac{(\lambda_{K+1}-\lambda_K)^2}{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} dS(\lambda)} \leqq \frac{(\lambda_{K+1}-\lambda_K)^2}{\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}} s(\lambda)\,d\lambda}$$

$$\leqq \int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}.$$

なることを得る、依って(5)に依り

$$\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}}\{f(\lambda)-A_{\lambda_K}\}^2 dS(\lambda)$$

$$\geqq\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}}\{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda)-\frac{\sigma^4(I)(\lambda_{K+1}-\lambda_K)^2}{S(\lambda_{K+1})-S(\lambda_K)}$$

$$\geqq\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}}\{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda)-\sigma^4(I)\int_{\lambda_K}^{\lambda_{K+1}}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$$

なる関係を得、依って

$$(8)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\lambda)-p_n(\lambda)\}^2 dS(\lambda)$$

$$\geqq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\lambda)\}^2 dS(\lambda)-\sigma^4(I)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$$

なることが云はれる、而して $f(\lambda)$ が L_2 integrable であれば任意の $\varepsilon>0$ に對して $p_n(\lambda)$ を適当に選んで（十分大きな n に対して）

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(\lambda)-p_n(\lambda)\}^2 dS(\lambda)<\varepsilon$$

ならしめ得るから，此と(8)より

$$(9)\quad 0\geqq\sigma^2(I)-\sigma^4(I)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}$$

依て(7)と(9)により

$$\sigma^2(I) - \sigma^4(I)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)} = 0$$

是より

$$\sigma^2(I) = \frac{1}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}}$$

而して $s(\lambda)$ は偶函数であるから

$$\sigma^2(I) = \frac{1}{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{d\lambda}{s(\lambda)}}$$

とも書ける。