385

(384)

27. 信頼限界について

中央氣象台技師　小河原正己

(昭和20年1月16日受付)

§1. まへがき

標本から計算した統計量から，それの眞の(即ち母集団の)値を推定するには，信頼限界によるのが最善の方法であるが二三の書物を讀んで見ても分りにくい，又疑問の点もある様に思はれるので，次にそれをはっきり定義しておき度いと思ふ．従来の各種の信頼限界の公式も，Bayes の定理を使って居ないものは，この定義に従って誘導したものと一致するけれども，その應用の上から見ると，信頼限界の意味や解釈の仕方が重要になって来るであらう。

§2. 信頼限界の定義

確率変数 X の分布函数の形は既知で，それが一つの未知の補助変数 θ を含むものとする．大さ N の標本(確率変数と見たる) $E=(X_1,\cdots,X_N)$ による θ の評價量を $T=T(E)$ とし，E の実現値即ち標本 $E_0=(x_1,\cdots,x_n)$ から計算した T の値を $T_0=T(E_0)$ とする．

この場合には θ と標本の大さ N が定まれば，それによって T の標本分布が確率する．

この様な場合に

(388)

$0<\alpha<1,\quad 0<\beta<1,\quad \alpha+\beta<1,$

なるα，βを適当に与へるとき

$$Pr[T \geqq T_0 \mid \theta=\theta_1]=\alpha \qquad (2,1)$$
$$Pr[T \leqq T_0 \mid \theta=\theta_2]=\beta \qquad (2,2)$$
$$\theta_1<\theta_2 \qquad (2,3)$$

なる如きθ_1，θ_2をθの信頼限界，(θ_1,θ_2)をθの信頼区間と云ひ，$1-\alpha-\beta$をその信頼度（又は信頼係数），$\alpha+\beta$をその危険率（詳しく言へば区間(θ_1,θ_2)の外にθがある危険率）といふ。又θ_1を下限，θ_2を上限と呼び，α，βを夫々その危険率と呼ぶことにしよう。

危険率$\alpha+\beta$を與へても信頼限界は定まらないが，このときは区間の長さ$\theta_2-\theta_1$を最小ならしむる様に定めるのが望ましい（註1）しかしこゝではα＝βにとることにしよう。この場合にはαを与へれば(2,1)，(2,2)を満足するθ_1，θ_2が一意的に定まり，又後に例示する様な通常の場合には

$Pr[T \geqq T_0 \mid \theta]$は$\theta$の増加函数である

から，αを適当に小さくとれば(2,3)も満足される。

次に未知の補助変数がθ以外にもあるときにも，T，E，θの適当な函数$\mathcal{T}=\mathcal{T}(T,E,\theta)$の分布が$\theta$を与へるとと

註1. J. Neyman: Lectures and Conferences on math. Stat.

佐藤良一郎；数理統計学　等参照

によつて定まる場合がある．

この様なときは，上記の定義に於ける T の代りに

$$\mathcal{T}^{(1)} = \mathcal{T}(T, E, \theta_1), \quad \mathcal{T}^{(2)} = \mathcal{T}(T, E, \theta_2)$$ を用ひ，

$$P_r[\mathcal{T}^{(1)} \geqq \mathcal{T}_0^{(1)} \mid \theta = \theta_1] = \alpha \qquad (2, 4)$$

$$P_r[\mathcal{T}^{(2)} \leqq \mathcal{T}_0^{(2)} \mid \theta = \theta_2] = \beta\ (= \alpha) \qquad (2, 5)$$

$$\mathcal{T}^{(1)} = \mathcal{T}(T_0, E_0, \theta_1), \quad \mathcal{T}_0^{(2)} = \mathcal{T}(T_0, E_0, \theta_2)$$

なる如き $\mathcal{T}_0^{(1)}$, $\mathcal{T}_0^{(2)}$ を定めれば，これから

$$\theta_1 = \theta_1(\mathcal{T}_0^{(1)}, T_0, E_0), \quad \theta_2 = \theta_2(\mathcal{T}_0^{(2)}, T_0, E_0)$$

