2013年6月14日　統計数理研究所　オープンハウス

厳密なカーネル平均を利用した状態空間フィルタリングアルゴリズム

西山　悠　統計的機械学習研究センター　特任助教

1 概要

- 近年，正定値カーネルを利用したノンパラメトリックベイズ推論が研究されている．確率モデルから得られる解析的なカーネル平均を利用して，ノンパラメトリックカーネル推論と確率モデルを組み合わせる推論手法を提案する．特に，状態空間モデルに応用し，状態遷移過程が加法的ガウスノイズによる既知の確率モデル，観測過程をノンパラメトリックに推定する場合のフィルタリングアルゴリズムを提案する．

2 背景

- カーネル平均を利用したベイズ推論：
  - HMM [Le Song et al., ICML2010]
  - Kernel Bayes' Rule (KBR) [Fukumizu et al., NIPS2011]
  - MDP [Grunewalder et al., ICML2012]
  - POMDP [Nishiyama et al., UAI2012]
- カーネル平均： 再生核ヒルベルト空間内での特徴量平均．

$$\mu_P := \mathbb{E}_P[k_{\mathcal{X}}(\cdot, X)] \in \mathcal{H}_{\mathcal{X}}. \tag{1}$$

- カーネルサムルール [Le Song et al., ICML2009]
  - サムルール：(X,Y) の入出力関係 $p(y|x)$ と入力 $\pi(x)$ から出力 $q(y)$ を推論する．

$$U_{Y|X} : \Pi(\cdot) \mapsto Q(\cdot) \tag{2}$$

  - カーネルサムルール：入力のカーネル平均 μ_Π から出力のカーネル平均 μ_Q をノンパラメトリックに推論する．

$$\mathcal{U}_{Y|X} : \mu_\Pi \mapsto \mu_Q \tag{3}$$

3 確率モデル入りカーネルベイズ推論

- 図 1左上：(X, Y) の関係はサンプルからノンパラメトリックに学習する．(Y, Z) の関係は既知の確率モデル $p(y|x)$(e.g., ガウス分布) が与えられているとする．
  - カーネルサムルール $\mathcal{U}_{Y|X}$ [Le Song et al., ICML2009]

$$\hat{\mathcal{U}}_{Y|X} : \sum_{i=1}^{l} \alpha_i k_{\mathcal{X}}(\cdot, \tilde{x}_i) \mapsto \sum_{j=1}^{n} k_{\mathcal{Y}}(\cdot, y_j) \sum_{i=1}^{l} [(G_X + n\lambda I_n)^{-1} G_{X\tilde{X}}]_{ji} \alpha_i. \tag{4}$$

  - カーネルサムルール $\mathcal{U}_{Z|Y}$ [提案法]

$$\bar{\mathcal{U}}_{Z|Y} : \sum_{i=1}^{l} \tilde{\alpha}_i k_{\mathcal{Y}}(\cdot, y_i) \mapsto \sum_{i=1}^{l} \tilde{\alpha}_i \mu_{Z|y_i} \tag{5}$$

ここで $\mu_{Z|y_i}$ は，確率モデルにより与えられる解析的な条件付きカーネル平均 (例：後述)．$\hat{\mu}_Z = \bar{\mathcal{U}}_{Z|Y} \hat{\mathcal{U}}_{Y|X} \hat{\mu}_X$ により推論．

- 図 1右上は図 1左上の逆 $\hat{\mu}_Z = \hat{\mathcal{U}}_{Z|Y} \bar{\mathcal{U}}_{Y|X} \hat{\mu}_X$.
- 解析的条件付きカーネル平均の例：

Example 1 (ガウス分布＋ガウスカーネル).

$$\mu_{Y|x} = \sqrt{|2\pi\Sigma|} N(\cdot | m(x), W + \Sigma) \in \mathcal{H}_{\mathcal{Y}} \tag{6}$$

Example 2 (ラプラス分布＋ラプラスカーネル).

$$\mu^{(L)}_{X;m}(\tilde{x}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda e^{-\sigma|\tilde{x}-m|} - \sigma e^{-\lambda|\tilde{x}-m|})}{\lambda^2 - \sigma^2} & (\lambda \neq \sigma) \\ \dfrac{(1 + \sigma|\tilde{x} - m|) e^{-\sigma|\tilde{x}-m|}}{2} & (\lambda = \sigma) \end{cases} \tag{7}$$

Example 3 (混合分布). $\mu_{Y|x} = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \mu^{(k)}_{Y|x}$.

4 状態空間モデルフィルタリングへの応用

状態遷移過程は解析的カーネル平均が求まる既知の確率モデル，観測過程はカーネル平均によりノンパラメトリックに推定するフィルタリングアルゴリズム (図1下).

