統計数理研究所彙報
第30巻 第1号 (1982)

圃場試験に於ける地力の推定

統計数理研究所 柏 木 宣 久

(1981年11月 受付)

1. はじめに

圃場実験では，地力が実験結果に多大の影響を与えている，という事が良く知られているにもかかわらず，実験圃場の地力の分布を実験の度に推定する必要性が強調されるのは希である．地力そのものが知見目的となる実験は希にしか行われないというのがその理由であろう．そして，全く同一の条件のもとでの実験の繰り返しが物理的に不可能である為に，実験の計画及びデータの解析に当っては，系統誤差として作用するはずの地力を偶然誤差に転化せねばならず，確率化 (randomization) の概念の助けを請わなければならない，という事が広く認められているからでもある．しかしながら，地力の推定が全く無視されてきたわけではない．最も一般的な統計手法である実験計画法に於いてさえ，地力の推定が試みられている．その顕著な例がラテン方格である．

今，連続した長方形の圃場が，同一面積，同一形状の格子状小試験区に分割されているものとし，(i, j) 番目の小試験区での収獲量を $y_{ij}(i=1, 2, \cdots, n_r, j=1, 2, \cdots, n_c, n=n_r\cdot n_c)$，地力を f_{ij}，そしてこの地区に施された処理の効果を t_{ij} とする．また，y_{ij}, f_{ij}, t_{ij} を要素とする長さ n の縦ベクトルを各々 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{f}_a$, $\boldsymbol{t}$ と記す．更に同一処理の繰り返しがあるものとし，$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}$ とする．ここに，$\boldsymbol{u}$ は長さ m の縦ベクトル，$\boldsymbol{D}$ は $n\times m$ のデザイン行列である．ラテン方格の場合は $n_r=n_c=m$ となる．

ラテン方格で地力の推定が行われている事を示す為には，解析の際に使用するモデルを示せば十分である．実際，その際のモデル，

$$
(1) \qquad y_{ij}=t_{ij}+f_{ij}+p_{ij},\ \sum_{i,j} f_{ij}=0,
$$

では，残差 $y_{ij}-t_{ij}$ が地力 f_{ij} と偶然誤差 p_{ij} に分解され取り扱われている．ここに p_{ij} は独立に同一の正規分布に従う確率変量である．以後これを $p_{ij}\sim$i. i. d. $N(0, \sigma^2{}_p)$ の如く記す．

ラテン方格の場合，(1) の f_{ij} に関し更なる仮定が設定される．それは，

$$
(2) \qquad f_{ij}=r_i+c_j,\ \sum_{i=1}^{n_r} r_i=0,\ \sum_{j=1}^{n_c} c_j=0,
$$

という線形関係である．ここに，r_i は第 i 行目の行効果を，c_j は第 j 列目の列効果を表わす．但しここで注意しなければならないのは，(2) という仮定はラテン方格という配置法の持つ特性によってのみ与えられるものというのではなく，実験前に得られている地力の分布に関する情報を利用して，こうした仮定が成立する事を目指して実験が計画されるという点である．ラテン方格に限らず，実験計画法に含まれるほとんどの方法というのは，例えば地力の分布に関する事前情報を，計画に活かす方法と言えよう．

しかしながら，(2) に代表されるような実験前の期待というものが，実験後も満足されているとする保証を，我々は別段持ち合わせているわけではない。事前の期待を覆す程の変動が，確率化の概念によって救われるとも思われない．我々は (2) の如き決定的な関係を仮定する

だけではなしに，もう少し緩やかな，しかもある種の経験によって裏打ちされた合理的な仮定のもとでの解析をも行う方が安全であろう．そしてまた，そうした解析を行えるように実験を計画すべきであろう．