が求まる．この場合にも $P_r[\mathcal{T} \geqq \mathcal{T}_0(T_0, E_0, \theta) \mid \theta]$ が θ の単調函数（例へば増加とする，減少のときは上の式で θ_1 と θ_2 の番号を反対にすればよい）ならば α を適当に小さくとると $\theta_1 < \theta_2$ となる，この θ_1, θ_2 を廣義の信頼限界と呼ぶことにしよう

以下簡單のため狹義の場合について述べることとする．

T_0 の代りに $\mathcal{T}_0^{(1)}$ 或は $\mathcal{T}_0^{(2)}$ をおきかへ，T の代りに $\mathcal{T}^{(1)}$, $\mathcal{T}^{2}$ 或は $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(T_0, E_0, \theta)$ をおきかへる等若干の変更をすることによつて，廣義の場合にも，そのまゝ成立する．

§3．統計的假説検定論よりの考察

(θ_1, θ_2) を信頼度 $1-2\alpha$（上限，下限の危險率夫夫 α）の信頼限界とすれば

$$H_1 ; \theta < \theta_1 \quad , \quad H_2 ; \theta > \theta_2$$

なる二つの帰無假説に対し夫々

$$w_1 ; T > T_0 \quad , \quad w_2 ; T \leqq T_0$$

なる危険域をとれば，H_1，H_2 に対する第一種の過誤を犯す危険率は何れも α を越えない．又

$$w = w_1 + w_2$$

とすればこれを危険域とする假説

$$H ; \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$$

に対し，第二種の過誤を犯す危険率は 2α を越えない．これ等は信頼限界の定義と假定（※）から明かであるが，H_1 又は H_2 に対する第二種の過誤従って又 H に対する第一種の過誤は豫め制御されては居ない．

かくて信頼限界は，上記の意味の過誤を犯す危険率が十分小さい様な一種の統計的假設を未知常数に対して与へるものである．たゞ通常の假設検定の場合には，危険域が假設だけに関係して定められ，実現された標本的がそれに落ちるか否かによって假設の取捨が決定されるのに対し，この場合には，実現された標本点に依存して（廣義の場合には假設にも関係する）危険域が定められ，假定された分布法則に從ふ確率変数としての標本に対する，謂はゞ思考実驗に

よつて，危険率が豫め與へられた大さになる様に，逆にその假設を調節するのである．

通常の假設検定の順序で考へると次の様になる．即ち假設として θ の一定の値をとり，$\alpha>0$ に対し

$$Pr[T \leqq T_1 \mid \theta] = Pr[T > T_2 \mid \theta] = \alpha$$

なる如き T_1，T_2（α を適当に小さくとれば $T_1 < T_2$）を定め

$$w: \quad T < T_1 \quad 又は \quad T > T_2$$

を危険域にとる．このとき標本 E_0（或は標本から計算された一定の $T=T_0$）に対し，$\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ なる θ はすべて採擇され（棄却されず），然らざる θ はすべて棄却される様な θ_1，θ_2 が假定（甘）の下に存在する．これが即ち前節で定義した，信頼度 $1-2\alpha$ の信頼限界に外ならない，これを以て定義とすることもできるが，前節の方が直接簡明であらう．

θ を色々変へるとき，点（θ, T_1），（θ, T_2）は夫々一つの曲線を画く，その間の單一領域を危険率 α の信頼帯状域とよび $D(\alpha)$ で表はす．

§4. Bayes の定理との関係

信頼限界は Bayes の定理を使はないで，統計的假

設検定の立場から定義される所に抄略があると思はれる．即ち（θ，T）を確率変数（2次元の）とは考へず，従ってθの分布法則（先驗的確率）に関しては何等の假定を必要としない．そのためにθの推定を$T=T_0$なる実現値に関する條件附確率（事故確率）を以て行ひ得ない事は止むを得ない．

θ_1，θ_2はθの評價量Tの函数（單調函数），従って標本Eの函数であって確率変数である．而して，未知常数θを一定の値に固定すると，T（E）の分布法則が定まり，信頼帯状域の定義から容易に分る様に

$$Pr[\theta_1(E)<\theta<\theta_2(E)]$$
$$=Pr[T_1(\theta)<T(E)<T_2(\theta)]=1-2\alpha$$

