回帰行列に関する同時信頼区間

塩　谷　　実

(1971年2月　受付)

Simultaneous Confidence Intervals Relating to Matrices of Multivariate Regressions

Minoru Siotani

A simple and expository derivation of simultaneous confidence bounds for double linear combinations of elements of a matrix of multivariate regression is given in the cases (1) when combinations are set up after the examination of data, and (2) when they are predetermined in finite number. This is applied to the comparisons of mean vectors of k multivariate normal populations. Furthermore comparisons of double linear combinations of elements of k regression matrices are considered in constructing the simultaneous confidence intervals for them. Some discussion for the distributions of statistics appeared in this construction will be given.

Kansas State University

緒　　論

多変量回帰分析における回帰行列に関する同時信頼区間の議論は，すでに S.N. Roy [10], Khatri [5], Krishnaiah [6], Siotani [12] によって与えられているが，その導出には唐突な点があり，いま一つすっきりしない．こゝでまず一つの回帰行列の要素の二重線形結合に対する同時信頼区間の初等的かつ自然な導出法を説明的に示そう．この際，問題となる結合が，データを検討した後に設定される場合，観測前，分析目的に応じて予め設定されている場合を区別して取り扱う．次にこの結果を，k 個の正規母集団の平均ベクトルの比較に対する同時信頼区間の導出に適用する．この後，k 個の回帰行列の比較の問題を進展させ，$k=2$ の場合，k 個の回帰行列の要素の二重一次結合が一個の場合，有限個の場合，無限個の場合を分けて考える．最後の節で，それまでに現われた統計量の分布に関して考えてみる．この分布，とくに，そのパーセント点が評価されなければ，同時信頼区間は具体的に設定されたことにならないのである．

1.　一つの回帰行列に関する同時信頼区間の初等的導出

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ を p-変量正規母集団 $N(B\boldsymbol{z}_r, \Sigma), r=1, 2, \cdots, N$ からの観測ベクトルとする．こゝに

$$\boldsymbol{z}_r : q\times 1, \quad B : p\times q, \quad N \geq p+q$$

である．

$$X : p\times N = \{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_N\}$$
$$Z : q\times N = \{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_N\}$$

とまとめ，簡単のため Z の階数は q，いわゆる full rank としておく．このとき，われわれは多変量正規回帰論における次の周知の結果（例えば [1] の第8章をみよ）を用いるであろう．

(a)　回帰行列 B の最尤推定行列

(1.1)
$$\hat{B} = (XZ')(ZZ')^{-1}$$

は B の不偏推定行列であり，

(b)　その要素の同時分布は，平均が B, $\hat{B}$ の第 i 行と第 j 行の共分散行列が $\sigma_{ij}(ZZ')^{-1}$

(σ_{ij} は Σ の (i, j) 要素である.) の pq-変量正規分布である.

(c) 残差共分散行列

(1.2) $$(N-q)S = XX' - \hat{B}(ZZ')\hat{B}' = XX' - (XZ')(ZZ')^{-1}(ZX')$$

は, $\hat{B}$ とは独立で, 自由度 $(N-q)$ のウイッシャート分布 $W(\Sigma, p, N-q)$ にしたがう.

1.1 B の要素の一次結合がデータの検討により設けられる場合. この場合には, B の要素のあらゆる一次結合に対する同時信頼区間を用意することが必要である. いま, $\mathfrak{A}_p$ を $\boldsymbol{o}$ でない p 成分ベクトル $\boldsymbol{a}$ の全体, $\mathfrak{B}_q$ を $\boldsymbol{o}$ でない q 成分ベクトルの全体とすれば, 問題は

(1.3) $$\boldsymbol{a}' B \boldsymbol{b}, \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}_p, \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathfrak{B}_q$$

に対する信頼係数 $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ の同時信頼区間を作ることである. これを行う S.N. Roy [10] の union-intersection principle により, 特定の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対する $\boldsymbol{a}'B\boldsymbol{b}$ の信頼区間を一次元的に求め, その後で $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を動かして intersection をとるのである.