本稿では，そうした観点から著者 [12] によって提案された地力のベイズ推定法を紹介し，その有効性を知る為に行ったシミュレーションの結果を提示する．次節で述べる解析の為のモデルを構築するうえで本質的な役割を果すものは，今世紀初頭に Mercer & Hall [14] やその他の人々によって実施された一様試行 (uniformity trial) で確認された，隣合う小試験区の地力には高い正の相関がある，という良く知られた事実である．従来主として計画の段階で利用される事の多かった，この正の相関の存在という情報を，解析の段階で明示的に取り扱う．そして，次節で述べる手法を用いた数値実験の結果が第3節で示される．このシミュレーションでは，配置法として直交する4つのラテン方格を組合わせたものが使用される．本稿のベイズ推定法の基本的な考え方は Akaike [2] によって提案されたものである．そしてまた，本稿の方法と Besag [8] の方法とは極めて密接な関係にある事が分っている．この点に関しては第4節で議論する．

2. ベイズ推定法

本節では地力のベイズ推定法について述べる．今，連続した長方形の圃場に於ける実験について考えるものとし，実験に関するモデルとして (1) を仮定する．$\sum f_{ij}=0$ という条件を考慮して $n\times(n-1)$ の行列，

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} -1, & -1, & \cdots, & -1 \\ & & \boldsymbol{I}_{n-1}, & \end{bmatrix},$$

を導入する．但し $\boldsymbol{I}_k$ は k 次の単位行列を表わす．この $\boldsymbol{R}$ により，$\boldsymbol{f}$ を $f_{1,1}$ を除く $\boldsymbol{f}_a$ の成分を要素とする長さ $n-1$ の縦ベクトルとする時，$\boldsymbol{f}_a=\boldsymbol{Rf}$ が成り立つ．従ってモデル (1) の行列表示は，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Du}+\boldsymbol{Rf}+\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{p}\sim N(\boldsymbol{0},\ \sigma^2{}_p\boldsymbol{I}_n), \tag{3}$$

となる．

モデル (3) に含まれる未知パラメータの数は $m+n$ である．一方，データの数は n であるから，このままではパラメータの推定は不定となる．従ってラテン方格に於ける (2) の如く，何等かの仮定が必要である．幸いな事に，一様試行によって確かめられた地力についての隣合う小試験区間の高い正の相関の存在は，仮定を設定する為の有力な情報となる．

相関の存在を，地力は滑らかに変化すると解釈し，これの定式化を行う．モデルとしては何通りかのものが考えられる．例えば，隣合う小試験区の地力の1次階差が平均0の正規分布を為すというモデル，

$$f_{ij}-f_{i+1,j}=\varepsilon_{ij},\qquad \varepsilon_{ij}\sim \text{i.i.d. } N(0,\ \sigma^2{}_\varepsilon),$$
$$f_{ij}-f_{i,j+1}=\delta_{ij},\qquad \delta_{ij}\sim \text{i.i.d. } N(0,\ \sigma^2{}_\delta),$$

を仮定するのも良いであろう．要は，仮定した幾つかのモデルの内から，最も適切と判断し得るモデルを選択すれば良いからである．但し本稿では，後述する Besag との対応を考え，次のモデルを仮定する．

$$\begin{aligned} f_{ij}&=\beta_r(f_{i+1,j}+f_{i-1,j})+\beta_c(f_{i,j+1}+f_{i,j-1})+q_{ij},\\ &\beta_r+\beta_c\leq 0.5,\ \beta_r,\ \beta_c>0,\ q_{ij}\sim \text{i.i.d. } N(0,\ \sigma^2{}_q),\ \sigma^2{}_q\leq\sigma^2{}_p. \end{aligned} \tag{4}$$

モデル (4) を行列表示すると，

$$\text{(5)} \qquad \boldsymbol{Rf} = \boldsymbol{SRf} + \boldsymbol{q}, \ \ \boldsymbol{q} \sim N(\boldsymbol{0}, \ \sigma^2_q \boldsymbol{I}_n),$$

