統計数理研究所彙報
第32巻 第2号（1984）

非線形力学系の局所線形化と時系列モデル―I

統計数理研究所 尾 崎 統

（1983年10月 受付）

1. はじめに

数年前，筆者は船舶工学の研究者と船体運動の時系列解析に携わる機会に恵まれた．海洋上の船体の運動（例えばローリング）の力学的モデルとしては次のような微分方程式がよく知られている．

(1.1) $$\ddot{x}(t)+a\dot{x}(t)+bx(t)=\xi(t).$$

ここに $x(t)$ はローリング角，$\xi(t)$ は海の波による外力である．$\ddot{x}(t)$ は時間に関する2階微分，$\dot{x}(t)$ は1階微分を意味する．a は揺れの減衰の速さの度合を表わす減衰係数，b は船が傾いた時の復原力の強さの度合を表わす復原係数と呼ばれるパラメターである．海の波による外力 $\xi(t)$ は非決定論的確率過程とみなされ，それによって励起される船のローリングも非決定論的確率過程とみなされる（Yamanouchi (1974)）．船体運動解析の主要な問題の一つにパワースペクトルの推定がある．船の有効な自動制御の為には船体の運動のスペクトル特性を把握する必要があり，有効な制御のでき如何は船の運動のスペクトル推定のでき如何にかかっているとも言える．時系列のパワースペクトルの推定は自己回帰モデル（AR モデル）や自己回帰移動平均モデル（ARMA モデル）を用いた時間領域からの接近法が，周波数領域からの接近法（Blackman and Tukey (1959)）にとって替り最も有効な方法として拡く用いられている（Akaike (1974a)）．ところでスペクトル推定に関するこの時間領域的接近法に対して，筆者は工学者，地球物理学者などの分野の研究者から何度か次のような質問を受けた．「なる程 AR モデルをあてはめて計算したスペクトルは実際によく威力を発揮するが，しかしあてはめた AR モデルの係数にはどんな物理的意味があるのか？」あるいは「工学や物理科学で用いられるモデルのパラメターには物理的な意味があって用いられている．統計モデルのような意味のわからないモデルを用いるわけにはいかない」と言われる人も少からずいた．その後，筆者らは非線形時系列モデルを導入し（Ozaki and Oda (1978), Haggan and Ozaki (1981), 尾崎 (1981)），非線形現象の予測やシミュレーションに有効なことを示したが，これについても前記と同じようなコメントを何度か受けた．これに対して筆者が考えるに，モデルが実際の現象をよく再現し，良い予測を与えるということは当の現象の特性をよく把握しているということであり，従って，モデルの係数は現象の物理的特性を反映しているはずである．いい加減の係数で良い予測が得られることなどあり得ない．ただ時系列モデルの係数と物理的意味の対応を示せといわれると明示的に示すことはすぐに思いつかない．物理科学，工学研究者らと，時系列屋との間のこのモデルに対する考え方のずれをなくして，統計モデルが他の科学分野の研究者にも容易に受け入れられ，モデルが現実の社会に貢献できる場を少しでも拡げることができたならと考えたのが，数年前筆者がこの問題について，考えはじめたきっかけである．この数年，時系列解析の時間領域的接近法は急速に世の中に受け入れられてきた．いまさらここで前述の疑問への回答を与えることの必要性も意味もなくなったような感さえうけるが，それでも何かの役に立つこ

とがあるかも知れないと思ってここに書き記す次第である.

さてモデル(1.1)は右辺の非決定論的攪乱項 $\xi(t)$ がない時は以下のような2次元力学系とみなせる.

(1.2) $$\dot{\boldsymbol{v}}=f(\boldsymbol{v})$$

ここに

$$\boldsymbol{v}=(\dot{x},\ x)'$$
$$f(\boldsymbol{v})=(f_1(\dot{x},\ x),\ f_2(\dot{x},\ x))'$$
$$f_1(\dot{x},\ x)=-a\dot{x}-bx$$
$$f_2(\dot{x},\ x)=\dot{x}$$

ダッシュ $'$ は転置を意味する.