$\hat{B}$ と S の分布から, 任意にとめた $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に対して, $\boldsymbol{a}'\hat{B}\boldsymbol{b}$ の分布は, 平均 $\boldsymbol{a}'B\boldsymbol{b}$, 分散 $(\boldsymbol{a}'\Sigma\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b})$ の正規分布であり, $(N-q)\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a}/\boldsymbol{a}'\Sigma\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}'\hat{B}\boldsymbol{b}$ と独立で, 自由度 $(N-q)$ の χ^2-分布にしたがうことが容易にわかる. $\boldsymbol{a}'\hat{B}\boldsymbol{b}$ の分散は次のように計算される. $\hat{B}$-B の行ベクトルを $\boldsymbol{h}_i'$, $i=1, 2, \cdots, p$ と表わせば,

$$\begin{aligned}
Var(\boldsymbol{a}'\hat{B}\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}' E\{(\hat{B}-B)\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}'(\hat{B}-B)'\}\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}'(E\{\boldsymbol{h}_i'(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}')\boldsymbol{h}_j\})\boldsymbol{a} \qquad\qquad i, j = 1, \cdots, p \\
&= \boldsymbol{a}'(tr\{(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}')E(\boldsymbol{h}_j\boldsymbol{h}_i')\})\boldsymbol{a} \\
&= \boldsymbol{a}'(\sigma_{ij}\, tr\{(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}')(ZZ')^{-1}\})\boldsymbol{a} \\
&= (\boldsymbol{a}'\Sigma\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b})
\end{aligned}$$

かくして

(1.4) $$t_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})^{1/2}\{\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}\}^{1/2}}$$

は自由度 $n=N-q$ の t-分布にしたがう. よって t-区間は

(1.5) $$|t_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}| = \left|\frac{\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})^{1/2}\{\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}\}^{1/2}}\right| \leq g \quad (>0)$$

なる statement にもとづいて作られ, これは, most accurate unbiased であることが知られている ([7] の 5.5 節参照). これをもとにして $\boldsymbol{a}$ を $\mathfrak{A}_p$ で, $\boldsymbol{b}$ を $\mathfrak{B}_q$ で動かして intersection をとるのである. この場合, 容易に見られるように

(1.6) $$\bigcap_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p, \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_q} [|t_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}| \leq g] \Leftrightarrow \left[\frac{|\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)\boldsymbol{b}|}{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})^{1/2}\{\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}\}^{1/2}} \leq g, \forall \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p, \forall \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_q\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\underset{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p, \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_q}{\mathrm{Max}} \left\{\frac{(\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)\boldsymbol{b})^2}{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b})}\right\} \leq g^2\right]$$

なる同等関係が成立する. この最後の statement における Max は正準相関論の解析でよく知られているように, 行列式方程式

(1.7) $$|(\hat{B}-B)(ZZ')(\hat{B}-B)' - c\,n\,S| = 0$$

の最大根 $c_{\max}$ に n を掛けたものに等しい. ところでこの方程式は少し変形すれば,

(1.8) $$\left|(X-BZ)Z'(ZZ')^{-1}Z(X-BZ)' - \left(\frac{c}{1+c}\right)(X-BZ)(X-BZ)'\right| = 0$$

あるいは,

(1.9) $$\begin{aligned}|(X-BZ)Z'(ZZ')^{-1}Z(X-BZ)' \\ - c(X-BZ)\{I_N - Z'(ZZ')^{-1}Z\}(X-BZ')| = 0\end{aligned}$$

となり, $c_{\max}$ の分布は null case のもので, その上方 $100\alpha\%$ 点 $c_M(\alpha)$ は, p, q, n のある範囲の値に対して表にされているものである.

