

## 2次ガウス過程を用いた担保付貸出の 解析的な損失分布のモーメント評価

山下 智志<sup>1</sup>・吉羽 要直<sup>2</sup>

(受付 2010 年 9 月 29 日；改訂 2011 年 1 月 18 日；採択 1 月 19 日)

### 要 旨

本稿では、デフォルト強度と担保価値との間に相関がある場合を想定して、担保付貸出の損失分布の期待値とモーメントを評価する。具体的には、デフォルト強度は、Ornstein-Uhlenbeck 過程に従う潜在変数の 2 次関数で表現されるとする 2 次ガウス過程でモデル化し、デフォルト強度の非負性を保つ。そのうえで、デフォルト強度が担保価値と相関を持つという条件を満たすようにモデル化して、担保付貸出の期待損失を解析的に評価する。また、損失分布の高次モーメントも解析的に評価する。

評価対象の期待損失は、割引デフォルト確率の項と担保による期待回収額の項から構成される。前者の項は、通常の生存確率を用いた 1 階積分で表現される一方、後者の項は、相関の影響を考慮して測度変換された生存確率を積分の測度とした 1 階積分で表現されることを示す。より一般的に損失の高次モーメントも、測度変換された生存確率を積分の測度として 1 階積分することで評価できることを示す。また、数値例により、相関が損失の期待値・標準偏差に及ぼす影響を考察する。

キーワード：デフォルト強度、確率的回収率、2 次ガウス過程、期待損失、測度変換。

### 1. はじめに

貸出の信用リスク評価において、貸し手である銀行が被る損失は、貸出先の倒産確率あるいはデフォルト確率と回収率とで表現される。その損失の不確実性の要因としては、デフォルト確率の不確実性と回収率の不確実性だけではなく、両者間の相関も含まれることが知られている。実際、景気後退期にはデフォルト率が上昇するとともに担保資産価値が下落することを通じて、デフォルト率と回収率に負の相関がみられるという実証分析がある(例えば Altman et al., 2005 を参照)。バーゼル II の先進的内部格付けアプローチでは、回収率の自行推計にあたり、景気後退期を考慮した回収率を推定するように求めている。2007~08 年の金融危機の中でも、企業の信用力の低下(デフォルト率の上昇)とともに担保資産価値の低下が進み、損失額が増加するという問題に注目が集まった。このような状況下において信用リスク管理を行う際、企業のデフォルト率と回収率の相関を的確にリスク量に反映させる必要があることが認識されてきている。

本稿では、こうしたデフォルト率と回収率との間の相関を考慮して、担保付貸出の期待損

<sup>1</sup> 統計数理研究所：〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3

<sup>2</sup> 日本銀行：〒103-8660 東京都中央区日本橋本石町 2-1-1

失を解析的に評価するとともに、損失分布の高次モーメントも解析的に評価する。山下・吉羽(2010)では、デフォルト強度が非負性を保つ平方根過程に従い、対数担保価値変動がデフォルト強度変動と相関を持つモデルを構築し、担保付貸出の期待損失を解析的に評価した。山下・吉羽(2010)の方法では、担保価値のボラティリティが貸出先企業のデフォルト強度の平方根に比例したモデル化となっているため、当該貸出の期待損失を評価する際に用いる状態変数は2次元のアフィン過程となり、期待損失は解析的に評価できた。しかしながら、評価の対象を信用ポートフォリオに拡張し、ポートフォリオに含まれる各企業のデフォルト強度変動の間に相関を考慮しようとする、状態変数の共分散行列のアフィン性が失われ、解析的な評価は難しくなるという制約があった。そこで、本稿では、対数担保価値変動がデフォルト強度変動と相関を持つ2次ガウス・モデルを構築して、担保付貸出の期待損失を解析的に評価することによりこの問題を解決する。本モデルでは、状態変数を2次元のガウス過程として表現し、状態変数の共分散行列は定数行列としてモデル化されるため、山下・吉羽(2010)とは異なり、信用ポートフォリオの評価への拡張性を有している。本モデルでは、デフォルト強度の潜在変数はOrnstein-Uhlenbeck過程に従っていると、デフォルト強度はその潜在変数の2次関数で表現する。そのため、山下・吉羽(2010)と同様に、デフォルト強度が非負性を保つ。また、対数担保価値はデフォルト強度の潜在変数と相関を持つドリフト付きのブラウン運動で表現する。これにより、潜在変数を通じて、デフォルト強度と担保価値の相関(実証的に観察されるところではしばしば負の相関)が表現されることになる。

回収率を固定とする場合、貸出の期待損失評価は満期までの生存確率の評価に帰着する。ある確率過程に従うデフォルト強度と生存確率の数学的な関係は、その確率過程に従う短期金利と割引債価格の関係と同じである。ガウス過程の一種であるOrnstein-Uhlenbeck過程の2次関数に短期金利が従うと想定して割引債価格を評価するモデルは、2次ガウス・モデルと呼ばれ、アフィン・モデルと並んで多くの研究が進められてきている(例えば Ahn et al., 2002 を参照)。Pelsser (1997) は、Ornstein-Uhlenbeck 過程の2次関数に短期金利が従うと想定し、割引債価格を積分形で導出した。これに対し、Kijima et al. (2009) ではその積分形に対し閉じた解を与えている。本稿では、割引債価格について得られているこうした2次ガウス・モデルの解析的な解を信用リスク分析に応用していく。

2次ガウス・モデルを信用リスクの分析に応用した先行研究としては例えば Duffie and Liu (2001) がある。ここでは、無リスク短期金利とデフォルト強度に相当する信用スプレッドとともに2次ガウス・モデルでモデル化して評価を行っている。その際、無リスク金利と信用スプレッドの非負性とともに両者の間の負の相関に配慮して、信用リスクのある割引債価格を導出している。この価格は、Pelsser (1997) と同様に観測時点の状態変数の指数2次形式として表現されるが、Kijima et al. (2009) で得られた Pelsser (1997) の割引債価格に対する閉じた解と異なり、2次形式の係数は一般的には閉じた解とはならず、常微分方程式の解として表現されている。また、回収率については固定で考えられている。

本稿のモデルは、回収率について担保価値変動を通じて確率的に変動すると考えており、デフォルト強度と相関を持つ担保価値変動を想定している。2次形式の係数については閉じた解で表現している。

本稿の構成は以下のとおりである。2節では、問題設定とモデルを数学的に記述し、評価すべき期待損失が割引デフォルト確率と期待回収担保価値の2つの要素の評価に帰着することを示す。3節では、割引デフォルト確率と期待回収担保価値を解析解の1階積分で導出し、期待損失の評価式を導出する。このとき、瞬間的な期待回収担保価値については測度変換を用いて解析的に評価できることを示したうえで、期待回収担保価値は測度変換された生存確率を確率測度として平均担保変化率を満期まで1階積分することで評価されることを示す。得られた期

待損失の評価式を用いて具体的な数値例を示す。また、同様の測度変換を用いて損失の  $m$  次モーメントを解析的に評価し、具体的に損失の標準偏差の数値例も示す。4節では、本稿のモデルが現実的なパラメータ設定においてはデフォルト強度と担保価値の負の相関を考慮したモデルになっていることを確認する。5節では、本稿の結果をまとめ、拡張性を述べる。

