2013年6月14日　統計数理研究所　オープンハウス

特性関数によって特徴づけられる円周上の確率分布

加藤　昇吾　　数理・推論研究系　助教

はじめに

Wrapped Cauchy分布

Wrapped Cauchy分布（WC分布）は円周上の確率分布として知られている．その確率密度関数は，

$$f(\theta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\mu)},\qquad -\pi\le\theta<\pi, \tag{1}$$

で与えられる．ここで，$-\pi\le\mu<\pi$，$0\le\rho<1$.

この分布には２つのパラメータμとρがあり，μは分布の位置を，ρは分布の集中度を調節している（図１）．

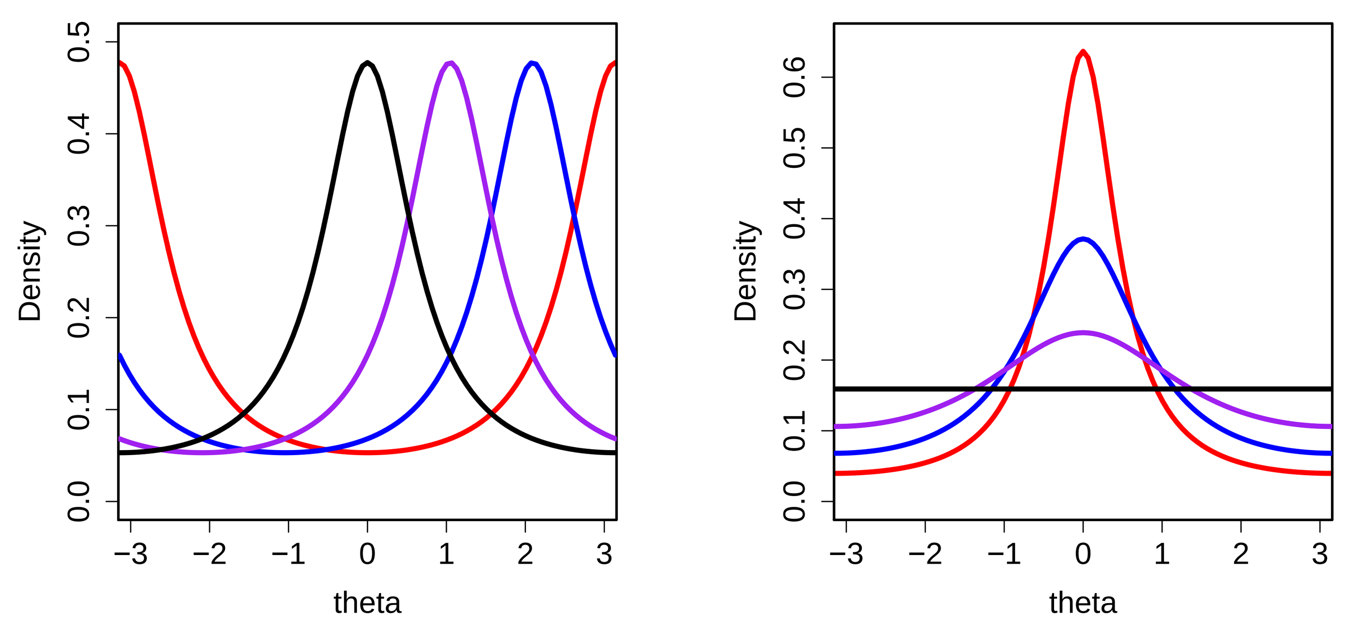


図１．確率密度関数 (1) のプロット．
（左）$\rho=0.5$, $\mu=0$, $\pi/3$, $2\pi/3$, π,（右）$\mu=0$, $\rho=0$, 0.2, 0.4, 0.6.

研究の目的

WC分布は，多くの扱いやすい性質を持ち，円周上の確率分布として重要な役割を果たしている．

しかし，歪度や尖度を自由に調節できず，柔軟性に問題がある．

そこで本報告では，WC分布を４パラメータ分布へと拡張し，位置と集中度に加え，歪度と尖度も自由に調節できる新たな確率分布を提案する．

特性関数によって特徴づけられる確率分布

本報告において提案する確率分布は特性関数によって定義される．

特性関数

円周$[-\pi,\pi)$上に値をとる確率変数Θが，分布関数Fを持つとする．このとき，Θのk次特性関数は，

$$\phi_\Theta(k)=E(e^{ik\Theta})=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\theta}dF(\theta),\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

で定義される．もし，Θ_cがWC分布 (1) に従うときには，

$$\phi_{\Theta_c}(k)=\begin{cases}\left(\rho e^{i\mu}\right)^k, & k=0,1,2,\ldots,\\ \left(\rho e^{-i\mu}\right)^{-k}, & k=-1,-2,\ldots,\end{cases}$$

となる．特性関数は分布を一意に定めることが知られている．

分布の定義 [1]

本報告で提案する確率分布を特性関数

$$\psi_\Theta(k)=\begin{cases}\xi e^{i\zeta}\left(\rho e^{i\eta}\right)^k, & k=1,2,\ldots,\\ 1, & k=0,\\ \xi e^{-i\zeta}\left(\rho e^{-i\eta}\right)^{-k}, & k=-1,-2,\ldots,\end{cases} \tag{2}$$

で定義する．ここに，$-\pi\le\eta,\zeta<\pi$，$0\le\rho,\xi<1$，$\rho^2\{(\cos\zeta-\xi)^2+\sin^2\zeta\}\le(1-\rho\xi)^2$.