(1.10) $$g = n^{1/2} c_M^{1/2}(\alpha)$$

とおけば，(1.6) の真中の statement を用いて

(1.11) $$P_r\left\{\frac{|\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)\boldsymbol{b}|}{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})^{1/2}(\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b})^{1/2}} \le n^{1/2} c_M^{1/2}(\alpha),\ \forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \forall\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_q\right\} = 1-\alpha$$

が成立する．したがって，すべての $\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p$，すべての $\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_q$ に対する $\boldsymbol{a}'B\boldsymbol{b}$ の信頼区間の集合として

(1.12) $$\boldsymbol{a}'\hat{B}\boldsymbol{b} - n^{1/2}c_M^{1/2}(\alpha)\left\{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b})\right\}^{1/2} \le \boldsymbol{a}'B\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{a}'\hat{B}\boldsymbol{b} + n^{1/2}c_M^{1/2}(\alpha)\left\{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b})\right\}^{1/2}$$

が得られ，これらのすべての statement が同時に成立する同時信頼係数は $1-\alpha$ である．これは Roy の結果（[10] の (14.11.18)）と同じものである．

1.2 B の要素の一次結合が事前に定められている場合． 予め定められた二重一次結合を

(1.13) $$\boldsymbol{a}_i' B\boldsymbol{b}_j,\qquad i=1,\cdots,m_1;\ j=1,\cdots,m_2$$

とする．この場合には，(1.6) の同等関係の代わりに，

(1.14) $$\bigcap_{i,j}\left[|t_{ij}|\le g\right] \Leftrightarrow \left[\frac{|\boldsymbol{a}_i'(\hat{B}-B)\boldsymbol{b}_j|}{(\boldsymbol{a}_i'S\boldsymbol{a}_i)^{1/2}\{\boldsymbol{b}_j'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}_j\}^{1/2}} \le g,\ i=1,\cdots,m_1;\ j=1,\cdots,m_2\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[t_{ij}^2\le g^2,\ i=1,\cdots,m_1;\ j=1,\cdots,m_2\right]$$
$$\Leftrightarrow \left[t_{\max}^2 \equiv \max_{i,j}\{t_{ij}^2\}\le g^2\right]$$

となる．ゆえに

(1.15) $$P_r\left\{t_{\max}^2 \le t_M^2(\alpha)\right\} = 1-\alpha$$

を満たす $t_M^2(\alpha)$ を計算することができれば，求める同時信頼区間の集合

(1.16) $$\boldsymbol{a}_i' B\boldsymbol{b}_j - t_M(\alpha)\left\{(\boldsymbol{a}_i'S\boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{b}_j'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}_j)\right\}^{1/2} \le \boldsymbol{a}_i' B\boldsymbol{b}_j \le \boldsymbol{a}_i'\hat{B}\boldsymbol{b}_j + t_M(\alpha)\left\{(\boldsymbol{a}_i'S\boldsymbol{a}_i)(\boldsymbol{b}_j'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}_j)\right\}^{1/2}$$
$$i=1,\cdots,m_1;\ j=1,\cdots,m_2$$

が得られ，これらが同時に成立する信頼係数は $1-\alpha$ となる．

問題は $t_M^2(\alpha)$ の評価であり，$t_{\max}^2$ の標本分布は厄介で，かつ，未知パラメターを含んでいる．この困難を避ける一つの方法は，Bonferroni の不等式を利用することである．すなわち，

(1.17) $$P_r\left\{t_{\max}^2\le g^2\right\} = 1-P_r\left\{t_{\max}^2 > g^2\right\} \ge 1-\sum_{i,j}P_r\left\{t_{ij}^2 > g^2\right\}$$

が成立するから

(1.18) $$\alpha = \sum_{i,j}P_r\left\{t_{ij}^2 > g_1^2(\alpha)\right\} = m_1 m_2 P_r\left\{t_{11}^2 > g_1^2(\alpha)\right\} = 2m_1 m_2\int_{g_1(\alpha)}^{\infty} f_n(t)\,dt$$