が成立つ．これは先づθの値を定めたとき，しかもそれを任意に定めたとき成立つ関係であるから，$E=E_0$からθを推定するに當りJ. Neyman等の如く（註2），“$\theta_1(E_0)<\theta<\theta_2(E)$”なる“宣言”の適中する確率として，この式をそのまま用ひることは，少くとも論理の飛躍がある様に思はれる．これは前節に述べた様に統計的假設の

（註2.）例へば J. Neyeman の前掲書

検定に持って行くか，又は次の様にBayesの定理を仲介として説明して，はじめて明瞭になるであらう．

今θを確率変数と看做し，その確率密度函数を$\varphi(\theta)$とする，又θの各値に対するTの條件附確率密度函数を$p(T|\theta)$とすれば，与へられたTに対し，θが信頼區間$(\theta_1(T), \theta_2(T))$にある條件附確率

$$\varphi(T) = P_r[\theta_1(T) \leq \theta \leq \theta_2(T)] = \frac{\int_{\theta_1(T)}^{\theta_2(T)} \varphi(\theta)\, p(T|\theta)\, d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta)\, p(T|\theta)\, d\theta}$$

は一般にTに依存する．しかしこの確率のTに関する平均値は，よく知られて居る様に（註3）

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(T)\, dT \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\theta)\, p(T|\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dT \int_{\theta_1(T)}^{\theta_2(T)} \varphi(\theta)\, p(T|\theta)\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta)\, d\theta \int_{T_1(\theta)}^{T_2(\theta)} p(T|\theta)\, dT$$

（註3） 例へば A. Wertheimer ; Ann of Math. Stat. Vol 10. 1939.

~~(391)~~

$$= 1 - 2\alpha$$

となる、即ち $\varphi(\theta)$ が未知であつても、それの如何にかゝはらず

$$Pr[(\theta, T) \in D(\alpha)] = 1 - 2\alpha$$

が成立つ，こゝでは θ に無関係な T の分布法則の存在も假定されて居ることは注意すべきであらう.

§5. 例

例1. 分散 σ^2

$$U^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2, \qquad u^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2,$$

$$n = N - 1$$

とおけば

$$Pr[U^2 \geqq u^2 \mid \sigma^2 = \sigma_1^2]$$

$$= Pr\left[\frac{nU^2}{\sigma_1^2} \geqq \frac{nu^2}{\sigma^2}\right]$$

$$= Pr[\chi^2 \geqq \chi_1^2] = \alpha$$

なる如き χ_1^2 を χ^2 分布の表から求めると $\chi_1^2 = \dfrac{nu^2}{\sigma^2}$ から

$$\text{下限}\ ;\quad \sigma_1^2 = \frac{nu^2}{\chi_1^2}$$

が定まる，同様にして

$$Pr[\chi^2 \leqq \chi_2^2] = \alpha \quad \text{即ち}\ Pr[\chi^2 > \chi_2^2] = 1 - \alpha$$

から.

~~(392)~~

上限 ; $\sigma_2^2 = \dfrac{n u^2}{\chi_2^2}$

例2. 百分率 $p \times 100$ % (生起確率 p)

$\dfrac{K}{N} \times 100$ % を実測から得られた百分率(特定事象が N 回中 N 回生起)とすると

$$P_r\left[\frac{X}{N} \geqq \frac{K}{N} \,\middle|\, p = p_1\right] = \sum_{X=K}^{N} {}_N C_X \, p_1^X q_1^{N-X}$$

$$(q_1 = 1 - p_1)$$

$$= \frac{1}{B(K, N-K+1)} \int_0^{p_1} x^{K-1} (1-x)^{N-K} dx$$

$n_1 = 2(N-K+1)$, $n_2 = 2K$, $x = \dfrac{n_2}{n_2 + n_1 F}$

とおき

$$p_1 = \frac{n_2}{n_2 + n_1 F_1} \qquad (5, 1)$$

とおけば

$$= \frac{n_1^{\frac{n_1}{2}} n_2^{\frac{n_2}{2}}}{B\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)} \int_{F_1}^{\infty} \frac{F^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_2 + n_1 F)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} dF$$

$$= P_r[F \geqq F_1] = \alpha$$

F分布の表から n_1, n_2 及び α に対應する F_1 が定まり, (5, 1)によって下限 p_1 が求められる.

