一次元ランダムパッキングモデル

——参議院全国区得票率分布への適用例——

統計数理研究所　伊　藤　栄　明
〃　上　田　澄　江

(1977年7月　受付)

Note on Random Packing Models for an Analysis of Elections

Yoshiaki Itoh and Sumie Ueda
(The Institute of Statistical Mathematics)

A random packing model is introduced for an analysis of the results of elections of the House of Councilors in Japan. We assume m-1 sticks with length d are randomly packed on an interval [0, 1] and devide the interval at the centers of the m-1 sticks to m intervals. Then each of the lengths of the m intervals is proportional to polls obtained by one of the m candidates of a political group for an appropriate d.

ランダムパーティションは各種の現象の説明にもちいられ，Feller [1] に紹介されている．MacArthur [2] は鳥の個体数についての調査結果をこれにより説明し，Aoyama [3] は選挙における得票率の研究に応用している．ここでは参議院全国区の選挙結果をランダムパッキングにより説明する．

1. (d, m) ランダムパッキング

長さ1の区間(0, 1)に長さ d の棒をひとつずつランダムに落して行く．(つまり棒の中点が区間 $\left(\frac{d}{2},\ 1-\frac{d}{2}\right)$ における一様分布にしたがうように落して行く．) 落した棒がすでに落ちている棒の一部分に重った場合，その落した棒をとりのぞき，すでにあるものは残し再び落して行く．$m-1$ 個の棒が (0, 1) 区間にはいったとき，落して行くことをやめる．$m-1$ 個はいる前にこれ以上いれられない状態 (すなわち長さ d 以上の区間が残っていない状態) になった場合，すでにある棒をすべてとりさり，はじめからやりなおす．$m-1$ 個はいるまで何回でもやりなおす．$m-1$ 個はいったときをもって1回の実験は終了したものとする．このようにして $m-1$ 個つまった状態を (d, m) ランダムパッキングの状態ということにし，$d\times(m-1)$ をその充填率と呼ぶことにする．

この実験によって区間 (0, 1) につめられた $m-1$ 個の棒の中点の座標を大きさの順にならべたものを

$$Y_1(d,\ m) > Y_2(d,\ m) > \cdots > Y_{m-1}(d,\ m)$$

とし

$$Y_0(d,\ m)=1,\ \ Y_m(d,\ m)=0$$

とする．

$$Y_i(d,\ m)-Y_{i+1}(d,\ m)\quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$$

を大きさの順にならべ　数列

$$X_1(d,\ m) \geq X_2(d,\ m) \geq \cdots \geq X_m(d,\ m)$$

を得たとする．$X_r(d,\ m)$ の期待値をとり

$$E(X_r(d,\ m)) = P_r(d,\ m)$$

と書くことにする．

ランダムに棒をつめてゆくとこれ以上つめられないという状態になる．（つまり長さ d 以上のあいている区間がなくなる．）これをランダム最密パッキングの状態ということにする．このときつまった棒の数を $M(d)-1$ と書く．$M(d)$ は d に依存した確率変数で

$$\lim_{d\to 0} E\{d \times (M(d)-1)\} = C \fallingdotseq 0.748,$$

となることが A. Rényi [4] により証明されている．（関連した問題について樋口 [5] を参照．）

前述の実験は $M(d) \geqq m$ という条件の下で行ったということになる．与えられた m に対して

$$d \times (m-1) = 0.748$$

という関係から $d_0 = d_0(m)$ の値を一つ定める．ここでは $(d_0,\ m)$ ランダムパッキングを，m が与えられたときのランダム最密パッキングとみなすことにする．