これにガウス白色雑音 $\boldsymbol{n}(t)=(\xi(t),\ 0)'$ を加えると,

(1.3) $$\dot{\boldsymbol{v}}=f(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{n}(t)$$

となり, $\boldsymbol{v}(t)$ は2次元マルコフ過程とみなせる. $\boldsymbol{n}(t)$ が白色でない色つき雑音の場合も, それが白色雑音からの線形変換とみなせる場合は同様に多次元マルコフ過程とみなせる. 力学系に関しては一般に非線形な $f(\cdot)$ に関して, 微分方程式論で議論されている (Coddington and Levinson (1955)). 一方(1.3)で定義されるマルコフ過程に関しては確率論の分野で議論されている (例えば Doob (1953)). (1.2)と(1.3)はその型から推察できるように密接な関係がある. そこで我々はマルコフ過程(1.2)の時間離散化モデルを議論する前に2節で時間連続力学系と時間連続マルコフ過程の関係を調べる. 3節で局所線形化による時間離散化法を導入し時系列モデルと連続時間モデルとの対応関係を明らかにする. 推定問題および多次元力学系の場合の定式化とその応用に関しては続篇 (Ozaki (1985)) で述べることにする.

2. 確率力学系と連続マルコフ過程

物理科学, 生物科学, 工学など多くの分野では力学系

(2.1) $$\dot{x}=f(x)$$

が基本モデルとしてあり, それに非決定論的攪乱項, 多くの場合白色雑音, を加えたもの

(2.2) $$\dot{x}=f(x)+n(t)$$

を考える場合が多い. (2.2)によって定義される $x(t)$ は, $n(t)$ が平均ゼロ, 分散 σ^2 の白色雑音とする時, 小さい $\tau>0$ に対して,

$$\Delta x=x(t+\tau)-x(t)=f(x)\tau+\int_t^{t+\tau} n(s)ds+o(\tau)$$

とすると, 次の式を満たし,

$$\lim_{\tau\to 0}\mathrm{E}[\Delta x]/\tau=f(x)$$
$$\lim_{\tau\to 0}\mathrm{E}[(\Delta x)^2]/\tau=\sigma^2$$
$$\lim_{\tau\to 0}\mathrm{E}[(\Delta x)^k]/\tau=0 \qquad (k\geqq 3)$$

連続型マルコフ過程となり, その推移確率 $\mathrm{p}(x\mid x_0,\ t)$ に関する Fokker-Planck 方程式は

(2.3) $$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[f(x)p]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\sigma^2 p]$$

で与えられる. ここに $\mathrm{p}(x\mid x_0,\ t)$ は時刻ゼロで状態 x_0 であったものが時刻 t で状態 x にある確率を意味する. したがって与えられた任意の力学系に対して我々は(2.3)によって定義されるマルコフ過程を得る. ところで一般の連続型マルコフ過程の増分 Δx の分散は定数ではなく

状態 x の関数である．そこで

$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{E}[\Delta x]/\tau = a(x)$$
$$\lim_{\tau\to 0} \mathrm{E}[(\Delta x)^2]/\tau = b(x)$$

とすると Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x)p] \tag{2.4}$$

となる．この Fokker-Planck 方程式はよく知られているように（例えば Goel and Richter-Dyn (1974)）マルコフ過程 $x(t)$ の満たす確率微分方程式を以下のように一意的に定義する．

$$\dot{x} = \alpha(x) + \beta(x)n(t) \tag{2.5}$$

ここに

$$\alpha(x) = a(x) - \frac{1}{4}b'(x)$$
$$\beta(x) = \sqrt{b(x)}$$

ここで確率微分は Stratonovich 型の方式に従った．伊藤型確率微分方式に従えば

$$\alpha(x) = a(x)$$

となる（Mortensen (1969)）．
$n(t)$ は自己共分散関数がデルタ関数のガウス白色雑音である．ここで変数変換

$$y = y(x) = \int^x \frac{d\xi}{\beta(\xi)} \tag{2.6}$$

を行うと (2.5) から次の確率力学系を得る．

$$\dot{y} = f(y) + n(t) \tag{2.7}$$

ここに $f(y)$ は $\alpha(x), \beta(x)$ から一意的に決まる y の関数である．このことは単位白色雑音による確率化によって任意の力学系に対してあるマルコフ過程が一意的に対応するのみならず逆に任意のマルコフ過程 (2.4) に一意的に力学系

$$\dot{y} = f(y) \tag{2.8}$$

が対応することを意味し，力学系とマルコフ過程の緊密な関係を示唆する．(2.8) をマルコフ過程に付随する力学系という意味で付随力学系と呼ぶことにする．力学系 (2.8) に対して我々は