となる．但し $\boldsymbol{S}$ は，その要素が β_r, β_c, 0 及びこれ等の和により求まる値からなる $n \times n$ の行列であり，次の境界条件，

$$f_{\kappa l} \leqq f_{ij}, \qquad \begin{array}{l} i = \min(\max(k, 1), \ n_r), \ \ k = 0, \ 1, \ \cdots, \ n_r + 1, \\ j = \min(\max(l, 1), \ n_c), \ \ l = 0, \ 1, \ \cdots, \ n_c + 1, \end{array}$$

を満足するように構成されているものとする．

モデル (4) は，ある (i, j) 番目の小試験区の地力は，この小試験区に辺を接する4つの小試験区の地力に重みを付したものと確率変量 q_{ij} との和により定まる，という事を表現している．当初は，2次階差を利用して地力変動を説明するという立場から，β_r, β_c に対する制約として $\beta_r + \beta_c = 0.5$ という条件を考慮していた．その場合局所的に，地力変動が線形平面で近似され，しかも行と列の交互作用は無視され得るという仮定が設定される．しかしながら幾つかの数値実験の結果，局所的なこうした仮定でさえも適合しない場合のある事が判明，そこで (4) に記述された制約条件を採用する次第となった．

このモデル (4) と Besag の同時自己回帰モデルとは，β_r, β_c に関する制約を除いて同一である．ただモデル定義の背景として，Besag の場合平面上のマルコフ場を利用しているのに対し，我々は階差を利用しているという違いがあり，その差が β_r, β_c に対する制約にあらわれている．我々の方法と Besag の方法の関係については第4節で述べる．

さて，モデル (3) によりデータ分布が，

$$g(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{f}, \ \boldsymbol{u}, \ \sigma^2_p) = (2\pi)^{-n/2} \sigma^{-n}_p \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2_p}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Du} - \boldsymbol{Rf})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Du} - \boldsymbol{Rf})\right\},$$

で与えられ，モデル (5) により $\boldsymbol{f}$ の事前分布が，

$$h(\boldsymbol{f}|\beta_r, \beta_c, \sigma^2_q) = (2\pi)^{-(n+1)/2} \sigma_q^{-n+1} |\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}|^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2_q}(\boldsymbol{Tf})'(\boldsymbol{Tf})\right\},$$

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{S})\boldsymbol{R},$$

で与えられる．従って $\boldsymbol{f}$ の事後分布は，

$$\text{(6)} \qquad W(\boldsymbol{f}|\boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{u}, \ \beta_r, \ \beta_c, \ \sigma^2_p, \ d) \propto (2\pi)^{-n+(1/2)} \sigma_p^{-2n+1} |d^2 \boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}|^{1/2}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2_p}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{Xf})'(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{xf})\right\},$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Du} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \\ d\boldsymbol{T} \end{bmatrix}, \ \ d = \sigma_p/\sigma_q,$$

となるから，$\boldsymbol{f}$ のベイズ推定量 $\hat{\boldsymbol{f}}$ としては (6) を最大にするものを求めれば良い．ここに，

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{f}}(\log W)|_{\boldsymbol{f} = \hat{\boldsymbol{f}}} = \sigma^{-2}_p \boldsymbol{X}'(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{f}}) = 0,$$

であるから，

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{X}^+ \boldsymbol{z},$$

となる．但し $\boldsymbol{X}^+$ は $\boldsymbol{X}$ の Moore-Penrose 逆行列を表わす．

一方，他のパラメータ ($\boldsymbol{u}$, β_r, β_c, $\sigma^2{}_p$, d) の推定であるが，本稿ではこれ等の事前分布を定義していない為に，ベイズ推定を行う事はできない．無論，合理的と判断し得るパラメータの分布に関する事前情報があれば，これにより事前分布を定義するのは可能であるが，そうした情報がない為，これ等パラメータの事前分布を定義する事はせず，かわりに最大周辺尤度法によりパラメータの推定を行う．