$f_n(t)$：自由度 n の t-分布の密度関数

によって解 $g_1(\alpha)$ を求め，これを (1.16) の $t_M(\alpha)$ の代わりに用いるのである．しかしこの場合の同時信頼係数は $\ge 1-\alpha$ であり，かつ $t_M(\alpha) < g_1(\alpha)$ で m_1m_2 個の区間の幅は広くなる．

$p=1$，すなわち一変数の回帰の場合には，B は q 成分の横ベクトルとなるから，いまそれを $\boldsymbol{\beta}'$ と表わそう．さらに $\boldsymbol{a}_i$ は常数で意味を持たなくなるから 1 とおく．したがって (1.13) は

(1.19) $$\boldsymbol{b}_j'\boldsymbol{\beta},\quad j=1,2,\cdots,m\,(\equiv m_2)$$

となり，これに対する同時信頼区間は (1.16) から

(1.20) $$\boldsymbol{b}'_j\hat{\boldsymbol{\beta}} - t_M(\alpha)s\,[\boldsymbol{b}_j'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}_j]^{1/2} \le \boldsymbol{b}_j'\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{b}_j'\hat{\boldsymbol{\beta}} + t_M(\alpha)s\,[\boldsymbol{b}_j'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}_j]^{1/2}$$

$$j=1,2,\cdots,m$$

となる．s^2 は標本不偏分散であり，$t_M{}^2(\alpha)$ は

$$t^2{}_{\max}=\underset{j}{\mathrm{Max}}\left\{t_j{}^2=\frac{[\boldsymbol{b}_j{}'(\hat{\beta}-\beta)]^2}{s^2[\boldsymbol{b}_j{}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{b}_j]}\right\} \tag{1.21}$$

の上方 $100\,\alpha\,\%$ 点である．この場合には，$t_M{}^2(\alpha)$ の実用になる良い近似値を得ることができる．このための計算法は筆者の論文 [13] で取扱われている．

2. k 個の母集団平均ベクトルの場合への応用

$\boldsymbol{x}_{i1},\boldsymbol{x}_{i2},\cdots,\boldsymbol{x}_{iN_i}, i=1,2,\cdots,k,$ を k 個の p-変量正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma), i=1,2,\cdots,k$ からのそれぞれ大きさ N_i の無作為標本とする．

$$N=N_1+N_2+\cdots+N_k \qquad n=N-k$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i=\sum_{r=1}^{N_i}\boldsymbol{x}_{ir}/N_i, \qquad n\,S=\sum_{i=1}^{k}\sum_{r=1}^{N_i}(\boldsymbol{x}_{ir}-\bar{\boldsymbol{x}}_i)(\boldsymbol{x}_{ir}-\bar{\boldsymbol{x}}_i)'$$

なる記号を用いる．いま

$$X:p\times N=\{\boldsymbol{x}_{11},\boldsymbol{x}_{12},\cdots,\boldsymbol{x}_{1N_1},\boldsymbol{x}_{21},\cdots,\boldsymbol{x}_{2N_2},\cdots,\boldsymbol{x}_{k1},\cdots,\boldsymbol{x}_{kN_k}\}$$

$$B:p\times k=\{\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_k\}$$

$$Z:k\times N=\begin{pmatrix} 1\,1\cdots1 & 0\,0\cdots0 & 0\,0\cdots0 & \cdots & 0\,0\cdots0\\ 0\,0\cdots0 & 1\,1\cdots1 & 0\,0\cdots0 & \cdots & 0\,0\cdots0\\ 0\,0\cdots0 & 0\,0\cdots0 & 1\,1\cdots1 & \cdots & 0\,0\cdots0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \underbrace{0\,0\cdots0}_{N_1} & \underbrace{0\,0\cdots0}_{N_2} & \underbrace{0\,0\cdots0}_{N_3} & \cdots & \underbrace{1\,1\cdots1}_{N_k} \end{pmatrix}$$