$$V(y) = -\int^y f(\eta)d\eta \tag{2.9}$$

によってポテンシャル関数 $V(y)$ を定義することができる．このポテンシャルは普通マルコフ過程論でよく議論されているポテンシャル（Blumentahl and Getoor (1968)）とは違う別のものである．従ってこの $V(y)$ をマルコフ過程に付随するポテンシャルという意味で付随ポテンシャルと呼ぶことにする．この付随ポテンシャルは後で示されるように 1 次元定常マルコフ過程の平衡分布を特徴づける上で基本的な役割を果たす．また非線形時系列解析においてもモデルによるパラメタリゼーションの意味を説明する上で有用な概念となることがわかる．(2.4) で定義される定常マルコフ過程の平衡分布 $W(x)$ は自然な境界条件のもとで次式で与えられることが知られている（Goel and Richter-Dyn (1974)）．

$$W(x) = \frac{C}{b(x)} \exp\{2\int^x [a(\xi)/b(\xi)]d\xi\} \tag{2.10}$$

ここに C は正規化定数である．ところで，逆にある分布 $W(x)$ が与えられた時それを平衡分布に持つマルコフ過程を構成することができるであろうか．Wong (1963)はピアソンシステムに属する任意の分布に対してそれが可能なことを示した．ピアソンシステムとは次の微分方程式

(2.11) $$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{u_0+u_1x}{v_0+v_1x+v_2x^2}W(x)$$

を満たす分布 $W(x)$ のクラスをいう．この Wong の考え方はそのままもっと一般の分布に適用することができて我々は容易に次の命題を得る．

命題1 ある可微分関数 $u(x)$, $v(x)$ によって

(2.12) $$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{u(x)}{v(x)}W(x)$$

と表わすことができる分布 $W(x)$ に対して，それを平衡分布として持つ連続マルコフ過程を次のように構成することができる．

(2.13) $$\frac{\partial p}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[\{u(x)+v'(x)\}p]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[2v(x)p].$$

(2.12)のようにある可微分関数 $u(x)$, $v(x)$ によって特徴づけられる分布のクラスを拡張ピアソンシステム分布族と呼ぶことにする．これはピアソンシステム分布族の拡張になっているだけでなく，微分可能な指数分布族（Barndorff-Nielsen (1974)）を含むかなり一般的な分布の族になっている．この拡張ピアソンシステムの定義から以下の命題が成り立つ．

命題2

(2.14) $$\dot{x}=\alpha(x)+\beta(x)n(t)$$

で定義されるマルコフ過程 $x(t)$ の平衡分布 $W(x)$ の拡張ピアソンシステムは

(2.15) $$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{2\alpha(x)-\beta(x)\beta'(x)}{\beta(x)^2}W(x)$$

命題3 (2.14)で定義されるマルコフ過程に付随する確率力学系

(2.16) $$\dot{y}=f(y)+n(t)$$

で定義される付随マルコフ過程の拡張ピアソンシステムは

(2.17) $$\frac{dW(y)}{dy}=2f(y)W(y)$$

でその分布 $W(y)$ は

$$W(y)=W_0\exp\{-2V(y)\}$$

で与えられる．ここに $f(y)=f(y(x))=\alpha(x)/\beta(x)$ で $V(y)$は付随ポテンシャルである．

以上，我々はマルコフ過程と力学系及び平衡分布の間の関係をみてきたが次節で力学系の時間離散化による時系列モデルを考察することによって時系列モデルとマルコフ過程との関係を明らかにする．

3. 力学系の局所線形化

確率力学系

(3.1) $$\dot{y}=f(y)+n(t)$$

の時間離散化法として次の方法がよく知られている（丸山 (1981)）．

(3.2) $$y_{t+\Delta t}=y_t+\Delta t\cdot f(y_t)+B_{t+\Delta t}-B_t$$

ここに $B_{t+\Delta t}-B_t$ はブラウン運動 $B(t)$ の増分で分散 Δt の正規分布に従う．(3.2)で定義されるマルコフチェインは $\Delta t\to 0$ の時自然な条件のもとで(3.1)で定義されるマルコフ過程に確率収束することが知られている（Gikhman and Skorohod (1965), 460頁）．(3.2)の決定論的部分，