> **Initial Belief:** prior kernel mean μ_{X_1}.
> **Observe:** $z_1 \in \mathcal{Z}$
> **Filtering:** $\mu_{X_1|z_1} \leftarrow$ Kernel Bayes' Rule
> **for** $t = 1 : T - 1$ **do**
> 　**Prediction Step:** $\mu_{Z_{t+1}|z_{1:t}} = \hat{\mathcal{U}}_{Z|X} \bar{\mathcal{U}}_{X'|X} \mu_{X_t|z_{1:t}}$.
> 　**Observe:** $z_{t+1} \in \mathcal{Z}$
> 　**Filtering Step:** $\mu_{X_{t+1}|z_{1:t+1}} \leftarrow$ Kernel Bayes' Rule
> **end for**

- 図 2: 状態遷移 $(u_{t+1}, v_{t+1})^\top = (1 + b\sin(M\theta_{t+1}))(\cos\theta_{t+1}, \sin\theta_{t+1})^\top + \varsigma_t$, $\varsigma_t \sim N(\mathbf{0}, \sigma_h^2 I_2)$, $\theta_{t+1} = \theta_t + \eta$, $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. 観測過程 $Z_t = g(u_t, v_t) + \xi_t$, $\xi_t \sim \mathrm{Laplace}(\mathbf{0}, \lambda_L^{-1})$. 右上図: $(b, M, \eta, \sigma_h, \sqrt{2}\lambda_L^{-1}) = (0, 8, 0.1, 0.2, 0.2)$, g は恒等写像. 左下図:$(0.4, 8, 1, 0.2, 0.05)$, $g(u, v) = (\mathrm{sign}(u)|u|^{\frac{1}{2}}, \mathrm{sign}(v)|v|^{\frac{1}{2}})$. EKF の結果は $[0.0354, 0.0111]$. 右下図: 左下図の状態遷移ノイズを混合正規分布にしたもの．EKF の結果は $[0.0698, 0.0287]$. 図3はPOMDPへの適用結果.