と定義すれば，

$$E(X)=B\,Z \tag{2.1}$$

と書けるから，前節の結果を利用することによって，$\boldsymbol{\mu}_i$'s に関する種々の同時信頼区間を求めることができる．

まず k 個の平均ベクトルの要素のすべての双一次結合，すなわち，

$$\boldsymbol{a}'B\,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'\{\boldsymbol{\mu}_1,\boldsymbol{\mu}_2,\cdots,\boldsymbol{\mu}_k\}\,\boldsymbol{b}=\sum_{j=1}^{k}b_j\,\boldsymbol{a}'\,\boldsymbol{\mu}_j,\ \forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \ \forall\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k \tag{2.2}$$

に対する同時信頼区間を考えてみよう．

$$ZZ'=\begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & N_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & N_k \end{pmatrix}, \quad XZ'=\{N_1\bar{\boldsymbol{x}}_1,\ N_2\bar{\boldsymbol{x}}_2,\cdots,\ N_k\bar{\boldsymbol{x}}_k\}$$

だから

$$\hat{B}=(XZ')(ZZ')^{-1}=\{\bar{\boldsymbol{x}}_1,\ \bar{\boldsymbol{x}}_2,\cdots,\ \bar{\boldsymbol{x}}_k\}$$

$$(\hat{B}-B)(ZZ')(\hat{B}-B)'=\sum_{j=1}^{k}N_j(\bar{\boldsymbol{x}}_j-\boldsymbol{\mu}_j)(\bar{\boldsymbol{x}}_j-\boldsymbol{\mu}_j)'\equiv V_1{}^*$$

となる．したがって (1.12) により

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{k}b_j\,\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}}_j-n^{1/2}c_M{}^{1/2}(\alpha)\left\{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})\Big(\sum_{j=1}^{k}b_j{}^2/N_j\Big)\right\}^{1/2}\\ &\le\sum_{j=1}^{k}b_j\,\boldsymbol{a}'\boldsymbol{\mu}_j\le\sum_{j=1}^{k}b_j\,\boldsymbol{a}'\bar{\boldsymbol{x}}_j+n^{1/2}c_M{}^{1/2}(\alpha)\left\{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})\Big(\sum_{j=1}^{k}b_j{}^2/N_j\Big)\right\}^{1/2}\\ &\forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\quad \forall\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k\end{aligned} \tag{2.3}$$

が得られる．たゞし $c_M(\alpha)$ は

(2.4) $$|V_1^* - c\,n\,S| = 0$$

の最大根の上方 $100\,\alpha$ % 点である．

もし $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ の一次結合が対照に限られているならば，(2.3) はどう変形されるであろうか．すなわち $\boldsymbol{b}'\mathbf{1}=0$, $\mathbf{1}'=(1,1,\cdots,1)$ なる場合である．これをみるために $\boldsymbol{b}'\mathbf{1}=0$ を満たす $\mathbf{0}$ でない k-成分ベクトルの全体を $\mathfrak{B}_k^*$ で表わす．問題は

(2.5) $$\boldsymbol{a}'\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k\}\boldsymbol{b}, \quad \forall \boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}_p, \quad \forall \boldsymbol{b} \in \mathfrak{B}_k^*$$

に対する同時信頼区間を求めることである．まず (1.6) の最後の statement の中における式に対応した

(2.6) $$\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p, \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k^*} \left\{ \frac{\left[\sum_{r=1}^{k} b_r\,\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \boldsymbol{\mu}_r)\right]^2}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})\left(\sum_{r=1}^{k} b_r^2/N_r\right)} \right\}$$

の評価を考えよう．次の結果を用いる．

Lemma

$\boldsymbol{y}: k\times 1$, $\boldsymbol{d}: k\times 1$, $\mathbf{1}'=(1,1,\cdots,1): 1\times k$, $A: k\times k$ とするとき，