(3.3) $$y_{t+\Delta t}=y_t+\Delta t\cdot f(y_t)$$

は力学系

(3.4) $$\dot{y}=f(y)$$

の Euler 法による離散化と同等である．ところで Euler 法は $f(y)$ が非線形の時 Δt をどんなに小さくとってもある領域で発散する場合がある．例えば

(3.5) $$\dot{y}=-y^3$$

はどんな初期値から出発しても $t\to\infty$ に対して $y\to 0$ となるが，Euler 法による離散化を行うと

(3.6) $$y_{t+\Delta t}=y_t-\Delta t y_t^3$$

となり，初期値 y_0 が

$$|y_0|>\sqrt{2/\Delta t}$$

の時 $t\to\infty$ に対して $|y_t|\to\infty$ となる．$f(y)$ が線形の時，つまり

(3.7) $$\dot{y}=-ay$$

の時はどうであろうか．(3.7) に対しては Euler 法による離散化力学系は

$$y_{t+\Delta t}=(1-\Delta t a)y_t$$

となる．ところで線形力学系 (3.7) に対しては解析解，$y(t)=y_0e^{-at}$ が与えられるからこれを使って

(3.8) $$y_{t+\Delta t}=e^{-a\Delta t}y_t$$

とする．この離散力学系は少くとも t, $t+\Delta t$, … の離散時点上で解析解に一致する離散解曲線を我々にもたらす．$e^{-a\Delta t}$ の替りにその Δt に関する一次近似したものを用いるとそれは Euler 法による離散力学系モデルに等しい．数値解析の分野では微分方程式の離散化法として Euler 法の他に Heun 法や Runge-Kutta 法などが知られているが（Henrici (1962)），これらは Δt に関して各 2 次近似，4 次近似をめざしたものであって線形の場合に限ると前記の離散力学系 (3.8) に及ばない．このことから次の考えが自然に生まれる．「非線形力学系の離散化法として少くとも線形の場合には $t=0$, Δt, $2\Delta t$, …で厳密解に一致するようなものをつくったらどうであろうか？」$f(y)$ が非線形な場合，Δt を十分小さくとれば $f(y)$ は小区間 $[t, t+\Delta t)$ 上で線形であると仮定できるとしよう．つまり $\frac{\partial f}{\partial y}$ が小区間 $[t, \Delta t)$ 上で定数 $J_t=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_t$ と仮定できるとしよう．この仮定は $f(y)$ がなめらかな場合，ごく無理のない仮定である．すると $\ddot{y}$ と $\dot{y}$ の間に

(3.9) $$\ddot{y}=J_t\cdot\dot{y}$$

なる線形関係が成り立つ．これを $t\leqq\tau<t+\Delta t$ なる区間 $[t, \tau)$ 上で積分すると

(3.10) $$\dot{y}(\tau)=e^{J_t(\tau-t)}\dot{y}(t)$$

が成り立つ．これを $[t, t+\Delta t)$ 上でもう一度積分すると

(3.11) $$y(t+\Delta t)=\begin{cases} y(t)+J_t^{-1}(e^{J_t\Delta t}-1)f(y(t)) & J_t\neq 0 \\ y(t)+\Delta t\cdot f(y(t)) & J_t=0 \end{cases}$$

を得る．(3.11) は明らかに $f(y)$ が線形の時は離散時点上で解析解に一致する．$f(y)$ が非線形の時，$y(t)$, $y(t+\Delta t)$, $y(t+2\Delta t)$, …は $\Delta t\to 0$ の時，自然な条件のもとで (3.4) の厳密解に収束することが容易に確かめられる．(3.11) を我々は局所線形化による離散力学系モデルあるいは局所線形化力学系モデルと呼ぶことにする．

ここで話を元に戻して確率力学系 (3.1) の時間離散化について考えよう．いま離散化モデル (3.2) の決定論的部分の Euler 法の替りに，上記の局所線形化法を用いると次の離散確率力学系を得る．

(3.12) $$y_{t+\Delta t}=\Phi(y_t)+\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{t+\Delta t}$$

ここに $\Phi(y_t)$ は

$$\Phi(y_t)=\begin{cases} y_t+J_t^{-1}(e^{J_t\Delta t}-1)f(y_t) & J_t\neq 0 \\ y_t+\Delta t f(y_t) & J_t=0 \end{cases}$$

