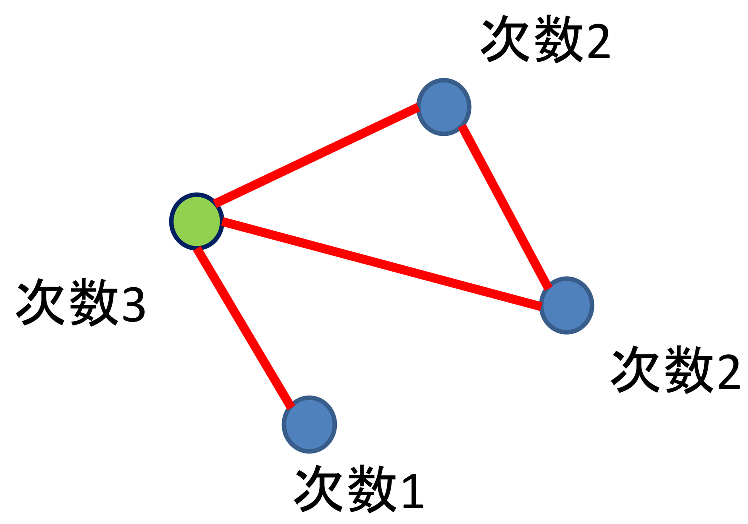
固有ベクトルに関する裾野の分布と隣接行列

高橋久尚　　サービス科学研究センター　特任研究員

【行列とネットワーク】

- ネットワークのノード間の接続を行列成分A_{ij}の0,1で表現
- ランダム行列（固有値がエネルギー分布）
- ランダム電流（Laplacian matrix）
- PangRank
- クラスタリング



【隣接行列】

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & & & 1 & 0 \\
1 & 0 & & \cdots & & & \\
0 & & 0 & & & & \\
 & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\
 & & & & 0 & & \\
1 & & & \cdots & & 0 & \\
0 & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

【ランダム行列】

二つの異なる次数を持つネットワークに注目

はじめに頂点の数を決めて、その次数を決定する

たとえば、

$$
p(k) = \begin{cases} 0.9 & \text{if } k = 4, \\ 0.1 & \text{if } k = 8, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

次に次数が正しくなるように、エッジを決定する

ネットワークをランダムに生成できる。

さらに、隣接行列のノード間の接続を表す1を確率的に± 1 に変更する

$$
p_{\mathrm{J}}(J_{ij}|\Delta) = \frac{1+\Delta}{2}\delta(J_{ij}-1) + \frac{1-\Delta}{2}\delta(J_{ij}+1)
$$

【行列の固有値問題】

行列が小さければ、パワーメソッドと呼ばれる手法が知られている

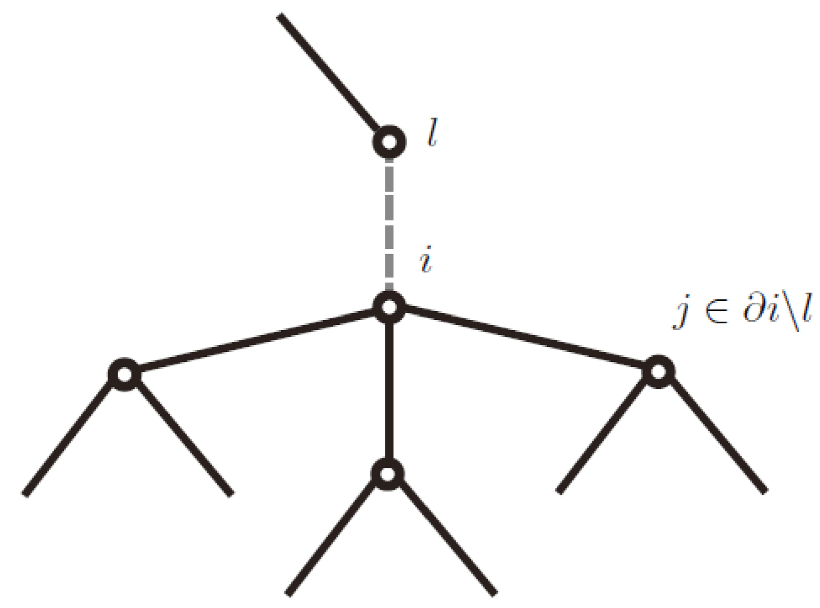
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_k &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k, & \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}_k &= \boldsymbol{v}_1, \\
\boldsymbol{x}_{k+1} &= \frac{1}{c_k}\boldsymbol{y}_k, & \lim_{k\to\infty} c_k &= \lambda_1.
\end{aligned}
$$