## 2. モデル

貸し手の銀行がある企業に満期  $T$  で額面  $D$  の担保付貸出を行うことを考える。担保価値は  $A_t$  で表現され確率的に変動すると仮定する。貸出先の企業が満期  $T$  までにデフォルトした際には、その時点の担保資産の一定割合  $\delta$  がその貸出の回収に充てられると仮定する。貸出先企業のデフォルト時刻を  $\tau$  と表記すると、企業がデフォルトした際の銀行の損失は

$$(2.1) \quad L_\tau = D - \delta A_\tau$$

と表現される<sup>1)</sup>。ここで  $\delta$  は担保の処分に際して価値が減価する割合を示す定数である。具体的なモデルとして、確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  上で<sup>2)</sup>、担保資産価値は幾何ブラウン運動

$$(2.2) \quad dA_t = \mu_A A_t dt + \sigma_A A_t dW_t^A$$

に従っていると仮定する。一方、当該企業のデフォルト強度  $\lambda_t$  は、潜在変数  $y_t$  を用いて

$$(2.3) \quad \lambda_t = (y_t + \alpha + \beta t)^2$$

と表現されるものとし、潜在変数  $y_t$  は次の Ornstein-Uhlenbeck 過程に従うとする<sup>3)</sup>。

$$(2.4) \quad dy_t = -\kappa y_t dt + \sigma_y dW_t^y$$

ここで(2.2)式と(2.4)式の確率過程に含まれるブラウン運動は

$$(2.5) \quad \text{cov}(dW_t^y, dW_t^A) = d[W^y, W^A]_t = \rho dt$$

という相関を持つものと仮定する。

本稿では、こうした設定で銀行の期待損失を解析的に評価していく。時点  $t$  で貸出先企業がデフォルトしているか否かの増大情報系を  $(\mathcal{H}_t)$  で表現し、(2.2)、(2.4)式で示されるブラウン運動  $W_t^y$ 、 $W_t^A$  から生成される増大情報系は、 $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W_s^y, W_s^A : s \leq t\})$  として、 $(\mathcal{F}_t)$  で表す。さらに、別の増大情報系  $(\mathcal{G}_t)$  を

$$(2.6) \quad \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$$

で定義する。デフォルト時刻  $\tau$  は増大情報系  $\mathcal{F}_t$  に関して2重確率的な確率時刻であり、(2.3)式のデフォルト強度過程をハザード率過程  $(\lambda_t)$  として定義できると仮定する<sup>4)</sup>。  $\mathcal{F}_t$  を所与としたときの期待値を時刻  $t$  での期待値として

$$(2.7) \quad E_t[\cdot] = E[\cdot | \mathcal{F}_t]$$

で定義し、固定金利  $r$  で割引くとすると<sup>5)</sup>、 $\int_t^T L_s \lambda_s |e^{-\int_t^s (r + \lambda_u) du} ds$  の可積分性のもとで、時点  $t$  での銀行の割引期待損失は(2.8)式で評価される。

$$(2.8) \quad \begin{aligned} E[e^{-r(\tau-t)} L_\tau 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] &= DE[e^{-r(\tau-t)} 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] - \delta E[e^{-r(\tau-t)} A_\tau 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] \\ &= 1_{\{t < \tau\}} D \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r + \lambda_u) du} \lambda_s] ds - 1_{\{t < \tau\}} \delta \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r + \lambda_u) du} \lambda_s A_s] ds \end{aligned}$$

ここで、(2.8)式右辺第1項の

$$(2.9) \quad \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u)du} \lambda_s] ds$$

は金利で割り引かれたデフォルト確率(割引デフォルト確率)を表す。一方、(2.8)式右辺第2項の

$$(2.10) \quad \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u)du} \lambda_s A_s] ds$$

は時点  $t$  から時点  $T$  までに回収される期待回収担保価値を表している。

2次元の状態変数ベクトル  $X_t = (y_t, \ln A_t)^\top$  を導入すると、(2.2), (2.4), (2.5)式より、 $X_t$  は2次元のガウス過程に従うことがわかる。期待損失の評価は、こうした状態変数ベクトルのもつて、(2.9)式の割引デフォルト確率の評価と(2.10)式の期待回収担保価値の評価に帰着することがわかる。

### 3. 期待損失と損失分布の高次モーメント

本節では、(2.9)式の割引デフォルト確率を生存確率を用いて評価し、(2.10)式の期待回収担保価値の被積分項を測度変換を用いて評価したうえで、(2.8)式の期待損失の解を導出し、数値例を示す。さらに、より一般的に損失分布の  $m$  次モーメントの評価式を導出し、期待損失の数値例で用いたパラメータのもとで損失分布の標準偏差を算出する。

#### 3.1 割引デフォルト確率の評価

時点  $t$  からみた時点  $T$  までの生存確率を

$$(3.1) \quad \Gamma(t, T) = E_t \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda_s ds \right) \right]$$

とすると、(2.9)式の割引デフォルト確率に含まれる期待値は、

$$(3.2) \quad E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u)du} \lambda_s] = -e^{-r(s-t)} \frac{\partial \Gamma(t, s)}{\partial s}$$

となるので、(2.9)式の割引デフォルト確率は

$$(3.3) \quad \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (r+\lambda_u)du} \lambda_s] ds = - \int_t^T e^{-r(s-t)} ds \Gamma(t, s)$$

と生存確率を測度とした1階のStieltjes積分で表現される。

そこで、(3.1)式の生存確率を解析的に評価する。(3.1)式の評価式は、割引債価格の評価式において、潜在変数  $y_t$  を(2.4)式のOrnstein-Uhlenbeck過程で与え、短期金利を(2.3)式の  $\lambda_t$  で置き換えた式に相当している。この性質を踏まえ、割引債価格の評価式導出方法を援用すると、時点  $t$  でみた時点  $T$  までの生存確率  $\Gamma(t, T)$  は以下のように与えられる。

$$(3.4) \quad \Gamma(t, T) = \exp(C_0(t, T) - C_1(t, T)y_t - C_2(t, T)y_t^2)$$

ただし、(3.4)式の係数  $C_0(t, T)$ ,  $C_1(t, T)$ ,  $C_2(t, T)$  は、それぞれ、

$$(3.5) \quad 0 = -1 - \frac{dC_2(t, T)}{dt} + 2\kappa C_2(t, T) + 2\sigma_y^2 C_2^2(t, T)$$

$$(3.6) \quad 0 = -2(\alpha + \beta t) - \frac{dC_1(t, T)}{dt} + \kappa C_1(t, T) + 2\sigma_y^2 C_1(t, T)C_2(t, T)$$

$$(3.7) \quad 0 = -(\alpha + \beta t)^2 + \frac{dC_0(t, T)}{dt} + \frac{\sigma_y^2}{2} \{-2C_2(t, T) + C_1^2(t, T)\}$$

という常微分方程式を

$$(3.8) \quad C_0(T, T) = C_1(T, T) = C_2(T, T) = 0$$

という境界条件で解いた解として与えられる(導出は補論 A を参照). この常微分方程式の解析的な評価は, Pelsser (1997) で与えられており,

$$(3.9) \quad \gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_y^2}$$

として,

$$(3.10) \quad F(t, T) = \frac{2\gamma e^{\gamma(T-t)}}{(\gamma + \kappa)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - \kappa}$$

$$(3.11) \quad \alpha(t) = \alpha + \beta t$$

と置いたうえで, 以下のように評価される.

$$(3.12) \quad C_2(t, T) = \frac{e^{2\gamma(T-t)} - 1}{(\gamma + \kappa)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - \kappa}$$

$$(3.13) \quad C_1(t, T) = 2F(t, T) \int_t^T \frac{\alpha(u)}{F(u, T)} du$$

$$(3.14) \quad C_0(t, T) = - \int_t^T \left\{ \alpha(u)^2 + \sigma_y^2 C_2(u, T) - \frac{\sigma_y^2}{2} C_1^2(u, T) \right\} du$$