$\varepsilon_{t+\Delta t}$ は分散1のガウス白色雑音である．(3.12)で定義されるマルコフチェインは自然な条件のもとで $\Delta t\to 0$ の時有限時間区間 $[0, T]$ 上でマルコフ過程(3.1)に確率収束することが確かめられる (Gikhman and Skorohod (1965), 460頁)．マルコフチェイン(3.12)を我々は局所線形マルコフチェインと呼ぶことにする．この局所線形マルコフチェインはEulerによるマルコフチェイン(3.2)やその他の離散化法によるマルコフチェインと違って，この後でみるように，非発散定常なマルコフ過程(3.1)に対して非発散定常なマルコフチェインを我々にもたらす．

局所線形マルコフチェインが非発散かどうかは(3.1)の $f(y)$ が具体的に与えられると容易に確かめられる．例えば

(3.13) $$\dot{y}=-y^3+n(t)$$

の場合，局所線形マルコフチェインは

(3.14) $$y_{t+\Delta t}=\phi(y_t)y_t+\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{t+\Delta t}$$
$$\phi(y_t)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}e^{-3\Delta t y_t^2}$$

で，常に $|\phi(y_t)|<1$ であるから非発散である．しかし，ここで局所線形マルコフチェインが非発散である為に $f(y)$ が満たすべき十分条件をあげておくこともあながち無意味ではなかろう．いま簡単の為に $-\infty<y<\infty$ で定義されている $f(y)$ について考えよう．局所線形マルコフチェイン，

(3.15) $$y_{t+\Delta t}=\phi(y_t)y_t+\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{t+\Delta t}$$

(3.16) $$\phi(y_t)=1+(e^{J_t\Delta t}-1)f(y_t)/(J_t\cdot y_t)$$

が非発散である為には $|y_t|\to\infty$ で $|\phi(y_t)|<1$ であればよい．ところで(3.16)から $\phi(y_t)<1$ である為には

$$(e^{J_t\Delta t}-1)f(y_t)/(J_t\cdot y_t)<0$$

であればよいことがわかる．これは次の条件(A)が満たされていれば成り立つ．

(A) $y\to\infty$ に対し $f(y)<0$, $y\to-\infty$ に対し $f(y)>0$ で $|y|\to\infty$ に対し $\dfrac{\partial f(y)}{\partial y}\,(=J(y))<0$.

局所線形マルコフチェインが非発散である為にはこの他に $|y|\to\infty$ に対して $\phi(y)>-1$ をいう必要がある．つまり $|y|\to\infty$ に対して

(3.17) $$(e^{J(y)\Delta t}-1)f(y)/\{J(y)\cdot y\}>-2$$

をいう必要がある．簡単の為に，いま $y\to\infty$ の場合を考える．$y\to-\infty$ の場合も同じ論理で話が進められる．いま $y\to\infty$ で $J(y)\to 0$ とすると

(3.18) $$\frac{e^{J(y)\Delta t}-1}{J(y)\Delta t}\,\frac{\Delta t f(y)}{y}\longrightarrow\frac{\Delta t f(y)}{y}>-2$$

より，$\phi(y)>-1$ が言える．よって $J(y)\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}0$ は一つの十分条件である．$J(y)\to 0$ を満足する関数は線形関数より遅く減少する関数でその例としては

$$f(y)=-\log y$$
$$f(y)=-\tanh y$$

などがある．$y\to\infty$ に対し $J(y)\to c<0$ の時は

(3.19) $$\frac{e^{J(y)\Delta t}-1}{J(y)}\,\frac{f(y)}{y}\underset{y\to\infty}{\longrightarrow}\frac{e^{c\Delta t}-1}{c}\,\frac{f(y)}{y}>-2$$

であるから，やはり $J(y)\to c<0$ も十分条件である．$J(y)\to c<0$ を満たす関数は $y\to\infty$ で線形関数に近づく関数で，例として

$$f(y)=-y+ye^{-y^2}$$
$$f(y)=-y-e^{-y^2}$$

などが考えられる．以上をまとめると次の十分条件を得る．

(B_1)　$y\to\infty$ に対し　$J(y)\mapsto c\leqq 0$

$J(y)\mapsto -\infty$ の時はどうであろうか．この時は

(3.20)
$$(e^{J(y)\Delta t}-1)\frac{f(y)}{J(y)y}\xrightarrow[y\to\infty]{}-\frac{f(y)}{J(y)y}$$