同様にして

$$n_1' = 2(K+1), \quad n_2' = 2(N-K)$$

$$P_2 = \frac{n_1' F_2}{n_2' + n_1' F_2} \qquad (5.2)$$

とおけば

$$P_r\left[\frac{X}{N} \leqq \frac{K}{N} \mid p = p_2\right] = P_r\left[F \geqq F_2\right] = \alpha$$

自由度 n_1' ，n_2' 及び α から F_2 が定まり，(5.2) によって上限 p_2 が求められる．

統計数値表の $Bayes$ の定理に基く方法（110頁）に於ては自由度が上記のものと異る．又 p の先験的確率を矩形分布にとった $Bayes$ の定理に基く公式によれば，$N=K=0$ のとき $p_1=\alpha$，$p_2=1-\alpha$ となるが，吾々の公式では計算されないことも当然である．

例3. 平均値 m

標準偏差が未知の場合には，廣義の信頼限界として求めなければならない、即ちこの場合には

$$T^{(1)} = \frac{(\overline{X} - m_1)\sqrt{N}}{U}, \quad T^{(2)} = \frac{(\overline{X} - m_2)\sqrt{N}}{U}$$

$$T_0^{(1)} = \frac{(\overline{x} - m_1)\sqrt{N}}{u}, \quad T_0^{(2)} = \frac{(\overline{x} - m_2)\sqrt{N}}{u} \qquad (5.3)$$

但し

$$U = \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad u = \left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

とおけば t − 分布の表を用ひて

375

~~(374)~~

$$P_r[T^{(1)} \geqq T_0^{(1)} \mid m = m_1] = \alpha, \quad P_r[T^{(2)} \leqq T_0^{(2)} \mid m = m_2] = \alpha$$

なる $T_0^{(1)}, T_0^{(2)}$ が求められる。こゝに t－分布の對称性を利用して

$$P_r[\,|t| \geqq \tau\,] = 2\alpha$$

なる τ を求めれば、$T_0^{(1)} = -T_0^{(2)} = \tau$　従つて (5.3) から

$$m_1 = \bar{x} - \frac{u\tau}{\sqrt{N}}, \qquad m_2 = \bar{x} + \frac{u\tau}{\sqrt{N}}$$

§6. いくつかの未知補助変数の同時的信頼限界

未知補助変数を $\theta = (\theta^{(1)}, \cdots, \theta^{(K)})$、$\theta$ の評價量を $T = (T^{(1)}, \cdots, T^{(K)})$、その実現値を $T_0 = (T_0^{(1)}, \cdots, T_0^{(K)})$ とする。θ が定まれば、それに應じて T の分布法則が定まる場合に

$$P_r[T \in S(T_0, \theta_0) \mid \theta = \theta_0] = \alpha \qquad (6.1)$$

なる θ_0 の軌跡を信頼度 $1-\alpha$（危険率 α）の信頼限界といふ、但しこゝに、$S(T_0, \theta_0)$ は K 次元空間に於て、点 T_0 を通り、T_0 と θ_0 とで定まる凸閉曲面 C の外部を表はす、C を T_0 で定まる様にするには、例へばそれを θ_0 を中心とした球面にとるとか、又は T の確率密度曲面 $p = p(T \mid \theta)$ を $p = const$ で截つた截口の曲面にとるといふ様な方法が考へられる。又曲面 C を

$$G(T, \theta_0) = C \quad 但し \quad G(T_0, \theta_0) = C \qquad (6.2)$$

とするとき、領域Sが例へば

$$G(T,\theta_0) > G(T_0,\theta_0) \qquad (6,3)$$

で表はせるときは、(6,1)は

$$P_r[G(T,\theta_0) > G(T_0,\theta_0) \mid \theta=\theta_0] = \alpha \qquad (6,1)'$$

とかける．このときの信頼限界はθを変数として

$$G(T_0,\theta) = C \qquad (6,4)$$

である．θ以外にも未知補助変数がある場合にも一次元確率変数$g(T,E,\theta)$の分布がθによって定まる様な函数gが存在するときは上記のGをこのgでおきかへて廣義の信頼限界

$$g(T_0,E_0,\theta) = Const \qquad (6,4)'$$

が定義される．一般に(6,4)′が特にθの二次形式のときは信頼隋円面と名づけられて居る。(註4)

註4) 増山元三郎；少数例の纒め方と実験計画の立て方。参照