ここで, (3.13), (3.14) 式の積分は, Kijima et al. (2009) の結果と同様に以下のように閉じた式で与えられる.

$$(3.15) \quad C_1(t, T) = \frac{2 \left[ \alpha\gamma \{ (\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)} - (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)} - 2\kappa \} + \beta \{ (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)}(1 - \gamma t) + (\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)}(1 + \gamma t) - 2\gamma(\kappa T + 1) \} \right]}{\gamma^2 \{ (\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)} + (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)} \}}$$

$$(3.16) \quad C_0(t, T) = -\alpha^2(T-t) - \alpha\beta(T^2 - t^2) - \frac{\beta^2(T^3 - t^3)}{3} + \frac{(\gamma + \kappa)(T-t)}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{(\gamma + \kappa)e^{2\gamma(T-t)} + \gamma - \kappa}{2\gamma} - \frac{\sigma_y^2 G(t, T)}{\gamma^5 \{ (\gamma + \kappa)e^{\gamma(T-t)} + (\gamma - \kappa)e^{-\gamma(T-t)} \}}$$

ただし,

$$(3.17) \quad G(t, T) = (\gamma - \kappa) \{ \alpha^2 \gamma^2 G_{1a}(t, T) + 2\alpha\beta\gamma G_{2a}(t, T) + \beta^2 G_{3a}(t, T) \} + (\gamma + \kappa) \{ \alpha^2 \gamma^2 G_{1b}(t, T) + 2\alpha\beta\gamma G_{2b}(t, T) + \beta^2 G_{3b}(t, T) \}$$

であり,  $G(t, T)$  の係数は以下のように与えられる.

$$(3.18) \quad G_{1a}(t, T) = -e^{\gamma(T-t)} + 4 - e^{-\gamma(T-t)}(3 + 2\gamma(T-t))$$

$$(3.19) \quad G_{1b}(t, T) = e^{-\gamma(T-t)} - 4 + e^{\gamma(T-t)}(3 - 2\gamma(T-t))$$

$$(3.20) \quad G_{2a}(t, T) = e^{\gamma(T-t)}(1 - \gamma T) - 2(1 - \gamma(t+T)) + e^{-\gamma(T-t)}(1 - \gamma(2t+T)) + \gamma^2(t^2 - T^2)$$

$$(3.21) \quad G_{2b}(t, T) = e^{-\gamma(T-t)}(1 + \gamma T) - 2(1 + \gamma(t+T)) + e^{\gamma(T-t)}(1 + \gamma(2t+T)) + \gamma^2(t^2 - T^2)$$

$$(3.22) \quad G_{3a}(t, T) = -4\gamma t(1 - \gamma T) - e^{\gamma(T-t)}(1 - \gamma T)^2 \\ + e^{-\gamma(T-t)} \left( 1 + 2\gamma t - \gamma^2(2t^2 + T^2) + \frac{2}{3}\gamma^3(t^3 - T^3) \right)$$

$$(3.23) \quad G_{3b}(t, T) = -4\gamma t(1 + \gamma T) + e^{-\gamma(T-t)}(1 + \gamma T)^2 \\ - e^{\gamma(T-t)} \left( 1 - 2\gamma t - \gamma^2(2t^2 + T^2) - \frac{2}{3}\gamma^3(t^3 - T^3) \right)$$

### 3.2 期待回収担保価値の評価

ここでは, (2.10) 式の期待回収担保価値を評価する. (2.2) 式の設定のもとでは,

$$(3.24) \quad \eta(t; A) = \frac{A_t e^{-\mu A t}}{A_0}$$

がマルチンゲールとなるが, この  $\eta(t; A)$  を Radon-Nikodym 密度過程とする測度変換

$$(3.25) \quad \left. \frac{d\tilde{P}}{dP} \right|_{\mathcal{G}_t} = \eta(t; A)$$

を考える. 確率測度  $\tilde{P}$  のもとでは, Girsanov の定理により

$$(3.26) \quad \tilde{W}_t^A = W_t^A - \sigma_A t, \quad \tilde{W}_t^y = W_t^y - \rho \sigma_A t$$

が標準ブラウン運動となり<sup>6)</sup>, 状態変数  $y_t$  は

$$(3.27) \quad dy_t = (-\kappa y_t + \rho \sigma_A \sigma_y) dt + \sigma_y d\tilde{W}_t^y$$

という確率過程に従う. ここで, 状態変数  $\tilde{y}_t$  を

$$(3.28) \quad \tilde{y}_t = y_t - \frac{\rho \sigma_A \sigma_y}{\kappa}$$

とすると, (2.4) 式は

$$(3.29) \quad dy_t = d\tilde{y}_t = -\kappa \tilde{y}_t dt + \sigma_y d\tilde{W}_t^y$$

と書き表せる.

変換後の確率測度  $\tilde{P}$  で情報  $\mathcal{F}_t$  を所与とした期待値を  $\tilde{E}_t[\cdot]$  で定義すると, (2.10) 式の期待回収担保価値の被積分項は

$$(3.30) \quad E_t \left[ e^{-\int_t^s (r + \lambda_u) du} \lambda_s A_s \right] = E_t \left[ \frac{\eta(s; A)}{\eta(t; A)} A_t e^{(\mu_A - r)(s-t)} \exp \left( -\int_t^s \lambda_u du \right) \lambda_s \right] \\ = A_t e^{(\mu_A - r)(s-t)} \tilde{E}_t \left[ \exp \left( -\int_t^s \lambda_u du \right) \lambda_s \right]$$

と変形できる. ここで,

$$(3.31) \quad \tilde{E}_t \left[ \exp \left( -\int_t^s \lambda_u du \right) \lambda_s \right] = -\frac{\partial}{\partial s} \tilde{E}_t \left[ \exp \left( -\int_t^s \lambda_u du \right) \right]$$

となる. (3.31) 式右辺の被微分項は, 確率測度  $\tilde{P}$  での生存確率を表す. 生存確率を決めるデフォルト強度は, (2.3) 式より

$$(3.32) \quad \lambda_t = (y_t + \alpha + \beta t)^2 = (\tilde{y}_t + \tilde{\alpha} + \beta t)^2$$

ただし,

$$(3.33) \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \frac{\rho \sigma_A \sigma_y}{\kappa}$$

と表現されることから、確率測度  $\tilde{P}$  での生存確率は、次式で与えられる。

$$(3.34) \quad \tilde{E}_t \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda_u du \right) \right] = \Gamma(t, T | \tilde{\alpha}, \tilde{y}_t) = \exp(\tilde{C}_0(t, T) - \tilde{C}_1(t, T)\tilde{y}_t - C_2(t, T)\tilde{y}_t^2)$$

ただし、(3.34)式の係数  $\tilde{C}_0(t, T)$ ,  $\tilde{C}_1(t, T)$  は  $C_0(t, T)$ ,  $C_1(t, T)$  を決めるパラメータ  $\alpha$  を  $\tilde{\alpha}$  に変更して得られる係数である<sup>7)</sup>。

したがって、(2.10)式の期待回収担保価値は、

$$(3.35) \quad \int_t^T E_t [e^{-\int_t^s (r+\lambda_u) du} \lambda_s A_s] ds = -A_t \int_t^T e^{(\mu_A - r)(s-t)} d_s \Gamma(t, s | \tilde{\alpha}, \tilde{y}_t)$$

と1階のStieltjes積分で表せる<sup>8)</sup>。(3.35)式より、期待回収担保価値は、測度変換された生存確率を積分の測度として、割り引かれた平均担保変化率を満期まで1階積分することにより評価されることがわかる。