(2.7) $$\operatorname*{Max}_{\substack{\boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{d}'A\mathbf{1}=0}} \left\{\frac{(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d}}\right\} = (\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})'(\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})$$

である．こゝに

(2.8) $$c = \boldsymbol{y}'A\,\mathbf{1}/\mathbf{1}'A'A\,\mathbf{1}$$

証明 $\boldsymbol{d}'A\mathbf{1}=0$ を満たすすべての $\boldsymbol{d}$ に対して

$$\frac{(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d}} = \left[(\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})'\frac{\boldsymbol{d}}{(\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d})^{1/2}}\right]^2 \leq (\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})'(\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})$$

等号は

$$\boldsymbol{d} = \frac{\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1}}{\{(\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})'(\boldsymbol{y} - c\,A\,\mathbf{1})\}^{1/2}}$$

とおけば成立するから lemma は明らかである．

さて $\boldsymbol{d} = \{N_1^{-1/2}b_1, \cdots, N_k^{-1/2}b_k\}$ および

$$\boldsymbol{y}_a' = \frac{\boldsymbol{a}'\{N_1^{1/2}(\bar{\boldsymbol{x}}_1 - \boldsymbol{\mu}_1), \cdots, N_k^{1/2}(\bar{\boldsymbol{x}}_k - \boldsymbol{\mu}_k)\}}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})^{1/2}}, \quad A = (ZZ') = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_k \end{bmatrix}$$

とおけば，(2.6) は

$$(2.6) = \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p} \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{d}'A^{1/2}\mathbf{1}=0} \left\{\frac{(\boldsymbol{y}_a'\boldsymbol{d})^2}{\boldsymbol{d}'\boldsymbol{d}}\right\} = \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p}\left\{(\boldsymbol{y}_a - c\,A^{1/2}\mathbf{1})'(\boldsymbol{y}_a - c\,A^{1/2}\mathbf{1})\right\}$$

となり，

$$c = \boldsymbol{y}_a' A^{1/2}\mathbf{1}/\mathbf{1}'A\,\mathbf{1}$$

であるから，元の記号に戻せば次のようになる．

$$(\boldsymbol{y}_a - c\,A^{1/2}\mathbf{1})'(\boldsymbol{y}_a - c\,A^{1/2}\mathbf{1}) = \boldsymbol{y}_a'\boldsymbol{y}_a - \frac{(\boldsymbol{y}_a'A^{1/2}\mathbf{1})^2}{\mathbf{1}'A\,\mathbf{1}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} N_r(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \boldsymbol{\mu}_r)(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \boldsymbol{\mu}_r)'\right\}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a}} - \frac{N\,\boldsymbol{a}'(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{\mu}})'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} N_r(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}})'\right\}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}' S \boldsymbol{a}}$$

こゝに　$\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{r=1}^{k} N_r \bar{\boldsymbol{x}}_r / N$,　$\bar{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{r=1}^{k} N_r \boldsymbol{\mu}_r / N$　である.

$$V^* = \sum_{r=1}^{k} N_r(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}})(\bar{\boldsymbol{x}}_r - \bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\mu}_r + \bar{\boldsymbol{\mu}})'$$

とおけば,

$$(2.6) = \underset{\boldsymbol{a} \in \mathfrak{A}_p}{\mathrm{Max}} \left\{\frac{\boldsymbol{a}' V^* \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}' S \boldsymbol{a}}\right\} = n\, c_{\max}{}^*$$

すなわち

(2.9)　　$$|V^* - c^* n S| = 0$$

の最大根 $c_{\max}{}^*$ に n を掛けたものになる．ゆえに (2.5) に対する同時信頼区間は，(2.3) の $c_M(\alpha)$ を $c_{\max}{}^*$ の上方 $100\alpha\%$ 点 $c_M{}^*(\alpha)$ で，$\mathfrak{B}_k$ を $\mathfrak{B}_k{}^*$ でおき替えたものであり，これは Roy の結果（[10] の (14.3.7)）と同等なものである.