$d\to 0$ としたときは，ランダムパーティションに相当し，

表 1

		得票数	得票率	$P_r(d_0,\ m)$
1	鳩山威一郎	1,504,561	0.0900906	0.0552202
2	丸茂重貞	874,662	0.0523733	0.0518730
3	小林国司	867,548	0.0519473	0.0492483
4	佐藤信二	718,826	0.0430421	0.0473560
5	岡田広	701,927	0.0420302	0.0455084
6	江藤智	701,862	0.0420263	0.0433095
7	迫水久常	690,010	0.0413166	0.0416629
8	長田裕二	674,986	0.0404170	0.0406432
9	坂野重信	666,475	0.0399074	0.0392334
10	大谷藤之助	661,332	0.0395994	0.0382313
11	源田実	644,378	0.0385843	0.0369760
12	神田博	594,080	0.0355725	0.0357661
13	森下泰	573,969	0.0343683	0.0347298
14	上田稔	573,496	0.0343400	0.0338616
15	山下春江	566,309	0.0339096	0.0330197
16	村上正邦	552,854	0.0331040	0.0322076
17	田中忠雄	550,689	0.0329743	0.0316835
18	田沢智治	542,119	0.0324612	0.0312690
19	坂健	516,159	0.0309067	0.0307003
20	長谷川仁	512,207	0.0306701	0.0303034
21	岡部保	511,891	0.0306512	0.0298971
22	満岡文太郎	439,015	0.0262875	0.0295079
23	亀井善彰	421,442	0.0252352	0.0291504
24	永野鎮雄	400,964	0.0240090	0.0287911
25	横山フク	365,211	0.0218682	0.0284377
26	内田芳郎	313,545	0.0187745	0.0280891
27	福島恒春	308,792	0.0184899	0.0250350
28	玉置猛夫	251,227	0.0150431	0.0182869
		16,700,536	1.0000000	0.9999982

$$P_r(0,\ m)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m-r+1}\frac{1}{m-i+1},$$

となることが知られている（Barton-David [6]）. $d>0$ の場合についての $P_r(d,\ m)$ を求める問題は未解決であるが計算機実験によりおよその値を定めることができる.

2. 参議院全国区の得票分布への適用例

1節で考えたランダム最密パッキングのモデルと参議院全国区選挙の結果とをくらべてみる. 表1には昭和49年の自由民主党公認候補者35人から，いわゆるタレント候補を除いた28人の得票結果が示されている. 第2列目の数値は28人の総得票を1としたときの得票率である. また第3列の数値は $m=28$ のランダム最密パッキングにおける $P_r(d_0,\ m)$, $r=1,\ 2,\ \cdots,\ 28$, の値の計算機実験による結果（30回の実験を行った平均値）である. これらを図示したものが図1である. 実線が実際の得票率で，点線はランダム最密パッキングによるものである. 点線を定めるのに候補者数28人という情報しか用いていないことを強調したい. 図2は昭和52年の自由民主党公認候補者（タレント候補を除く）18人の総得票を1としたときの得票率（実線）と $m=18$ のランダム最密パッキングによる値（点線）を示す.

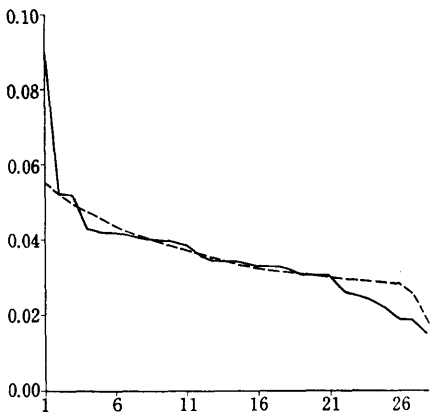

図1 昭和49年自由民主党公認候補（タレント候補をのぞいた）

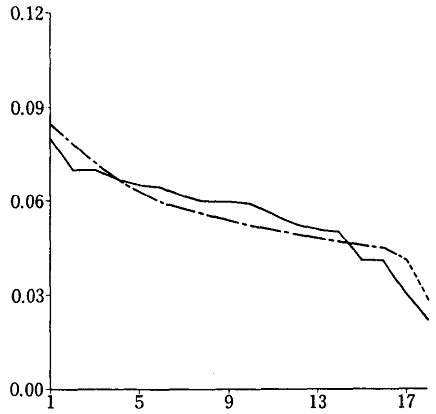

図2 昭和52年自由民主党公認候補（タレント候補をのぞいた）

表2には昭和49年参議院全国区選挙におけるいわゆるタレント候補10人の得票分布を示してある. 組織票によらず知名度だけで得票できるのがいわゆるタレント候補であり，票割りによる組織票というものはないと考えられる. この場合，ランダムパーティションのモデルより導かれる $P_r(0,\ m)$ が適合するとみられる. 表2の第3列目の数値は，$P_r(0,\ 10)$ の値を示して