本稿の場合周辺分布 L は，$\boldsymbol{y}$ 及び $\boldsymbol{f}$ の同時分布を $\boldsymbol{f}$ について積分する事により求まる．即ち，

$$L(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{u},\ \beta_r,\ \beta_c,\ \sigma^2{}_p,\ d)=(2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}{}_p|d^2\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}|^{1/2}|\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}|^{-1/2} \times\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2{}_p}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{f}})'(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{f}})\right\}. \tag{8}$$

これにより $\boldsymbol{u}$ 及び $\sigma^2{}_p$ に関する尤度方程式を求めれば，

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{u}}(\log L)=\sigma^{-2}{}_p\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{R}\boldsymbol{f})=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_p}(\log L)=-n\sigma^{-1}{}_p+\sigma^{-3}{}_p(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{f}})'(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{X}\hat{\boldsymbol{f}})=0, \tag{10}$$

となるから，$\boldsymbol{u}$ 及び $\boldsymbol{f}$ の推定量 $\hat{\boldsymbol{u}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}$ は (7) 及び (9) により，

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\tilde{\boldsymbol{X}}^+\tilde{\boldsymbol{y}}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{u}}\\ \hat{\boldsymbol{f}}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{0} & d\boldsymbol{T}\end{bmatrix},\quad \tilde{\boldsymbol{y}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ 0\end{bmatrix},$$

そして $\sigma_p{}^2$ の推定量 $\hat{\sigma}_p{}^2$ は (10) により，

$$\hat{\sigma}_p{}^2=n^{-1}(\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{a}})'(\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{a}}),$$

の如く求まる．

他方 (β_r, β_c, d) についてであるが，その尤度方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial\beta_r}(\log L)=\frac{\partial}{\partial\beta_c}(\log L)=\frac{\partial}{\partial d}(\log L)=0, \tag{11}$$

により求める事が一応可能ではある．しかしながら (11) によって得られる非線形連立方程式を解析的に解くのは，現段階では困難であるように思われる．そこで本稿では，(8) を最大にする解を求めるという非線形最適化問題を数値的に解く．従来非線形最適化問題の解法としてはニュートン法が採用される場合が多いようであるが，本稿ではあえて格子探査法を採用した．大域解への収束という問題を避ける為でもあり，また最近の計算機の発達によりそうした選択が可能となったからでもある．

アルゴリズムは非常に単純である．まず，(β_r, β_c, d) の実行可能領域から計算する必要があると考えられる点 (β_{rk}, β_{ck}, d_k) ($k=1, 2, \cdots$) を選択する．この選択法は任意であるが，実際に計算を行う際に選択に迷う事はない．次に各々の点に対し赤池のベイズ型情報量基準 (ABIC),

$$\mathrm{ABIC}_k=-2\log L\ (\boldsymbol{y}|\hat{\boldsymbol{u}}_k,\ \beta_{rk},\ \beta_{ck},\ \hat{\sigma}_{pk},\ d_k),$$

を計算する．そして最後に，その内から ABIC 最小を実現するものを見い出し，その時の

$(\beta_r,\ \beta_c,\ d)$ の値を推定値として採用すれば良い．

3. 模擬データに対する解析結果

前節で述べた方法の有効性を知る為に行ったシミュレーション実験について報告する．今回の実験の目的は，知見目的となる事の多い処理効果の推定値が，真の値からどれだけ隔たるかを知る事にある．故に，本来必要とされる処理の有意性の検定にまでは立ち入らない．解析に使用したデータは次の手順により作製した．