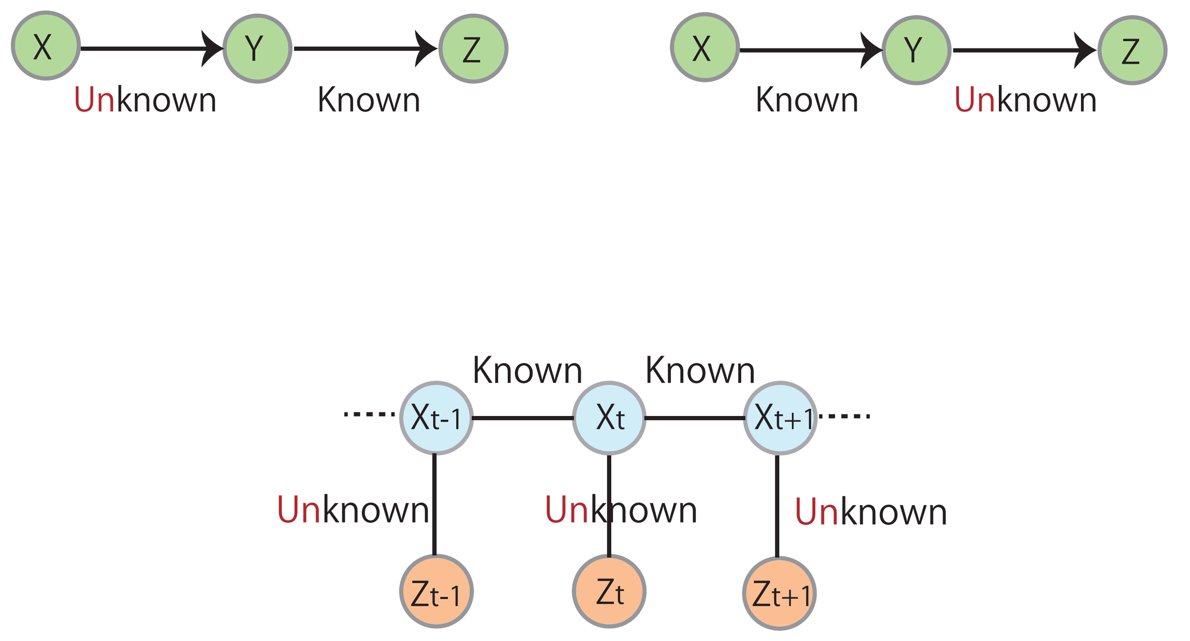

Figure 1: サムルールと状態空間モデル

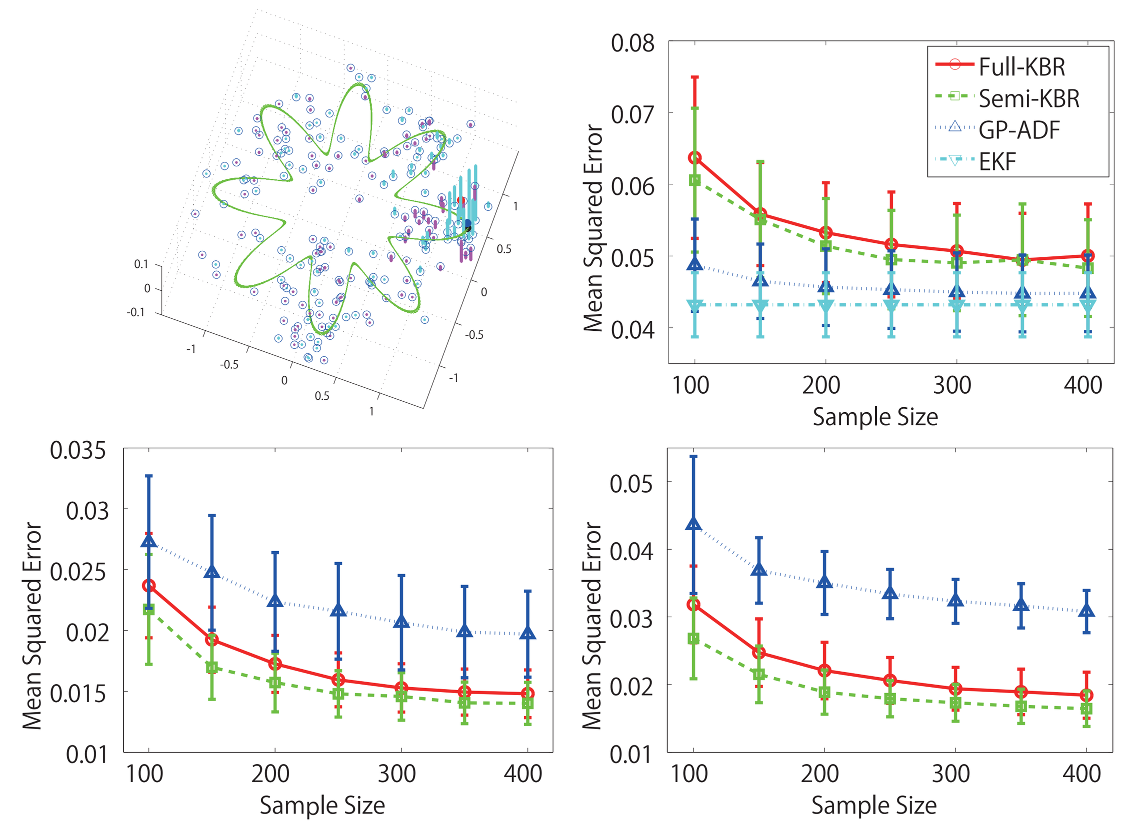

Figure 2: フィルタリング

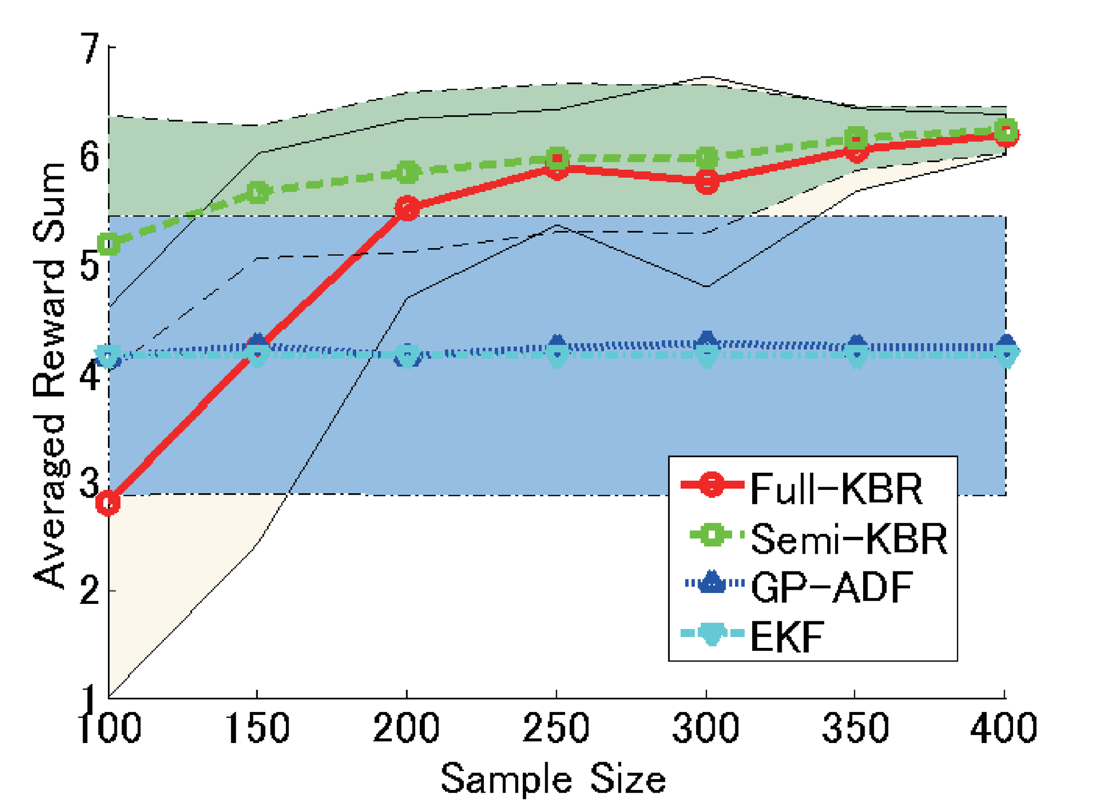

Figure 3: POMDP獲得報酬和