表 2

		得票率	$P_r(0,\ m)$
1	宮田　輝	0.2786836	0.2928967
2	青島幸男	0.1968990	0.1928967
3	山東昭子	0.1349505	0.1428968
4	斎藤栄三郎	0.1232702	0.1095635
5	糸山英太郎	0.0836220	0.0845634
6	山口淑子	0.0641105	0.0645635
7	コロンビア・トップ	0.0626993	0.0478968
8	横井庄一	0.0282144	0.0336111
9	大松博文	0.0243054	0.0211111
10	武智鉄二	0.0032451	0.0100000
		1.0000000	0.9999995

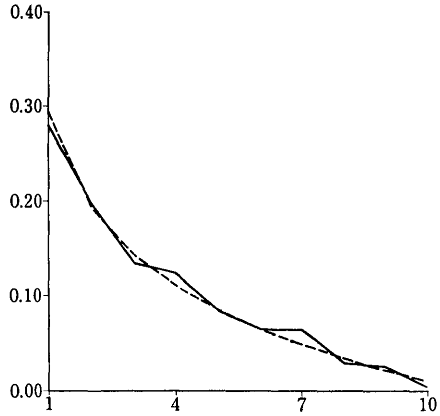

図3 昭和49年タレント候補

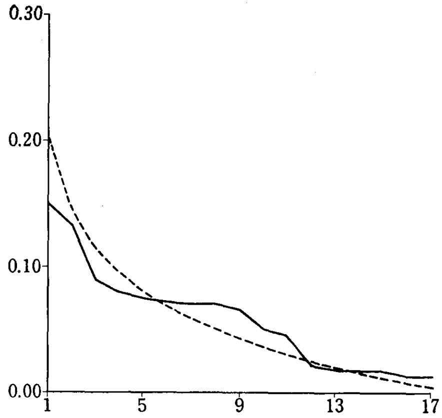

図4 昭和52年タレント候補

いる．これと実際の得票分布と比較したのが図3である．昭和52年のタレント候補についてランダムパーティションによる $P_r(0,\ 17)$ と比較したのが図4である．

以上より，我々のモデルは選挙結果とよく適合すると思われる．

3. 結　論

長谷川，種村 [7]，[8] は生物のなわばりの幾何学的模様が2次元のランダムパッキングにより説明できることを示した．選挙の場合にもなわばり形成ということが考えられ，この意味からもランダムパッキングモデルが適合することが納得できる．この場合，票の数をなわばりにより分割するということであり，一次元のランダムパッキングとみることができるのである．図1，図2はこれを示している．自由民主党候補の得票分布は Rényi の与えた $C \fallingdotseq 0.748$ なる充塡率を持つランダム最密パッキングになっているとみてよいと思われる．充塡率とは制御できる票の比率と考えてよいと思われる．

$d=0$ に対応する場合は，なわばり性ゼロであり，充塡率も0ということになる．テレビジョン，週刊誌，雑誌等でよく知られた候補者は，地盤なしで知名度のみで得票できるという点に特徴がある．（図3，図4）

我々のモデルでは候補者数以外何の情報も用いていない．したがって，例えば自由民主党に投票する人のおよその数がわかっていれば，何人の候補者を当選させることができるかという問題についての目安を与えることができる．ここで自由民主党を考察の対象に選んだ理由は，立候補者数が多いことによる．公明党や共産党の場合には，より充塡率の高いパッキングが実現されていると思われる．(d, m) ランダムパッキングモデルは生物現象，経済現象等へも適用可能なのではないかと思われる．

審査をされた方々からの有益な助言を感謝いたします．

参　考　文　献

[1] Feller, W. (1966) *An introduction to probability and its applications*, **2**, New York.

[2] MacArthur, R. H. (1957) On the relative abundance of bird species, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43**, 293

[3] Aoyama, H. (1962) Note on ordered random intervals and its applcation, *Ann. Inst. Staist. Math.* **XIII**, 243-250.

[4] Rényi, A. (1976) On a one-dimensional random space-filling problem, *Selected papers of Alfréd Rényi*, **2**, Budapest.
[5] 樋口伊佐夫 (1973), 幾何学的ランダムネスの統計的取扱い, **数理科学**, No. 122, 6-14.
[6] Barton, D. E. and David, F. N. (1956) Some notes on ordered random intervals, *J. R. Statist. Soc.* B **18**, 79-94.
[7] 長谷川政美, 種村正美 (1976), なわばりによる空間分割のパターンについて, 応用統計 **5**, 47-61.
[8] Hasegawa, M. and Tanemura, M. (1976) On the pattern of space division by territories, *Ann. Inst. Statist. Math.* **28** B, 509-519.