確率密度関数

パラメータを$\mu=\eta+\zeta$，$\gamma=\rho\xi$，$\alpha_2=\rho^2\xi\cos\zeta$，$\beta_2=\rho^2\xi\sin\zeta$ と取り直すことにする．このとき，分布 (2) の密度関数は以下で与えられる．

$$g(\theta)=\frac{1}{2\pi}\left[1+\frac{2\gamma^2\{\gamma\cos(\theta-\mu)-\alpha_2\}}{\gamma^2+\alpha_2^2+\beta_2^2-2\gamma\{\alpha_2\cos(\theta-\mu)+\beta_2\sin(\theta-\mu)\}}\right],\quad -\pi\le\theta<\pi. \tag{3}$$

ここで，$-\pi\le\mu<\pi$，$0\le\gamma<1$，$(\alpha_2-\gamma^2)^2+\beta_2^2\le\gamma^2(1-\gamma)^2$.

要約統計量

確率変数Θが分布 (2) に従っているとする．このとき，

平均方向 μ_1:　$\mu_1\equiv\arg\{E(e^{i\Theta})\}=\mu$,

集中度 γ_1:　$\gamma_1\equiv|E(e^{i\Theta})|=\gamma$,

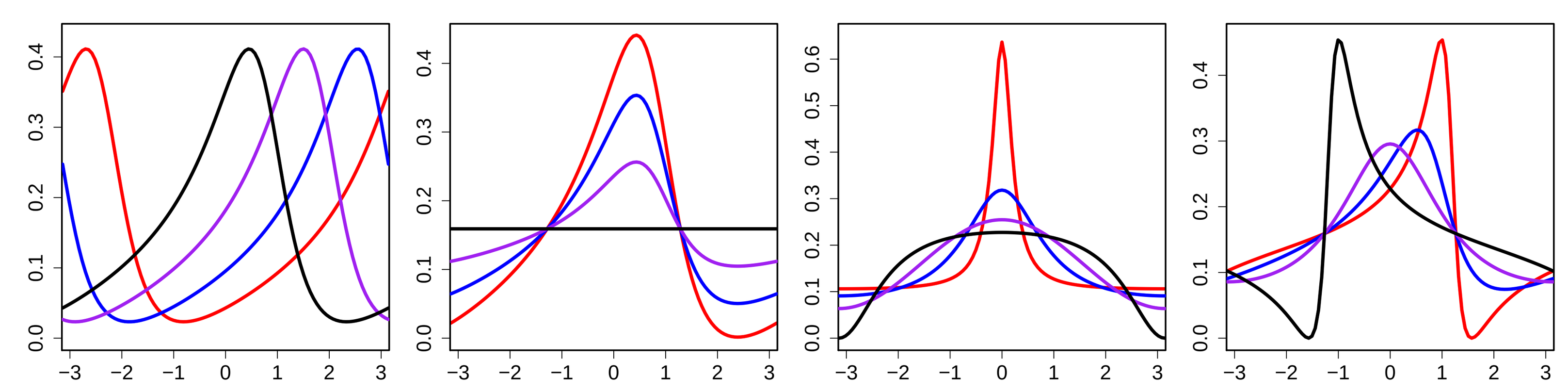
尖度 α_2:　$\alpha_2\equiv E[\cos\{2(\Theta-\mu_1)\}]=\alpha_2$,

歪度 β_2:　$\beta_2\equiv E[\sin\{2(\Theta-\mu_1)\}]=\beta_2$.

確率密度関数の形

- 密度関数 (3) は，$\gamma>0$のとき単峰形，$\gamma=0$のとき一様分布となる．
- 密度関数 (3) が対称 $\iff$ $\rho=0$，$\gamma=0$ **or** $\beta_2=0$.

図２で確かめられるように密度関数 (3) は，位置や集中度に加えて，モード周辺での尖り具合や分布の歪み具合も調節できていることがわかる．



(a)　(b)　(c)　(d)

図２．確率密度関数 (3) のプロット．
(a) $\gamma=0.5$, $\alpha_2=\beta_2=0.15$, $\mu=0$, $\pi/3$, $2\pi/3$, π;
(b) $\mu=0$, $\alpha_2=0.4\gamma\cos(\pi/4)$, $\beta_2=0.4\gamma\sin(\pi/4)$, $\gamma=0$, 0.2, 0.4, 0.58;
(c) $\mu=0$, $\gamma=0.3$, $\beta_2=0$, $\alpha_2=-0.12$, 0, 0.12, 0.24;
(d) $\mu=0$, $\gamma=0.3$, $\alpha_2=0.09$, $\beta_2=-0.21$, 0, 0.165, 0.21.

その他，再生性や無限分解可能性などの性質も成り立つ（[1] を参照）．

Reference

[1] Kato, S. & Jones, M.C. A family of distributions on the circle characterised by its trigonometric moments, in preparation.