まず，20 種類の異なった処理を実施し，その結果として得られる量により処理の比較を行う，という実験を想定した．各処理効果の期待値を表1に記す．

表 1

$\tilde{u}_1=265$	$\tilde{u}_2=200$	$\tilde{u}_3=225$	$\tilde{u}_4=215$
$\tilde{u}_5=240$	$\tilde{u}_6=250$	$\tilde{u}_7=270$	$\tilde{u}_8=245$
$\tilde{u}_9=180$	$\tilde{u}_{10}=210$	$\tilde{u}_{11}=255$	$\tilde{u}_{12}=185$
$\tilde{u}_{13}=260$	$\tilde{u}_{14}=230$	$\tilde{u}_{15}=190$	$\tilde{u}_{16}=220$
$\tilde{u}_{17}=195$	$\tilde{u}_{18}=275$	$\tilde{u}_{19}=205$	$\tilde{u}_{20}=235$

この期待値は，180 から 5 刻みに 275 迄の数値を，乱数を用いて各 u_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20)$ に割当てたものである．そして，各処理は 5 回の繰り返しがあるものとし，配置法として 4 つの直交する 5×5 のラテン方格を互違いに組合わせたものを用いた．従って 10×10 の試験区が必要となる．これを表 2 に記す．

表 2

1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
251	237	208	265	210	234	195	197	220	167
11	16	12	17	13	18	14	19	15	20
225	227	198	216	247	264	234	202	171	187
2	8	3	9	4	10	5	6	1	7
201	259	256	185	221	199	246	252	264	246
15	19	11	20	12	16	13	17	14	18
175	205	266	246	197	223	230	178	203	273
3	10	4	6	5	7	1	8	2	9
245	206	223	232	220	241	233	238	191	146
14	17	15	18	11	19	12	20	13	16
229	182	179	265	249	173	162	240	261	220
5	9	1	10	2	6	3	7	4	8
269	188	250	189	194	234	229	286	223	233
12	18	13	19	14	20	15	16	11	17
198	278	257	187	205	214	205	251	296	237
4	7	5	8	1	9	2	10	3	6
250	280	218	217	242	175	215	246	263	331
13	20	14	16	15	17	11	18	12	19
286	266	231	220	182	179	265	306	243	265

表2中の上段の数字は処理の種類を表わし，下段が量を表わす．この量は (1) 及び (4) に従い，何等作為なしに擬似乱数を用いてシミュレートしたものである．この時の各パラメータの値は，

$$\tilde{\beta}_r=\tilde{\beta}_c=0.25,\ \tilde{\sigma}_p=10,\ \tilde{d}=2.0,$$

を採用した．

表2のデータに対し前節の手法を適用した結果得られた各パラメータの推定値を表3に記す．

表 3

$\hat{u}_1=263.5$	$\hat{u}_2=207.2$	$\hat{u}_3=228.9$	$\hat{u}_4=215.3$
$\hat{u}_5=238.2$	$\hat{u}_6=250.4$	$\hat{u}_7=267.1$	$\hat{u}_8=243.2$
$\hat{u}_9=180.8$	$\hat{u}_{10}=206.0$	$\hat{u}_{11}=256.5$	$\hat{u}_{12}=186.0$
$\hat{u}_{13}=255.0$	$\hat{u}_{14}=223.9$	$\hat{u}_{15}=189.2$	$\hat{u}_{16}=230.7$
$\hat{u}_{17}=193.2$	$\hat{u}_{18}=276.5$	$\hat{u}_{19}=198.0$	$\hat{u}_{20}=233.9$