### 3.3 期待損失の解

(2.8)式に(3.3)式で評価された割引デフォルト確率と(3.35)式で評価された期待回収担保価値を代入し、時点  $t=0$  では企業はデフォルトしていないとして、時点  $t=0$  での期待損失を評価すると、

$$(3.36) \quad E[e^{-rT} L \tau 1_{\{\tau \leq T\}}] = -D \int_0^T e^{-rs} d_s \Gamma(0, s | \alpha, y_0) + \delta A_0 \int_0^T e^{(\mu_A - r)s} d_s \Gamma(0, s | \tilde{\alpha}, \tilde{y}_0)$$

と導出される。(3.36)式の評価に際して、右辺第1項、第2項の生存確率を積分の測度とした1階のStieltjes積分は、部分積分を用いて生存確率を被積分項に含む通常の積分形式に変換でき、数値積分パッケージを用いて計算することができる<sup>9)</sup>。

数値計算例として、山下・吉羽(2010)での数値例のパラメータを参考に

$$(3.37) \quad D = A_0 = 100, \quad \delta = 0.7, \quad T = 1, \quad \mu_A = 1\%, \quad \sigma_A = 10\%, \quad \sigma_y = 10\%, \quad r = 1\%$$

とパラメータを設定する。その他のパラメータとして、 $\beta$  を0にすると、 $\alpha$  はデフォルト強度の中心回帰水準の平方根であり、 $y_0$  は初期水準の中心回帰水準からのずれを示す。すなわち、 $y_0$  が正であれば初期水準が回帰水準より悪い状態にあり、 $y_0$  が負であれば初期水準が回帰水準より良い状態にあることを示す。これら  $y_0$  と  $\alpha$  については  $(y_0, \alpha) = (-0.03, 0.2)$  と  $(y_0, \alpha) = (0.03, 0.17)$  の2つのパターンを設定する<sup>10)</sup>。 $\kappa$  については  $\kappa = 0.1, 1, 5, 10$  の4つの場合を想定し、 $\rho$  を  $-1$  から  $1$  まで変化させる。

まず、 $\beta=0$  として、 $\rho$  を  $-1$  から  $1$  まで変化させて(3.36)式で算出される時点  $t=0$  で期待損失をプロットすると、図1ようになる。図1(a)は  $y_0 = -0.03$  とした場合、図1(b)は  $y_0 = 0.03$  とした場合である。山下・吉羽(2010)と同様に、いずれの場合でも負の相関が強い( $\rho$  が  $-1$  に近づく)ほど期待損失は大きくなる(期待損失は  $\rho$  に対して右肩下がりになる)ことがわかる。また、その損失の拡大幅は  $\kappa$  が小さいほど大きいことがわかる。すなわち、中心回帰の速度が遅いほど損失が拡大しやすくなる。なお、期待損失の水準は、 $y_0 < 0$  の場合は  $\kappa$  が大きいほど大きく、 $y_0 > 0$  の場合は  $\kappa$  が小さいほど大きくなる傾向がある。これは、現在のデフォルト強度が回帰水準のデフォルト強度より低い場合には、中心回帰の速度  $\kappa$  が速いほど回帰水準に近づきやすくなるため期待損失が大きくなり、逆に、現在のデフォルト強度が回帰水準のデフォルト強度より高い場合には、中心回帰の速度  $\kappa$  が遅いほど回帰水準への回復が遅れるため、期待損失が大きくなることを示している。いずれの点もデフォルト強度に平方根過程を想定した山下・吉羽(2010)の結果と同様である。

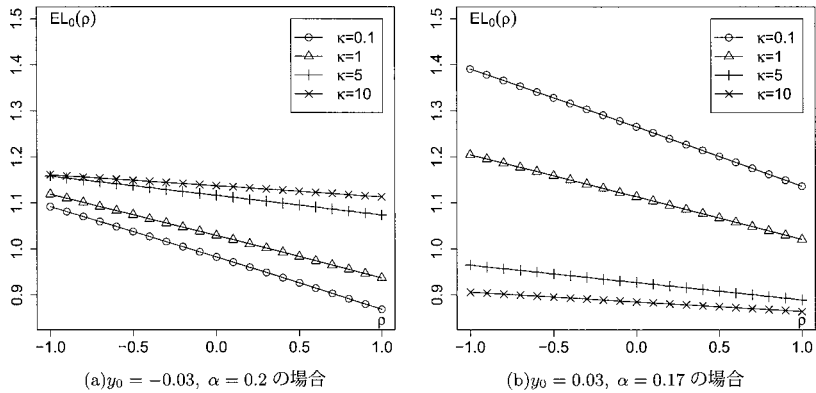


図 1. 相関  $\rho$  に対する期待損失 ( $\beta = 0$ ).

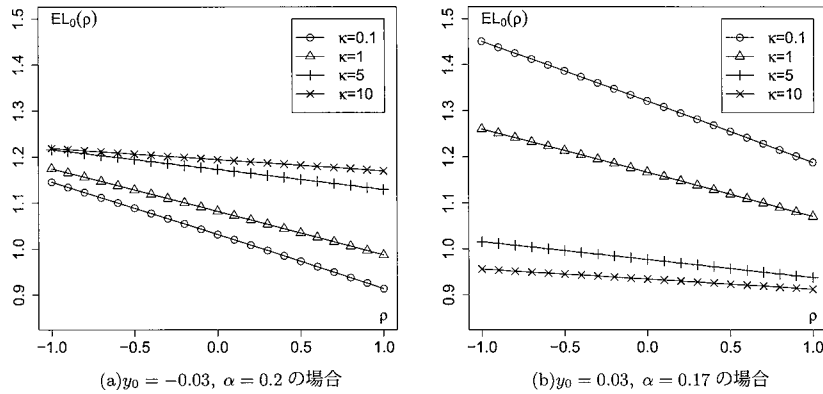


図 2. 相関  $\rho$  に対する期待損失 ( $\beta = 0.01$ ).

次に、デフォルト強度のトレンド効果を表す  $\beta$  を導入し、その効果を考察する。  $\beta$  をゼロではなく  $\beta = 0.01$  とし、他のパラメータは図 1 と同じようにして算出した結果が図 2 である。形状はこのパラメータの場合は、図 1 とほぼ変わらず、期待損失の水準が全体的に 0.05 ほど上昇していることがわかる。

### 3.4 損失分布の $m$ 次モーメントと標準偏差

ここまで期待損失を求めてきた。貸出の価値を評価するにはこの期待損失で十分であるが、貸出価値の変動を把握し、リスク管理していくうえでは損失分布のより高次のモーメントも必要となる。測度変換を用いると、より高次の  $m$  次モーメントを求めることもできる。ここではその手法を示す。

損失分布の  $m$  次モーメントは、

$$(3.38) \quad E[(e^{-r(\tau-t)} L_\tau)^m \mathbf{1}_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] = \sum_{n=0}^m m C_n D^{m-n} (-\delta)^n E[e^{-mr(\tau-t)} A_\tau^n \mathbf{1}_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t]$$



と展開できる。  $A_t^n$  の確率過程は

$$(3.39) \quad dA_t^n = \mu_A^{(n)} A_t^n dt + n\sigma_A A_t^n dW_t^A$$

ただし、

$$(3.40) \quad \mu_A^{(n)} = n\mu_A + \frac{n(n-1)}{2}\sigma_A^2$$

と表現できる。したがって、

$$(3.41) \quad \eta(t; A^n) = \frac{A_t^n e^{-\mu_A^{(n)} t}}{A_0^n}$$

がマルチンゲールとなる。この  $\eta(t; A^n)$  を Radon-Nikodym 密度過程とする確率測度  $P^{(n)}$  を

$$(3.42) \quad \left. \frac{dP^{(n)}}{dP} \right|_{\mathcal{G}_t} = \eta(t; A^n)$$