$$
|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|
$$

- 有限の大きさの行列に関する結果しか分からない

【Cavity 法】

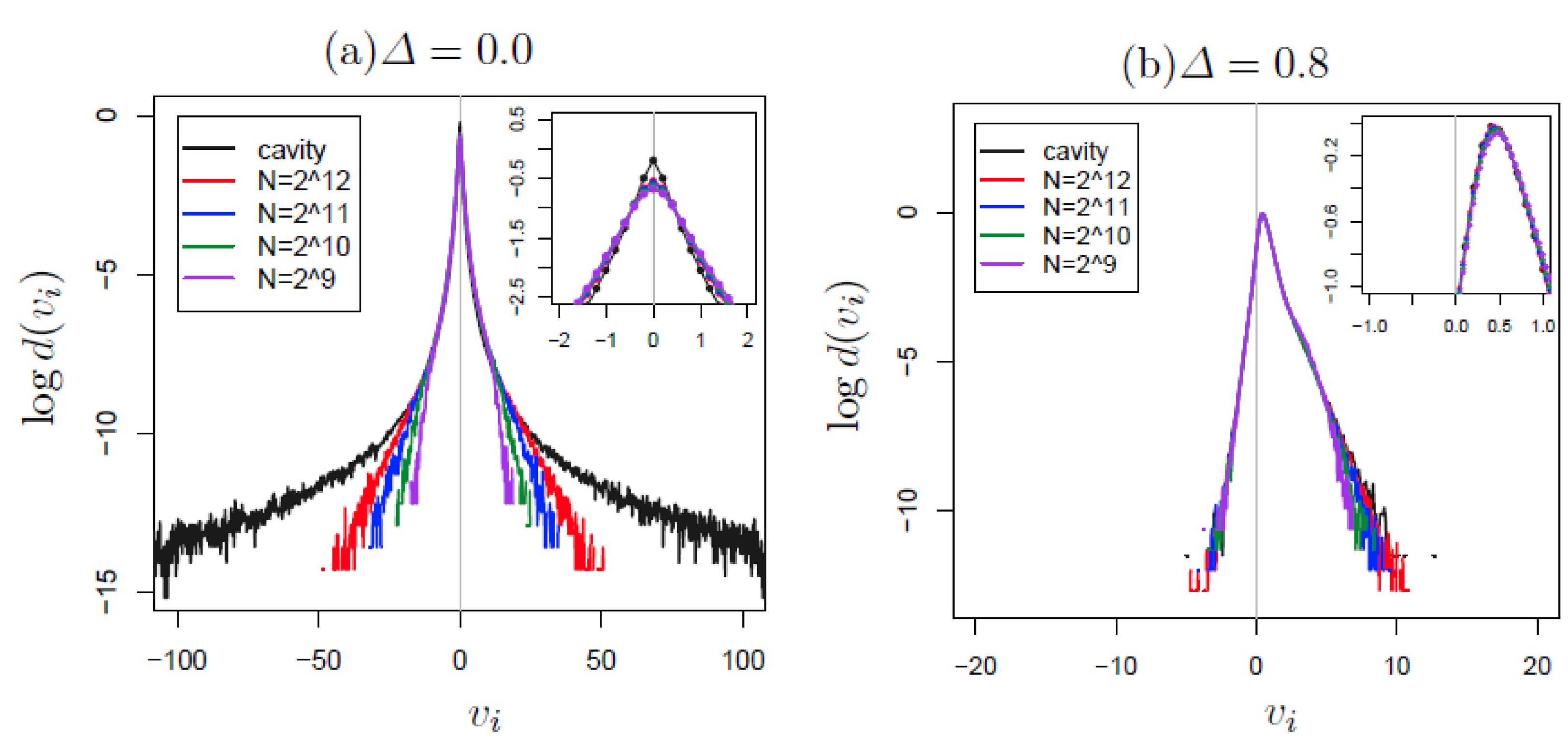
ネットワークに穴を作って相互作用を考える



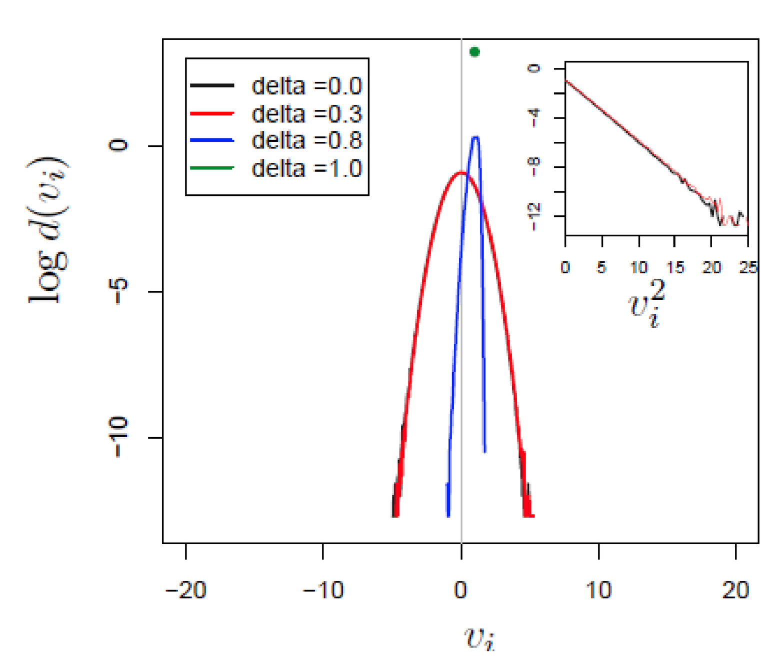
- ノードの数が無限大のときを考える。エッジの密度が低いので、ループが無視できる
- Survey propagation, belief propagation などと類似の考え方
  ベイズの定理で考えると、一部の多次元確率密度を独立と考えることに対応。極端なところだと、単純ベイスモデル
- 実際の計算では、population dynamical method を使う
  モンテ･カルロ法、粒子フィルタリングなどと同種の手法

【結果】

- **Δがある程度の大きさで、異なる次数のノードが含まれており、大きい方の次数の比率が小さいときに固有ベクトル分布は、すそ野が重くなる。**
- 2-DTD



- 8-regular graph　の場合（$N = 2^{12}$）



詳細は

http://arxiv.org/abs/1212.4381