$\hat{\beta}_r=0.24$ $\hat{\beta}_c=0.24$ $\hat{\sigma}_p=7.30$ $\hat{d}=1.0$

$\hat{f}_{ij}$

−16.0	−10.8	0.5	−1.0	−14.9	−12.6	−10.6	7.0	−16.8	−38.8
−23.5	−3.6	12.0	13.5	−4.6	−8.4	3.4	3.7	−16.5	−40.0
−7.9	10.8	20.6	10.8	3.9	−4.4	1.9	0.8	−6.3	−20.2
−7.2	5.8	11.5	8.3	4.4	−10.0	−18.8	−13.3	−15.3	−11.9
9.2	2.0	2.1	−10.9	−14.7	−24.1	−26.0	−10.0	−15.2	−26.6
7.9	−5.2	−9.1	−12.8	−12.9	−22.8	−18.7	2.2	1.0	−12.5
22.9	4.8	−9.8	−15.3	−14.9	−15.8	−1.1	14.6	10.4	−1.5
16.6	4.8	−4.5	−14.1	−18.2	−14.1	9.8	24.1	34.8	41.6
29.7	13.0	−11.4	−21.6	−19.2	−8.9	10.2	33.3	44.4	70.7
33.1	27.3	4.7	−10.7	−11.0	−10.4	8.3	31.5	53.7	69.2

$\hat{f}_{ij}$ の値によってこの擬似圃場の地力の分布を窺い知る事ができよう．

一方，表2のデータに対し (2) 及びパラメータの推定が不定とならないようにする為に必要な次の仮定，

$$r_{2k}=r_{2k-1},\ c_{2l}=c_{2l-1},\ k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ 5,$$

のもとに (1) を適用した際の各 $\hat{u}_i$ の値を表4に記す．

表 4

$\hat{u}_1=248.0$	$\hat{u}_2=201.8$	$\hat{u}_3=240.6$	$\hat{u}_4=222.4$
$\hat{u}_5=234.6$	$\hat{u}_6=257.2$	$\hat{u}_7=263.6$	$\hat{u}_8=236.2$
$\hat{u}_9=178.2$	$\hat{u}_{10}=201.4$	$\hat{u}_{11}=260.2$	$\hat{u}_{12}=199.6$
$\hat{u}_{13}=256.2$	$\hat{u}_{14}=220.4$	$\hat{u}_{15}=182.4$	$\hat{u}_{16}=228.2$
$\hat{u}_{17}=198.4$	$\hat{u}_{18}=277.2$	$\hat{u}_{19}=206.4$	$\hat{u}_{20}=230.6$

今，有効性を，

$$v=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}|\tilde{u}_i-\hat{u}_i|,$$

で測る事にしよう．これを計算すると，表3の結果に対して3.06，表4の結果に対して7.02を得る．ただ1度の実験ではあるが，前節の方法を用いた事により，u_i の推定値が真の値により近くなっているのを確認できる．この結果は，特殊な配置法を用いたとしても，真の構造を表現するモデルを仮定すれば，推定値の有効性が増す事を示唆している．期待された結果ではある．

4. 議　　論

厳密なる有効性に対する議論をせずに結論するのは危険かもしれないが，前節で示されたベイズ推定法の有効性は当然持つべき性質であると考える．分散分析で使用するモデルでは，基本的には地力（残差）は独立なる正規分布を為しているとの仮定が設定され，そしてそうした仮定は確率化の概念によって保証されるものとしている．しかしながら，例えばラテン方格の場合，(2) が真の構造を表現していないにもかかわらずこれを強制すれば，(1) に於ける p_{ij} の正規性の仮定は崩れてしまい解析の前提条件は保証されない．そうした場合，特に p_{ij} の分布が裾の重いものとなった時，最小二乗解はデータに引かれ過ぎたものとなってしまうであろう．そしてまた独立性について述べれば，そうした仮定が保証されるにしても，現実には隣合う小試験区の地力が高い正の相関を持つ場合が多いわけで，解析の段階でこの情報を使用しないのは，取り扱う情報量が減少するという点で損であると考える．現実により即したモデルを仮定すれば，それだけ有効性が増すのは当然であろう．

モデル構築に際し相関の存在を考慮すれば，それだけ取り扱う情報量が増すが，こうした点が留意されたのはそう新しい事ではない．地力変動の場にマルコフ過程を初めて持ち込んだのは Williams [18] であるが，それ以前にも相関の存在を解析の段階で取り扱った論文として Papadakis [15], Bartlett [4] がある．またマルコフ過程を用いた解析法はその後幾人かの人々によって取り扱われたが，その内 Besag [8] の方法は推定量として本稿の場合とほぼ等価なものを与えるという点で注目すべき方法と言える．