で定義し、その確率測度での情報  $\mathcal{F}_t$  を所与とした期待値を  $E_t^{(n)}[\cdot]$  で表すことにする。

確率測度  $P^{(n)}$  のもとでは、

$$(3.43) \quad W_t^{A^{(n)}} = W_t^A - n\sigma_A t, \quad W_t^{y^{(n)}} = W_t^y - n\rho\sigma_A t$$

が標準ブラウン運動となることから (詳細は補論 B を参照)、

$$(3.44) \quad y_t^{(n)} = y_t - \frac{n\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa}, \quad \alpha^{(n)} = \alpha + \frac{n\rho\sigma_A\sigma_y}{\kappa},$$

とすると、  $y_t^{(n)}$  は中心回帰水準が 0 の Ornstein-Uhlenbeck 過程となり、デフォルト強度は

$$(3.45) \quad \lambda_t = (y_t^{(n)} + \alpha^{(n)} + \beta t)^2$$

と表されるから、確率測度  $P^{(n)}$  のもとでの生存確率は

$$(3.46) \quad E_t^{(n)} \left[ \exp \left( - \int_t^T \lambda_u du \right) \right] = \Gamma(t, T | \alpha^{(n)}, y_t^{(n)})$$

で与えられる。

(3.38)式右辺の期待値は

$$(3.47) \quad E[e^{-mr(\tau-t)} A_\tau^n 1_{\{t < \tau \leq T\}} | \mathcal{G}_t] = 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T E_t[e^{-\int_t^s (mr + \lambda_u) du} \lambda_s A_s^n] ds$$

となるが、上記の測度変換を用いると、(3.47)式右辺の被積分項は、

$$(3.48) \quad \begin{aligned} E_t[e^{-\int_t^s (mr + \lambda_u) du} \lambda_s A_s^n] &= E_t \left[ \frac{\eta(s; A^n)}{\eta(t; A^n)} A_t^n e^{(\mu_A^{(n)} - mr)(s-t)} e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s \right] \\ &= A_t^n e^{(\mu_A^{(n)} - mr)(s-t)} E_t^{(n)} [e^{-\int_t^s \lambda_u du} \lambda_s] = -A_t^n e^{(\mu_A^{(n)} - mr)(s-t)} \frac{\partial \Gamma(t, s | \alpha^{(n)}, y_t^{(n)})}{\partial s} \end{aligned}$$

と変形でき、これを(3.38)式に代入すると、損失分布の  $m$  次モーメントが、確率測度  $P^{(n)}$  での生存確率を測度とする 1 階の Stieltjes 積分の組合せで計算できることになる<sup>11)</sup>。

具体的に、時点  $t=0$  での 2 次モーメントは

$$(3.49) \quad \begin{aligned} E[(e^{-r\tau} L_\tau)^2 1_{\{\tau \leq T\}}] &= -D^2 \int_0^T e^{-2rs} d_s \Gamma(0, T | \alpha, y_0) + 2\delta A_0 D \int_0^T e^{(\mu_A - 2r)s} d_s \Gamma(0, s | \tilde{\alpha}, \tilde{y}_0) \\ &\quad - \delta^2 A_0^2 \int_0^T e^{(2\mu_A - 2r + \sigma_A^2)s} d_s \Gamma(0, s | \alpha^{(2)}, y_0^{(2)}) \end{aligned}$$

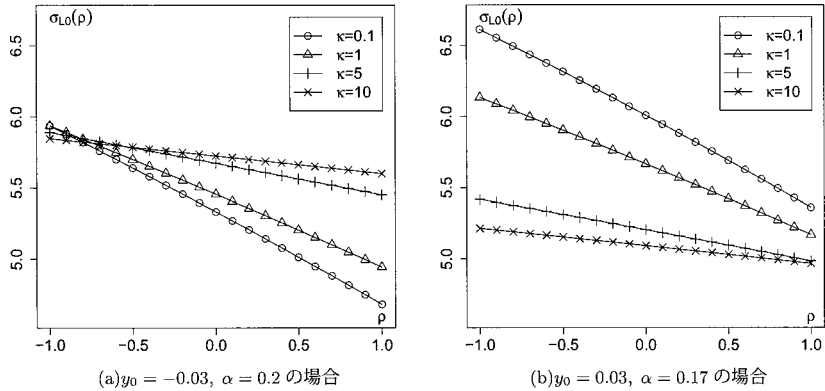


図3. 相関  $\rho$  に対する損失の標準偏差 ( $\beta = 0.01$ ).

と計算できる. 損失の分散は,

$$(3.50) \quad \text{var}[e^{-r\tau} L_{\tau} 1_{\{\tau \leq T\}}] = E[e^{-2r\tau} L_{\tau}^2 1_{\{\tau \leq T\}}] - (E[e^{-r\tau} L_{\tau} 1_{\{\tau \leq T\}}])^2$$

の右辺の各項をそれぞれ(3.49), (3.36)式を用いて計算することで与えられ, 損失の標準偏差は, この結果を用いて  $\sqrt{\text{var}[e^{-r\tau} L_{\tau} 1_{\{\tau \leq T\}}]}$  を計算することで与えられる.

図2と同じパラメータ設定で(3.50)式を評価し, 損失の標準偏差をプロットすると, 図3が得られる. この図から, 損失の標準偏差の観点でも期待損失と同様, 中心回帰の速度  $\kappa$  が遅いほど回帰水準への回復が遅れるため, 損失の標準偏差が大きく, リスク管理の観点で相関に注意が必要であることがわかる. この結果も, 期待損失の結果と同様, デフォルト強度に平方根過程を想定した山下・吉羽(2010)の結果と同じである.

#### 4. デフォルト強度と担保価値の相関の符号条件

本稿のモデルで取り入れた相関は(2.5)式のように状態変数  $y_t$  を駆動するブラウン運動と担保価値  $\ln A_t$  を駆動するブラウン運動の相関  $\rho$  である. 本節では, パラメータを適切に設定することにより, デフォルト強度と担保価値の相関として  $\rho$  と同符号の相関を表現できることを確認する.

##### 4.1 デフォルト強度と担保価値の条件付相関と符号条件

時刻  $t$  で観察したときの時刻  $T$  での状態変数  $y_T$  と対数担保価値  $\ln A_T$  の共分散は

$$(4.1) \quad \text{cov}_t(y_T, \ln A_T) = \sigma_y \sigma_A \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} \rho ds = \frac{\rho \sigma_y \sigma_A}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)})$$

となり,  $y_T^2$  と  $\ln A_T$  の共分散は

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{cov}_t(y_T^2, \ln A_T) &= 2\rho \sigma_y \sigma_A y_t e^{-\kappa(T-t)} \int_t^T e^{-\kappa(T-s)} ds \\ &= \frac{2\rho \sigma_y \sigma_A y_t e^{-\kappa(T-t)} (1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\kappa} \end{aligned}$$

となる. したがって, デフォルト強度  $\lambda_T$  と対数担保価値  $\ln A_T$  の共分散は,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \text{cov}_t(\lambda_T, \ln A_T) &= \text{cov}_t(y_T^2 + 2(\alpha + \beta T)y_T, \ln A_T) \\ &= \frac{2\rho\sigma_y\sigma_A(1 - e^{-\kappa(T-t)})\{\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}\}}{\kappa} \end{aligned}$$

となる.

