71

# 7. 洲之内源一郎

## Fourier 係数に就て（河田氏への書信より）

G. H. Hardy が次の定理を証明した。：$a_n$ が $L^p$ $(p>1)$ の函数の Fourier sine 又は cosine 係数ならば その算術平均 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ が又ある $L^p$ の函数の Fourier 係数となる。是に関係して私が Fourier 係数に関する論文の中で（帝國学士院記事20巻 p218-222）次の一定理を証明した：

$p>1$ で $a_n$ が $L^p$ の1つの函数の Fourier sine 係数ならば $\sum_{n}^{\infty}\frac{a_k}{k}$ が又 $L^p$ の1つの函数の Fourier sine 係数である。

又 $a_n$ が Zygmund class の函数の Fourier sine 係数ならば $\sum_{n}^{\infty}\frac{a_k}{k}$ は $L$ の函数の Fourier sine 係数になる。

是に就て 後の洲之内源一郎氏より書信に接した。その1部を洲之内氏の御了解の下に次に掲載さして頂きます。（河田）

---------さて4月号の学士院記事を拝見しました。あの前の方は Cosine series でも矢張りゆく様に思はれますの

で、次に証明の要点を書いて置きます。証明の方針は貴方のと同様です。（上の定理で sine 係数の代りに cosine 係数としても成立する事）

$f(x) \in L_p \ (p>1)$ とし $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos kx\,dx$ とする

$\sum \frac{1}{n} \cos nx$ は任意の $p \geqq 1$ に対して $L_p$ に属する $g(x)$ の Fourier 級数であるから parseval の定理により

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{k} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos kx}{k}\,dx$$

一般に右辺は（C. 1）mean で存在するが、この場合は収斂する。

$g(x) = -\frac{1}{2}\log\{2(1-\cos x)\}$ であるから

$\int_0^x f(x)\,dx = F(x)$ と置いて

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{n} = \int_0^\pi fg\,dx - \int_0^\pi f(x)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos kx}{k}\,dx$$

$$= \int_0^\pi F(x)\cos nx \frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}} + \int_0^\pi F(x)\sin nx\,dx$$

右辺の第二項は不定積分の sine 係数であるから $o(n^{-1})$

で従って $L_p$ ($p>1$) の cosine 係数である. 第1項は $\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}}\int_0^x f(x)\,dx$ の cosine 係数でこの函数は $L_p$ に属する (Hardy-Littlewood, maximal theorem の特別の場合)

(証 終)

若しも $f$ が Zygmund class の函数ならばその Complementary class (Young の) を考へて全く同様に証明される.
$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k}$ は $f\in L$ のみでは一般に発散するから $f\in Z$ なる條件はゆるめられない。
又 $a_k$ が sine 係数のとき $\sum\frac{a_k}{k}$ は常に収斂するがこれが sine 係数になるためには $f\in Z$ なる條件はゆるめられないで実際その例が作られる. - - - - - - - - - - -