第2節で述べたように，Besag はモデルとして (1) 及び (4) を仮定する．但し β_r, β_c に対する制約として，

$$|\beta_r|+|\beta_c|<0.5,$$

を採用している．この制約は次の事情により生ずる．

今，地力変動がマルコフ場により説明されるものとする．地力変動の場合，時変数 ij に関する対称性を有しているので多少の工夫が必要となる．これに関して Besag は，

$$\begin{aligned}
&f_{ij}=\rho_r f_{i-1,j}+\varepsilon_{ij},\ f_{i+1,j}=\rho_r f_{ij}+\varepsilon_{i+1,j},\\
&f_{ij}=\rho_c f_{i,j-1}+\delta_{ij},\ f_{i,j+1}=\rho_c f_{ij}+\delta_{i,j+1},\\
&\quad |\rho_r|,\ |\rho_c|<1,\ \varepsilon_{ij}\sim \text{i. i. d.}\, N(0,\ \sigma^2_\varepsilon),\ \delta_{ij}\sim \text{i. i. d.}\, N(0,\ \sigma^2_\delta),
\end{aligned}$$

という4つの関係を同時に考慮し，

$$\begin{aligned}
&f_{ij}=\beta_r(f_{i+1,j}+f_{i-1,j})+\beta_c(f_{i,j+1}+f_{i,j-1})+\theta_{ij},\\
&\quad |\beta_r|+|\beta_c|<0.5,\ \theta_{ij}\nsim \text{i. i. d.},
\end{aligned}$$

を導き出し，θ_{ij} を q_{ij} に置き代える事を提案した．この時のモデルを同時自己回帰モデルと呼ぶ．(4) と比較する時，β_r, β_c に関する制約を除いて同一である事が確認できる．

さてパラメータの推定であるが，Besag は最尤法により行っている．そこで Besag の尤度関数を求める事にする．まず (5) から，

$$f = T^{+}q,$$

となるから，これを (3) に代入し $y - Du$ についての分散共分散行列を求めると，

$$\mathrm{E}(y-Du)(y-Du)' = \sigma^2{}_q\{d^2 I_n + R\ (T'T)^{-1}R'\}.$$

従って

$$V = \{d^2 I_n + R(T'T)^{-1}\ R'\}^{-1},$$

とすれば，尤度関数として，

$$L_B\ (y|u,\ \beta_r,\ \beta_c,\ d,\ \sigma^2{}_q) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}{}_q|V|^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2{}_q}\ (y-Du)'\ V\ (y-Du)\right\}, \tag{12}$$

が得られる．

我々の方法と Besag の方法の関係は (8) と (12) を比較する事により明らかとなる．

定理 (8) と (12) は等しい．

証明 Kashiwagi [12] を参照せよ．

即ち，(8) を用いた最大周辺尤度法による場合と，(12) を用いた最尤法による場合とでは，β_r, β_c に対する制約の違いがあるものの，(u, β_r, β_c, $\sigma^2{}_p$, d) の推定量として基本的には等価なものを与えるという事を示している．同様のモデルを用いているのであるから当然の結論である．反面，最大周辺尤度法のひとつの性質を示しているとも言えよう．但しここで注意すべきは，我々の方法の場合，f の推定を含めて，一連の推定法というものが尤度により説明されているのに対し，Besag の場合 f の推定に関し何等言及していないという点である．無論，$\hat{d}$ を知った後重み付き最小二乗法を用いれば，f の推定が可能であるが，それは即ちベイズ推定を行っているという事に気付くべきであろう．

