2013年6月14日　統計数理研究所　オープンハウス

確率測度の最適化とレート 歪み関数

池田 思朗　数理・推論研究系 准教授

共同研究者 渡辺一帆 (奈良先端大学)

はじめに

$$U \sim p(U) \longrightarrow \boxed{\text{Channel: } q(U|V)} \longrightarrow V \sim q(V)$$

Figure 1: 入力，通信路，出力．

レート 歪関数 $R(D)$ は通信路の入力 U の分布 $p(U)$ が与えられたとき，入力 U と出力 V の間にある程度の歪みを許した中でどのくらいの情報が伝達できるかをあらわす関数である．$R(D)$ は次の最適化問題の解として与えられる [1].

$$R(D) = \inf_{q(v|u)} I(U;V) \quad \text{s. t.} \quad E_{q(v|u)p(u)}[d(u,v)] \le D$$

ここで $d(u,v)$ は u と v の間の誤差をあたえる関数である．また，$I(U;V)$ は以下のように定義される Kullback-Leibler ダイバージェンスである．

$$I(U;V) = \int\int q(v|u)p(u)\log\frac{q(v|u)}{\int q(v|u')p(u')du'}dudv.$$

この問題は入力の分布が与えられたときに，通信路の確率測度 $q(v|u)$ を最適化する問題になっている．一般には，未定定数を s として KKT 条件を求めることによって解かれる [1]．最適な v の周辺分布を $q_s(v)$ とかくと，確率が定義されている v の集合を $\mathcal{V}$ として次の関係がなりたつ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(u)\exp\{sd(u,v)\}}{\int_{\mathcal{V}} q_s(v')\exp\{sd(u,v')\}dv'}du = 1, \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

さらに，$q_s(v|u)$ の分布は次のようにかける．

$$q_s(v|u) = \lambda_s(u)q_s(v)\exp\{sd(u,v)\}$$

$$\text{ただし}\quad \lambda_s(u) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} q_s(v)\exp\{sd(u,v)\}dv\right]^{-1}.$$

こうして $q_s(v|u)$ $q_s(v)$, $\lambda_s(u)$ が得られれば，

$$D_s = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda_s(u)q_s(v)p(u)d(u,v)\exp\{sd(u,v)\}dvdu,$$

$$R(D_s) = sD_s + \int_{-\infty}^{\infty} p(u)\log\lambda_s(u)du.$$

となる．

この最適解として得られる分布 $q_s(v|u)$ 及び $q_s(v)$ は U, V が連続値として定義されているとしても場合によって，離散分布，あるいは離散分布と連続分布の混合分布となりうることが知られている [2].

我々は入力をガンマ分布，歪関数を対数の差の絶対値で定義し，この問題を考えた [3, 4]．すなわち

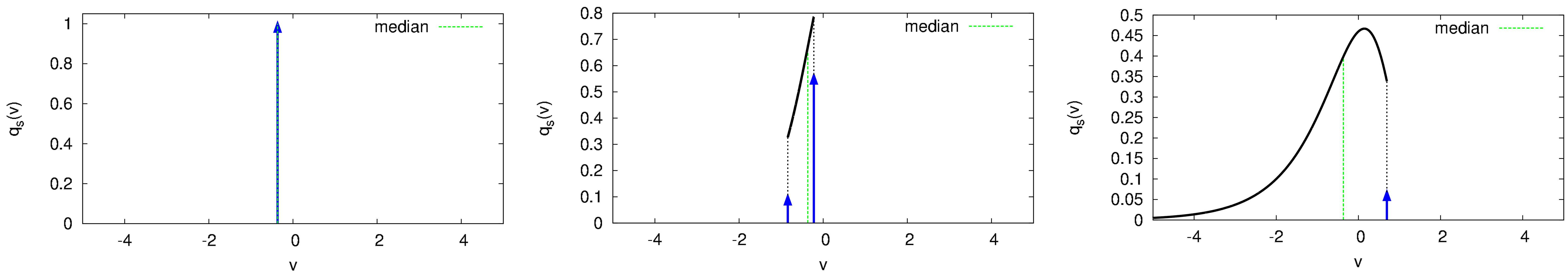
$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\exp(-x), \quad d(x,y) = |\log x - \log y|$$

として，レート 歪関数 $R(D)$ を達成する $p(Y|X)$, $p(Y)$ を考える．

便利のため，$u = \log x$, $v = \log y$ と変数変換すると，

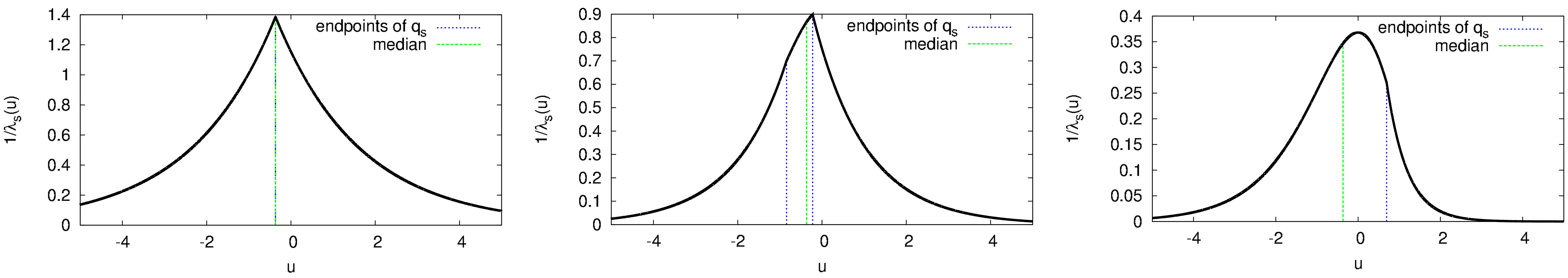
$$p(u) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\exp(u\alpha - e^u), \quad d(u,v) = |u - v|$$

となる．この結果，最適な分布は s の値に応じて離散分布から離散と連続分布の混合となること，またその分布の台が s に応じて変化することが示せた．この結果については昨年度，今年度と学会で発表し，論文を作成中である．



(a) (b) (c)

Figure 2: s を変化させたときの最適な $q_s(v)$ の形．(a) $s = -\log 2$, (b) $s = -0.8$, (c) $s = -2.0$.



(a) (b) (c)

Figure 3: s を変化させたときの最適な $\lambda_s(u)$ の形．(a) $s = -\log 2$, (b) $s = -0.8$, (c) $s = -2.0$.

参考文献

[1] T. Berger, *Rate Distortion Theory: A Mathematical Basis for Data Copmpression*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.

[2] H. H. Tan and K. Yao, “Evaluation of rate-distortion functions for a class of independent identically distributed sources under an absolute magnitude criterion,” *IEEE trans. Inform Theory*, IT-21(1), pp.59-64, 1975.

[3] 渡辺，池田．Rate-distortion function for gamma sources under absolute-log distortion. *SITA2012*, 6.2.1, 別府ロイヤルホテル, December, 2012.

[4] K. Watanabe and S. Ikeda. Rate-distortion function for gamma sources under absolute-log distortion measure. *ISIT2013*, Istanbul, Turkey, July, 2013.