デフォルト強度  $\lambda_T$  の分散は,

$$\begin{aligned} \text{var}_t[\lambda_T] &= \text{cov}_t(y_T^2 + 2(\alpha + \beta T)y_T, y_T^2 + 2(\alpha + \beta T)y_T) \\ &= \text{var}_t[y_T^2] + 4(\alpha + \beta T)^2 \text{var}_t[y_T] + 4(\alpha + \beta T) \text{cov}_t(y_T, y_T^2) \end{aligned}$$

であり, 右辺の各要素は,

$$\begin{aligned} \text{var}_t[y_T] &= \sigma_y^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-s)} ds = \frac{\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})}{2\kappa} \\ \text{cov}_t(y_T, y_T^2) &= 2y_t e^{-\kappa(T-t)} \sigma_y^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-s)} ds \\ &= \frac{\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})y_t e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa} \\ \text{var}_t[y_T^2] &= 4\{y_t e^{-\kappa(T-t)}\}^2 \sigma_y^2 \int_t^T e^{-2\kappa(T-s)} ds \\ &= \frac{2\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})y_t^2 e^{-2\kappa(T-t)}}{\kappa} \end{aligned}$$

となるから,

$$(4.4) \quad \text{var}_t[\lambda_T] = \frac{2\sigma_y^2(1 - e^{-2\kappa(T-t)})\{\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}\}^2}{\kappa}$$

を得る.

対数担保価値  $\ln A_T$  の分散は

$$(4.5) \quad \text{var}_t[\ln A_T] = \sigma_A^2 \int_t^T ds = \sigma_A^2(T - t)$$

であるので, (4.3), (4.4), (4.5)式より, デフォルト強度  $\lambda_T$  と対数担保価値  $\ln A_T$  の観測時点  $t$  での相関は

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \text{corr}_t(\lambda_T, \ln A_T) &= \frac{\text{cov}_t(\lambda_T, \ln A_T)}{\sqrt{\text{var}_t[\lambda_T]} \sqrt{\text{var}_t[\ln A_T]}} \\ &= \frac{2\rho(1 - e^{-\kappa(T-t)})}{\sqrt{2\kappa(T-t)}(1 - e^{-2\kappa(T-t)})} \frac{\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}}{|\alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)}|} \end{aligned}$$

で与えられる.

(4.6)式の条件付相関は,  $\kappa$  を正に設定することにより,

$$(4.7) \quad \alpha + \beta T + y_t e^{-\kappa(T-t)} > 0$$

という条件を満たせば,  $\rho$  と同じ符号となる. この条件は  $\beta$  を非負と設定したうえで, 初期時点  $t=0$  では  $\alpha + y_0 e^{-\kappa T}$  を正に設定すれば満たされることがわかる. すなわち, 初期観測時点  $0$  では, このようなパラメータの選択により,  $\rho < 0$  とすることでデフォルト強度と対数担保価値との間に負の相関を表現することができる.

#### 4.2 期中での条件付相関の符号変化

上記(4.6)式は、観測時点  $t$  における条件付相関を表しており、初期観測時点  $t=0$  ではその制御を的確に行えることが示されたが、ここでは、その後の時間発展に伴い、観測時点  $t(>0)$  における条件付相関がどのように振る舞うか考察する。

潜在変数  $y_t$  は、(2.4)式の Ornstein-Uhlenbeck 過程に従うため、時間経過に伴い、負の値をとることもありうる。この場合、原理的には、デフォルト強度と対数担保価値の相関の符号が設定した  $\rho$  と逆の符号になることもありうる。その条件は(4.7)式の不等号を逆にして

$$(4.8) \quad y_t < -(\alpha + \beta T)e^{\kappa(T-t)}$$

で与えられる。

デフォルト強度と対数担保価値の相関が設定した相関  $\rho$  と逆符号になる(4.8)式の条件は、 $y_t$  は0に中心回帰するように設定されているため、他のパラメータ  $\kappa$ ,  $\sigma_y$  も適切に設定されていれば、(4.8)式右辺の水準まで低下することは稀であり、成立しにくいことがわかる。

現実的な設定として  $\rho < 0$  と設定した際、(4.8)式の条件を満たし、デフォルト強度と対数担保価値が正の相関を持つことになったとしても、数式上の問題はないほか、非現実的とも限らない。実際、 $y_t + \alpha + \beta t$  が負の値になる状況を考えると、その直前では  $y_t + \alpha + \beta t$  は0に近い値になるため、デフォルト強度  $\lambda_t$  も0に近い値となっている。企業がそうした良い状態にあれば、デフォルト強度と対数担保価値の相関が必ずしも負にはならない可能性も考えられる。本稿での期待損失の評価は、期中でデフォルト強度と対数担保価値とが正に相関する可能性も織り込んだ評価になっているともいえる。

#### 5. おわりに

本稿では、デフォルト率と回収率の相関を考慮した担保付貸出の損失評価を考えた。具体的には、デフォルト強度について、山下・吉羽(2010)の平方根過程とは異なる方法として、2次ガウス過程を想定し、デフォルト強度の非負性を保ち担保価値との相関を持つモデルを構築した。そのうえで、担保付貸出の期待損失を測度変換を用いて解析的に評価した。さらに、より一般的に担保付貸出の損失の高次モーメントについても測度変換を用いて解析的に評価した。ここで得られた高次モーメントを用いれば、損失分布の近似を行うことも可能である。

2次ガウス過程のモデルは3変量以上にも拡張することができ、例えば、確率的な無リスク短期金利を取り込んで担保付貸出の価値評価を行うことができる。ただし、多変量への拡張に伴って多くの相関を設定すると、得られる係数の常微分方程式が閉じた形では解けないことが多くなる。その場合でも Runge-Kutta 法などの数値計算により比較的高速な評価は可能である。

本稿では単独の担保付貸出を対象として損失分布を評価したが、同じモデルのもとで分析対象を担保付貸出ポートフォリオに拡張し、個々の貸出のデフォルト強度間や担保価値間にも相関を考慮してポートフォリオの損失分布を評価することも考えられる。ポートフォリオ損失の分散を計算する場合は、期待損失で1階積分で評価されていた点は2階積分での評価となり、少し計算に時間がかかることになる。また、担保付貸出ポートフォリオに拡張する際、本稿で扱ったような拡散過程だけではなく、デフォルト強度あるいはその潜在変数に同時のジャンプ項を加えてデフォルトの伝播を表現することも、今後の課題として考えられる。

## 補論

## A. 2次ガウス形式の従う常微分方程式の導出

本補論では, (3.4) 式の係数  $C_0(t, T)$ ,  $C_1(t, T)$ ,  $C_2(t, T)$  が, (3.5)~(3.8) 式の常微分方程式を満たすことを次の補題で証明する.

**補題 1.** (2.4) 式の潜在変数  $y_t$  を用いて (2.3) 式のデフォルト強度で表現される (3.1) 式の生存確率は, (3.4) 式の形式で評価されるとき, その係数  $C_0(t, T)$ ,  $C_1(t, T)$ ,  $C_2(t, T)$  は, (3.5)~(3.7) 式の常微分方程式を満たし, 境界条件は (3.8) 式で与えられる.