今回は，Besag との対応をも考慮してモデル (4) を仮定したわけであるが，今後更に現実の現象を記述していこうとすれば，特に交互作用について考慮した時，いつでも (4) の如き解析的操作上都合の良いモデル，即ち Besag が求めているような尤度関数を解析的に求める事ができるようなモデルを仮定できるというわけにはいかないであろう．これに対し，(4) は f の事前分布を規定するモデルであるとの解釈を為し (1) と (4) の対応関係を明確にした事により，今後複雑なモデルを仮定した場合でも，ベイズ的方法により，尤度を基準としたパラメータの推定手順が与えられたわけで，そうしたものの内幾つかはDempster, Laird & Rubin [9] の EM アルゴリズム，あるいは他の数値計算法により現実の計算が可能となるであろう．

本稿では推定法についてのみ触れ，計画法に言及する事はしなかった．そしてまた有意性の検定にも言及しなかった．これ等に関しては解決すべき問題点が残されており，それ等は今後の課題としたい．

最後に，常日頃の議論に於いて良き相手となってくれている中村，濱田，鎌倉，川合，岸野（統数研）の各氏，並びに多くの適切なる助言を与えて下さった石黒氏（統数研）に，記して感謝の意を表する次第である．

参 考 文 献

[1] Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-**19**, 716–723.

[2] Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Trab. Estadist.*, **31**, 143–166.

[3] Atkinson, A.C. (1969). The use of residuals as a concomitant variable, *Biometrika*, **56**, 33–41.

[4] Bartlett, M.S. (1938). The approximate recovery of information from field experiments with large blocks, *J. Agric. Sci.*, **28**, 418–427.

[5] Bartlett, M.S. (1976). *The Statistical Analysis of Spatial Pattern*, Chapman and Hall, London.

[6] Bartlett, M.S. (1978). Nearest neighbour models in the analysis of field experiments, *J.R. Statist. Soc.*, B, **40**, 147–174.

[7] Besag, J.E. (1974). Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems, *J.R. Statist. Soc.*, B, **36**, 192–236.

[8] Besag, J.E. (1977). Errors-in-variables estimation for Gaussian lattice schemes, *J.R. Statist. Soc.*, B, **39**, 73–78.

[9] Dempster, A.P., Laird, N.M. and Rubin, D.B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm, *J.R. Statist. Soc.*, B, **39**, 1–38.

[10] Good, I.J. (1965). *The Estimation of Probabilities*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

[11] 石黒真木夫 (1981). ベイズ型季節調整モデル, 数理科学, **213**, 57-61.

[12] Kashiwagi, N. (1982). A Bayes estimation procedure for fertilities in field experiments, *Research Memorandum* No. 220, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

[13] Lindley, D.V. and Smith, A.F.M. (1972). Bayes estimates for the linear model, *J.R. Statist. Soc.*, B, **34**, 1–41.

[14] Mercer, W.B. and Hall, A.D. (1911). The experimental error of field trials, *J. Agric. Sci.*, **4**, 107–132.

[15] Papadakis, J.S. (1937). Méthode statistique pour des expériences sur champ, *Bull. Inst. Amél. Plantes à Salonique*, No. 23.

[16] Ripley, B.D. (1981). *Spatial Statistics*, Wiley, New York.

[17] Whittle, P. (1954). On stationary processes in the plane, *Biometrika*, **41**, 434–449.

[18] Williams, R.M. (1952). Experimental designs for serially correlated observations, *Biometrika*, **39**, 151–167.

[19] Yates, F. (1970). *Experimental Designs*, Griffin, London.

Estimation of Fertilities in Field Experiments

Nobuhisa Kashiwagi
(The Institute of Statistical Mathematics)

In the present paper, a Bayes estimation procedure for fertilities in field experiments, proposed by Kashiwagi (1982, *Research Memorandum* No. 220, Institute of Statistical Mathematics, Tokyo), is explained, and a result of analysis of simulated data is shown. The procedure has a close relation with the method of Besag (1977, *J.R. Statist. Soc.*, B, **39**, 73–78) in which Simultaneous Autoregressive model (SAR) is used. This is discussed in the final part of the present paper.