となる故，我々は次の十分条件 (B_2) を得る．

(B_2)　$y\to\infty$ に対し $J(y)\mapsto -\infty$ で且つ $-\dfrac{f(y)}{J(y)y}>-2$

条件 (B_2) を満たす関数は線形関数より速く減少する関数である．次の条件 (B_2') は (B_2) よりも強いが使いやすく有用である．

(B_2')　$y\to\infty$ に対し $J(y)\mapsto -\infty$ で，十分大きな y_0 をとると $f(y)$ は $y>y_0$ で上に凸，つまり $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}<0$, で任意の $c>0$ に対し，

$$f(y_1)<-cy_1$$

を満たす $y_1\geqq y_0$ が存在する．

これが (B_2) より強い条件であることは次の議論から理解されよう．$y\to\infty$ に対し $-f(y)/\{J(y)y\}>-1$ であれば勿論 $-f(y)/\{J(y)y\}>-2$ である．$y\to\infty$ で $-f(y)/\{J(y)y\}>-1$ をいうには $y\to\infty$ に対して $\varphi(y)=f(y)-J(y)y>0$ をいえばよい．もし十分大きな y_0 に対し $\varphi'(y_0)>0$ で，ある $y_1\geqq y_0$ に対し $\varphi(y_1)>0$ ならこれが言える．$\varphi'(y_0)>0$ である為には $f(y)$ が上に凸であれば十分である．また，ある $y_1\geqq y_0$ が存在して $\varphi(y_1)>0$ である為には $\forall c>0$ に対し $f(y_1)<-cy_1$ が十分である．何故なら任意の $y\geqq y_0$ で $\varphi(y)\leqq 0$ とすると

$$f(y)\leqq J(y)$$
$$\frac{J(y)}{f(y)}\leqq\frac{1}{y}$$
$$\int_{y_0}^{y}\frac{J(y)}{f(y)}dy\leqq\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y}$$
$$\therefore\quad \log\frac{f(y)}{f(y_0)}\leqq\log\frac{y}{y_0}$$

従って任意の $y\geqq y_0$ に対して

$$f(y)\geqq\frac{f(y_0)}{y_0}y$$

となり条件に反する．よって (B_2') は十分条件である．(B_2') を満たす関数 $f(y)$ の例としては

$$f(y)=-ye^{y^2}$$
$$f(y)=-y^3$$

などがある．

同じ論理によって $y\to-\infty$ に対して $\phi(y)>-1$ である為には次の各条件が十分である．

(C_1)　$y\to-\infty$ に対し $J(y)\mapsto c\leqq 0$

(C_2')　$y\to-\infty$に対し$J(y)\to-\infty$であり且つある$y_0<0$が存在して，$y<y_0$に対し$f(y)$は下に凸，つまり$\dfrac{\partial^2 f(y)}{\partial y^2}>0$，で任意の$c>0$に対し$y_1\leqq y_0$が存在して$f(y_1)>-cy_1$となる．

上の議論から我々は次の定理を得る．

定理1　$-\infty<y<\infty$において(3.4)で定義された力学系の局所線形化力学系モデル(3.11)は，$f(y)$が(A)と，(B_1)と(B_2')のどれかと，(C_1)と(C_2')のどれかの3条件を満たすとき非発散である．

局所線形化力学系モデルの非発散性は連続ノルム空間上のマルコフチェインのエルゴード性と深く関係している．Ozaki (1981)の5節に述べられているように連続ノルム空間上のマルコフチェインがエルゴード的である為の一つの十分条件は遷移則が状態yの連続関数で，$|y|\to\infty$で中心シフトバック性を持つこととして与えられる．それは局所線形マルコフチェインの場合$|y|\to\infty$で，$|\phi(y)|<1$であれば満たされる．従って我々は次の定理を得る．

定理2　$-\infty<y<\infty$において(3.1)によって定義されたマルコフ過程の局所線形マルコフチェインは$f(y)$が(A)と，(B_1)と(B_2')のどれかと，(C_1)と(C_2')のどれかの3条件を満たすときエルゴード的である．