**証明.** まず,

$$(A.1) \quad M_t = E_t \left[ \exp \left( - \int_0^T \lambda_u du \right) \right] = \exp \left( - \int_0^t \lambda_u du \right) \Gamma(t, T)$$

とおくと,  $M_t$  はマルチンゲールになるため,  $dM_t$  のドリフト項は 0 でなければならない. 伊藤の公式を用いてその条件を求めると,

$$(A.2) \quad 0 = -\lambda_t \Gamma(t, T) + \frac{\partial \Gamma(t, T)}{\partial t} - \kappa y_t \frac{\partial \Gamma(t, T)}{\partial y_t} + \frac{\sigma_y^2}{2} \frac{\partial^2 \Gamma(t, T)}{\partial y_t^2}$$

という偏微分方程式が成立する.  $\Gamma(t, T)$  の解が (3.4) 式のように与えられるとして, (A.2) 式の偏微分方程式に代入し,  $y_t$  に関して 0~2 次項を整理すると, 係数  $C_0(t, T)$ ,  $C_1(t, T)$ ,  $C_2(t, T)$  は (3.5)~(3.7) 式の常微分方程式を満たすことがわかる. また,  $\Gamma(T, T) = 1$  より, 境界条件 (3.8) 式が得られる. □

## B. 測度変換による相関とブラウン運動の関係

本補論では, 確率測度  $\tilde{P}$  のもとでのブラウン運動の変換式である (3.26) 式と, より一般的な  $n$  次モーメントに関する確率測度  $P^{(n)}$  のもとでのブラウン運動の変換式である (3.43) 式を, 次の補題により確認する.

**補題 2.** (3.41) 式の  $\eta(t; A^n)$  を Radon-Nikodym 密度過程とする確率測度  $P^{(n)}$  のもとでは, (3.43) 式で与えられる  $W_t^{A(n)}$ ,  $W_t^{y(n)}$  が標準ブラウン運動となる.

**証明.**  $W_t$  が標準ブラウン運動であるとは, 以下の 3 点を満たすことであることに注意する.

- (1) (連続性)  $W_t$  が  $t$  に関して連続で  $W_0 = 0$ .
- (2) (定常正規性) 任意の  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N$  に対して,  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) が  $t_{j-1}$  までの履歴によらずにそれぞれ正規分布  $N(0, t_j - t_{j-1})$  に従う.
- (3) (独立増分性) 任意の  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N$  に対して,  $W_{t_j} - W_{t_{j-1}}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) が互いに独立である.

ここで, 1 の連続性については,  $W_t^{A(n)}$ ,  $W_t^{y(n)}$  のいずれについても (3.43) 式の定義から明らかであるので, 2 の定常正規性と 3 の独立増分性を示せばよい.

(2.2) 式より

$$(B.1) \quad A_t = A_0 e^{(\mu_A - \sigma_A^2/2)t + \sigma_A W_t^A}$$

となるから, (3.41)式より

$$(B.2) \quad \frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} = \frac{A_{t_j}^n e^{-\mu_A^{(n)} t_j}}{A_{t_{j-1}}^n e^{-\mu_A^{(n)} t_{j-1}}} = e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 + n \sigma_A W_{t_j}^A - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A}$$

となる.

$W_t^{A(n)}$  について, 確率測度  $P^{(n)}$  のもとで 2 の定常正規性は, 特性関数を考えると, 任意の  $z \in \mathbb{R}$  で,

$$(B.3) \quad E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] = \exp(-z^2(t_j - t_{j-1})/2),$$

を示せばよい. (3.43)式の定義と (B.2)式を用いると,

$$(B.4) \quad \begin{aligned} E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] &= E_{t_{j-1}} \left[ \frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} e^{iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A - n \sigma_A (t_j - t_{j-1}))} \right] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A} E_{t_{j-1}} [e^{n \sigma_A W_{t_j}^A} e^{iz(W_{t_j}^A - W_{t_{j-1}}^A - n \sigma_A (t_j - t_{j-1}))}] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A - iz n \sigma_A (t_j - t_{j-1}) - iz W_{t_{j-1}}^A} E_{t_{j-1}} [e^{(n \sigma_A + iz) W_{t_j}^A}] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A - iz n \sigma_A (t_j - t_{j-1}) - iz W_{t_{j-1}}^A} \\ &\quad \times e^{(n \sigma_A + iz) W_{t_{j-1}}^A + (n \sigma_A + iz)^2 (t_j - t_{j-1})/2} \\ &= e^{-z^2 (t_j - t_{j-1})/2} \end{aligned}$$

となり, (B.3)式が示される. 次に, 3の独立増分性を示すには,

$$(B.5) \quad E^{(n)} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^N z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}) \right) \right] = \prod_{j=1}^N E^{(n)} [\exp(iz_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] ]$$

を示せばよい. これは, (B.3)式より,

$$(B.6) \quad \begin{aligned} E^{(n)} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^N z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}) \right) \right] \\ &= E^{(n)} \left[ E_{t_{N-1}}^{(n)} [\exp(iz_N (W_{t_N}^{A(n)} - W_{t_{N-1}}^{A(n)}))] \exp \left( i \sum_{j=1}^{N-1} z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}) \right) \right] \\ &= e^{-z_N^2 (t_N - t_{N-1})/2} E^{(n)} \left[ \exp \left( i \sum_{j=1}^{N-1} z_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}) \right) \right] \\ &= \dots = \prod_{j=1}^N e^{-z_j^2 (t_j - t_{j-1})/2} = \prod_{j=1}^N E^{(n)} [\exp(iz_j (W_{t_j}^{A(n)} - W_{t_{j-1}}^{A(n)}))] \end{aligned}$$

となって示される. したがって,  $W_t^{A(n)}$  は標準ブラウン運動である.

同様に,  $W_t^{y(n)}$  について, 任意の  $z \in \mathbb{R}$  で, (3.43)式の定義と (B.2)式より,

$$(B.7) \quad \begin{aligned} E_{t_{j-1}}^{(n)} [\exp(iz(W_{t_j}^{y(n)} - W_{t_{j-1}}^{y(n)}))] &= E_{t_{j-1}} \left[ \frac{\eta(t_j; A^n)}{\eta(t_{j-1}; A^n)} e^{iz(W_{t_j}^y - W_{t_{j-1}}^y - n \rho \sigma_A (t_j - t_{j-1}))} \right] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A} E_{t_{j-1}} [e^{n \sigma_A W_{t_j}^A} e^{iz(W_{t_j}^y - W_{t_{j-1}}^y - n \rho \sigma_A (t_j - t_{j-1}))}] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A - iz n \rho \sigma_A (t_j - t_{j-1}) - iz W_{t_{j-1}}^y} E_{t_{j-1}} [e^{n \sigma_A W_{t_j}^A + iz W_{t_j}^y}] \\ &= e^{-n^2 \sigma_A^2 (t_j - t_{j-1})/2 - n \sigma_A W_{t_{j-1}}^A - iz n \rho \sigma_A (t_j - t_{j-1}) - iz W_{t_{j-1}}^y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times e^{n\sigma_A W_{t_j-1}^A + izW_{t_j-1}^y + (n\sigma_A + i\rho z)^2(t_j - t_{j-1})/2 - (1-\rho^2)z^2(t_j - t_{j-1})/2} \\ & = e^{-z^2(t_j - t_{j-1})/2} \end{aligned}$$

となって、2の定常正規性が示され、(B.7)式を用いて(B.6)式と同じ手順で3の独立増分性が示されるため、 $W_t^{y(n)}$ は標準ブラウン運動となる。□

確率測度 $\tilde{P}$ のもとでのブラウン運動の変換式が(3.26)式で与えられることは、補題2を $n=1$ で考えれば確認できる。

注.

- 1) 満期前にデフォルトすると、借り手は期限の利益を喪失し、貸し手は借り手に額面 $D$ の返済をその時点で請求できるが、実際には担保資産でのみしか回収できないと考えている。この損失の定義では、山下・吉羽(2010)のモデルと同様、デフォルト時に担保価値が高まっているときには100%超の回収率となることもありうるとしている。実際に回収率が100%を超えることは生じ得るため、この仮定は不自然なものではない。また、担保資産の減価割合 $\delta$ 等のパラメータを適切に設定すれば、100%を超える可能性は限定的になる。
- 2) ここで、確率測度 $P$ は、リスク中立確率ではなく、観測確率を想定している。これは、現実の担保付貸出を考えたとき、その企業に流動性の高い社債や信用派生商品が取引されているケースが多いとはいえず、リスク中立確率でデフォルト強度を直接モデル化することは困難と考えられるためである。また、担保資産についても必ずしも流動性が高いとは考えにくいことから、観測確率でパラメータを特定化することを想定している。
- 3) ここで想定するOrnstein-Uhlenbeck過程は中心回帰水準が0の確率過程であるが、中心回帰水準 $\theta$ を持つOrnstein-Uhlenbeck過程を考えることも可能である。ただし、状態変数 $y_t$ はデフォルト強度 $\lambda_t$ を定めるための潜在変数であり、変数変換によりその回帰水準 $\theta$ は(2.3)式の $\alpha$ と同じ効果を持つだけであることがわかる。現実のデータからのパラメータの推定を考えると、 $\theta$ と $\alpha$ を識別できないことになるため、状態変数 $y_t$ は中心回帰水準が0の確率過程に従うとした。
- 4) 2重確率的な確率時刻の定義・条件および増大情報系の区別については、例えばMcNeil et al. (2005)の第9章を参照。
- 5) 観測確率のもとでの割引を考えるため、割引金利 $r$ はデフォルト強度や担保資産価値の変動に起因するリスク・プレミアムを加味した金利を想定している。ただし、リスク・プレミアムを考慮した金利が固定金利で表現できるかどうかは別途考察すべき問題である。実際のキャリブレーションでは、貸出先企業と同格付けの企業の平均貸出金利から銀行のマージンや営業コストを差し引いた値で代用することが考えられる。なお、リスク中立確率のもとで考えるのであれば、 $r$ を無リスク金利と考えればよい。
- 6) Radon-Nikodym密度過程による測度変換とGirsanovの定理、ブラウン運動の関係については、木島・田中(2007)の第3章を参照。(3.25)式の測度変換のもとで $\tilde{W}_t^A$ と $\tilde{W}_t^y$ が標準ブラウン運動になることは補論Bを参照。
- 7)  $C_2(t, T)$ はパラメータ $\alpha$ に依存しない係数であるので値は変化しない。
- 8) 本稿では、観測確率のもとで議論を行っているが、リスク中立確率のもとで(3.35)式を評価するとき、担保資産に配当がないと仮定すれば $\mu_A$ は無リスク金利 $r$ と一致するため、(3.35)式右辺は $A_t\{1 - \Gamma(t, T|\tilde{\alpha}, \tilde{y}_t)\}$ と整理できる。
- 9) 生存確率 $\Gamma(0, s|\alpha, y_0)$ を積分の測度として時間 $s$ について被積分関数 $e^{-as}$ を積分する計

算は、部分積分により、

$$\int_0^T e^{-as} d_s \Gamma(0, s | \alpha, y_0) = e^{-aT} \Gamma(0, T | \alpha, y_0) - 1 + a \int_0^T e^{-as} \Gamma(0, s | \alpha, y_0) ds$$

となって、被積分関数を  $e^{-as} \Gamma(0, s | \alpha, y_0)$  とした時間  $s$  に関する通常の Riemann 積分に帰着する。以下で示す数値例は統計言語 R でプログラミングし、積分については標準の関数 `integrate()` の適応求積法 (adaptive quadrature) を用いて数値積分している。

- <sup>10)</sup>  $D, A_0, \delta, T, \mu_A$  は山下・吉羽(2010)の設定と同じである。 $\sigma_y$  は伊藤の公式より山下・吉羽(2010)の  $\sigma_h/2$  に対応させている。 $\sigma_A$  は山下・吉羽(2010)の  $\sigma_A \sqrt{h_t}$  と対応する。山下・吉羽(2010)では、デフォルト強度の初期値  $h_0$  と回帰水準  $\bar{h}$  として 4%, 3% という水準を考えていることを踏まえ、 $\lambda_t = 4\%$  の水準として  $\sigma_A$  を 10% に設定している。また、(2.3) 式のデフォルト強度の設定より、 $\beta = 0$  とすると、 $y_0 + \alpha$  はデフォルト強度の初期値  $\lambda_0$  の平方根となり、 $\alpha$  はデフォルト強度の回帰水準の平方根となる。それらの水準は  $\sqrt{0.04} = 0.2$  や  $\sqrt{0.03} \cong 0.17$  という水準である。そこで、 $y_0 = -0.03$ ,  $y_0 = 0.03$  の 2 つのパターンで、デフォルト強度の初期値と回帰水準に合わせて  $\alpha$  の水準を決めることにした。
- <sup>11)</sup> 後注 9 に示したように、この Stieltjes 積分を実際に計算する場合は、部分積分を適用し、通常の Riemann 積分に帰着してから数値積分パッケージを用いて計算を行う。後述の (3.49) 式右辺に含まれる 3 つの Stieltjes 積分の計算も同様である。

## 謝 辞

本稿の作成に当たっては、田中敬一教授(首都大学東京)より大変有益なコメントを頂いた。本稿の改訂に当たっては、西山陽一准教授(統計数理研究所)と 2 名の匿名の査読者からも有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝したい。なお、本稿に示されている意見は、筆者たち個人に属し、日本銀行の公式見解を示すものではない。また、ありうべき誤りはすべて筆者たち個人に属する。

## 参 考 文 献

- Ahn, D.-H., Dittmar, R. F. and Gallant, A. R. (2002). Quadratic term structure models: Theory and evidence, *Review of Financial Studies*, **15**, 243–288.
- Altman, E. I., Brady, B., Resti, A. and Sironi, A. (2005). The link between default and recovery rates: Theory, empirical evidence, and implications, *The Journal of Business*, **78**, 2203–2228.
- Duffie, D. and Liu, J. (2001). Floating-fixed credit spreads, *Financial Analysts Journal*, **57**(3), 76–87.
- 木島正明, 田中敬一(2007). 『資産の価格付けと測度変換』, 朝倉書店, 東京.
- Kijima, M., Tanaka, K. and Wong, T. (2009). A multi-quality model of interest rates, *Quantitative Finance*, **9**, 133–145.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, New Jersey.
- Pelsser, A. (1997). A tractable yield-curve model that guarantees positive interest rates, *Review of Derivatives Research*, **1**, 269–284.
- 山下智志, 吉羽要直(2010). デフォルト率と回収率の負の相関を考慮した担保付貸出の損失評価: CIR 型ハザード率過程での解析的評価, 日本銀行金融研究所ディスカッションペーパー・シリーズ No. 2010-J-10, 日本銀行金融研究所, 東京.



## Analytical Solution for $m$ -th Moment of a Collateralized Loan's Loss under a Quadratic Gaussian Default Intensity Process

Satoshi Yamashita<sup>1</sup> and Toshinao Yoshiba<sup>2</sup>

<sup>1</sup>The Institute of Statistical Mathematics

<sup>2</sup>Bank of Japan

In this study, we derive an analytical solution for the expected loss and the higher moment of loss distribution for a collateralized loan, focusing on the correlation between default intensity and collateral value. To ensure non-negativity of intensity, we assume a quadratic Gaussian process for the default intensity. The correlation between the default intensity and the collateral value is expressed by the correlation of the two Brownian motions that drive the movement of the state variables of the default intensity and the collateral value. Given these settings, we show the expected recovery value, which is a component of the expected loss, as given by a Stieltjes integral with a measure-changed survival probability. More generally, we also show that the  $m$ -th moment of loss distribution can be calculated by a combination of Stieltjes integrals with a measure-changed survival probability. Using numerical examples, we analyze the effect of the correlation on the expected loss and the standard deviation of the loss.