さて筆者は第43回ISIの論文，Ozaki (1981a)，で非線型時系列モデル

$$x_t=\begin{cases}0.8x_{t-1}+\varepsilon_t & |x_{t-1}|\geqq 1.0\\ (0.8+1.3x_{t-1}^2-1.3x_{t-1}^4)x_{t-1}+\varepsilon_t & |x_{t-1}|<1.0\end{cases}\tag{3.21}$$

のϕ関数（図3.1）によってきまる3つの安定特異点$\xi_0=0$，$\xi_1^+=0.9$，$\xi_1^-=-0.9$と，そのモデルのシミュレーションデータのヒストグラムにみられる3つの山（図3.2）との対応を指摘した．この対応は2節の議論から，連続時間モデルでいえば確率力学系，例えば，

$$\dot{x}=-6x+5.5x^3-x^5+n(t)\tag{3.22}$$

の平衡分布

$$W(x)=W_0\exp\{-2V(x)\}$$

の山と谷がポテンシャル

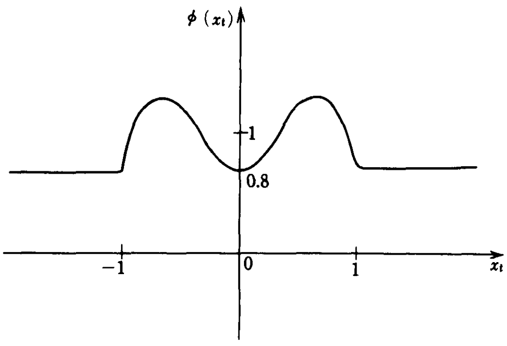

図3.1　モデル(3.21)のϕ—関数

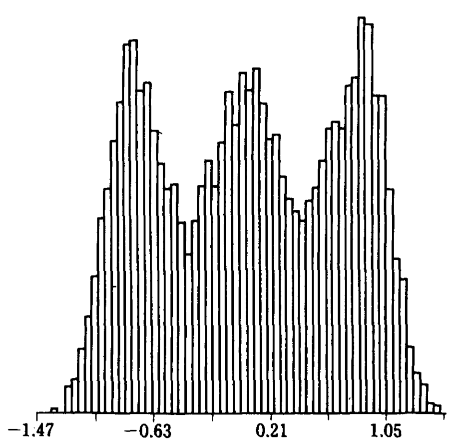

図3.2　モデル(3.21)のシミュレーションデータ(N＝8000)のヒストグラム

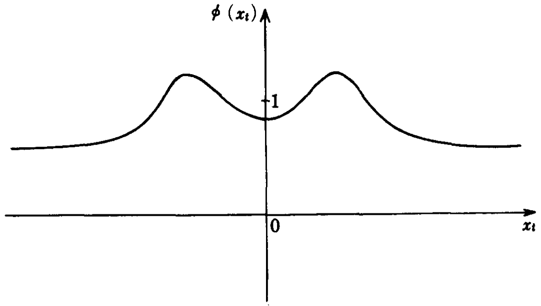

図 3.3　モデル (3.23) の ϕ—関数 (3.24)

$$V(x) = -\int^{x} -6\xi + 5.5\xi^3 - \xi^5 d\xi$$
$$= 3x^2 - \frac{11}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^6$$

の負号を変えたものの山と谷に対応しているといっているのに等しい．また 3 節の方法で (3.22) を離散化すると

(3.23)　$$x_{t+\Delta t} = \phi(x_t)x_t + \sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{t+\Delta t}$$

となりその ϕ-関数は

(3.24)　$$\phi(x_t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{-6x_t + 5.5x_t^3 - x_t^5}{-6x_t + 16.5x_t^3 - 5x_t^5}\{e^{(-6+16.5x_t^2-5x_t^4)\Delta t} - 1\}, & \\ & -6x_t + 16.5x_t^2 - x_t^5 \neq 0 \text{ の時} \\ 1 + (-6x_t + 16.5x_t^3 - 5x_t^5)\Delta t, & -6x_t + 16.5x_t^2 - x_t^4 = 0 \text{ の時} \\ e^{-6\Delta t}, & x_t = 0 \text{ の時} \end{cases}$$

となる．一見複雑に見える (3.24) 式も図に描くと図 3.3 のような形をしていることがわかる．この図から非線形時系列モデル (3.21) の ϕ-関数が何故図 3.2 のようなヒストグラムをもたらしたかが理解できる．連続時間モデルの立場に立つとモデル (3.21) は確率力学系 (3.22) の局所線形化マルコフチェインモデル (3.23) を非線形閾値モデル (Ozaki (1981b)) を使って近似したのだとみることができる．あるいは，連続は離散の近似であるとの立場に立てば，勿論逆の解釈もできるわけであるが，とにかく (3.21) のモデルも (3.22) のモデルも，共に同じ現象を扱っていることは上の局所線形化の議論から明白であろう．また 2 節の分布とそれを平衡分布として持つマルコフ過程の関係を使えば，拡張ピアソンシステムに属する任意の分布を近似的に平衡分布に持つ時系列を生成することも，ϕ-関数を適当に設計することによって容易にできることがわかる (Ozaki (1983))．

これまで一次元確率力学系に関する連続時間モデルと離散時間モデルとの関係を見てきた．モデルの推定問題と多次元への拡張とその応用については次稿 (Ozaki (1985)) で議論する．

参　考　文　献

Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Control*, **19**, 716-723.

Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory*, John Wiley and Sons.

Blackman, R.B. and Tukey, J.W. (1959). *The Measurement of Power Spectra from the Point of View* *of Communication Engineering.* Dover, New York.

Blumentahl, R.M. and Getoor, R.K. (1968). *Markov Processes and Potential Theory,* Academic Press.

Coddington, E.A. and Levinson, N. (1955). *Theory of Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill.

Doob, J.L. (1953). *Stochastic Processes,* John Wiley, New York.

Gikhman, I.I. and Skorohod, A.V. (1965). *Introduction to the Theory of Random Processes,* (translated by Scripta Technica Inc) W.B. Saunders Company.

Goel, N.S. and Richter-Dyn, N. (1974). *Stochastic Models in Biology,* Academic Press.

Haggan, V. and Ozaki, T. (1981). Modelling nonlinear random vibrations using an amplifude-dependent autoregressive time series model, *Biometrika,* **68**, 189-196.

Henrici, P. (1962). *Discrete Variable Models in Ordinary Differential Equations,* John Wiley and Sons.

丸山毅男 (1981). 遺伝学における確率過程――確率積分を応用した数値解析――, 日本物理学会誌, 第 **36** 巻, 3号, 226-235.

Mortensen, R.E. (1969). Mathematical problems of modeling stochastic non-linear dynamic systems, *J. Statist. Physics*, vol. **1**, 271-296.

Ozaki, T. and Oda, H. (1978). Nonlinear time series model identification by Akaike's Information Criterion, in *Information and Systems*, Edited by B. Dubuisson, Pergamon Press, 83-91.

尾崎 統 (1981). 非線型振動現象と時系列モデル, 統計数理研究所彙報, 第 **28** 巻, 1号, 27-41.

Ozaki, T. (1981a). Non-linear phenomena and time series models, *Bulletin of the International Statistical Institute,* vol. **49**, Book 3, 1193-1210.

Ozaki, T. (1981b). Non-linear threshold antoregressive models for non-linear random vibrations, *J. Appl. Prob.,* **18**, 443-451.

Ozaki, T. (1983). Non-linear time series models and dynamical systems, Research Memo No. 255, Institute of Statistical Maths., to appear in *Handbook of Statistics,* vol. **5**, North-Holland.

Ozaki, T. (1985). 「非線形力学系の局所線形化と時系列モデル－II」, 準備中.

Wong, E. (1963). The construction of a class of stationary Markoff processes, *Proc. Amer. Math Soc. Symp. Appl. Math.*, **16**, 264-276.

Yamanouchi, Y. (1974). Ship's behaviour on ocean waves as a stochastic process, *Proc. of International Symposium on the dynamics of marine vehicles and structures in waves,* Institution of Mechanical Engineering, London.

A Local Linearization of Non-linear Dynamical Systems and Time Series Models

Tohru Ozaki
(The Institute of Statistical Mathematics)

Discrete time models for Markov diffusion processes are considered. It is pointed out that any Markov diffusion process is uniquely represented by a variable transformation plus an associated stochastic dynamical system. It is also pointed out that there is a discretization scheme, which is called a local linearization scheme, which gives a consistent ergodic Markov chain for an ergodic diffusion process. Sufficient conditions for a dynamical system to give an ergodic Markov chain are given.