$\boldsymbol{a}_i' B \boldsymbol{b}_j$, $\boldsymbol{a}' B \boldsymbol{b}_j$ のようなタイプに対する信頼区間の導出は明らかであり，Krishnaiah [6], Siotani [11] によりすでに論じられている.

3.　k 個の回帰行列の比較

$\boldsymbol{x}_r{}^{(i)}$ $(r=1, 2, \cdots, N_i)$ を p-変量正規分布 $N(B^{(i)}\boldsymbol{z}_r{}^{(i)}, \Sigma)$ $(i=1, \cdots, k)$ に従う場合，$B^{(i)}$, $i=1, \cdots, k$ の比較を考える．こゝに

$B^{(i)}: p\times h$, $\boldsymbol{z}_r{}^{(i)}: h\times 1$, $\Sigma: p\times p$, 正値定符号で $N_i \geq p+h$, $k\geq 2$ と仮定する．前と同様に

$$X^{(i)} : p \times N_i = \{\boldsymbol{x}_1{}^{(i)}, \boldsymbol{x}_2{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{x}_{N_i}{}^{(i)}\}$$
$$Z^{(i)} : h \times N_i = \{\boldsymbol{z}_1{}^{(i)}, \boldsymbol{z}_2{}^{(i)}, \cdots, \boldsymbol{z}_{N_i}{}^{(i)}\}$$

とおけば

(3.1)　　$$E(X^{(i)}) = B^{(i)} Z^{(i)}, \quad i = 1, \cdots, k$$

と書ける．こゝでも $Z^{(i)}$ の階数は h であり，したがって $(Z^{(i)}Z^{(i)\prime})^{-1}$ の存在が仮定される．さらに

$$q = kh, \quad N = N_1 + N_2 + \cdots + N_k,$$
$$A_i = Z^{(i)} Z^{(i)\prime}, \quad i = 1, \cdots, k$$

とし,

$$X : p \times N = \{X^{(1)}, \cdots, X^{(k)}\}$$
$$B : p \times q = \{B^{(1)}, \cdots, B^{(k)}\}$$
$$Z : q \times N = \begin{bmatrix} Z^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z^{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & Z^{(k)} \end{bmatrix}$$

と定義すれば，(3.1) は

(3.2)　　$$E(X) = BZ$$

とまとめられる．最尤推定行列についても

(3.3)　　$$\hat{B} = (XZ')(ZZ')^{-1} = \left\{(X^{(1)} Z^{(1)\prime}) A_1^{-1}, \cdots, (X^{(k)} Z^{(k)\prime}) A_k^{-1}\right\} = \left\{\hat{B}^{(1)}, \cdots, \hat{B}^{(k)}\right\}$$

(3.4)　　$$(N-q)S = XX' - \hat{B}(ZZ')\hat{B}' = \sum_{r=1}^{k} \left\{X^{(r)}X^{(r)\prime} - \hat{B}^{(r)} A_r \hat{B}^{(r)\prime}\right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{k} (N_r - h) S^{(r)}$$

となっている.

3.1 $k=2$ の場合

$B^{(1)}$, $B^{(2)}$ の2個の回帰行列の比較の場合には，それが両者の差としてとらえられるから，

$$\mathbf{a}'(B^{(1)} - B^{(2)})\mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{A}_p,\ \forall \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_h \tag{3.5}$$

に対する同時信頼区間は容易に構成することができる.

$\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)}$ の要素の同時分布は ph-変量の正規分布で，その平均は $B^{(1)} - B^{(2)}$ であり，第 i 行と第 j 行の共分散行列は $\sigma_{ij}(A_1^{-1} + A_2^{-1})$ である. ゆえに任意にとめた $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して，$\mathbf{a}'(\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)} - B^{(1)} + B^{(2)})\mathbf{b}$ の分布は，平均 0，分散

$$(\mathbf{a}' \Sigma \mathbf{a})(\mathbf{b}'(A_1^{-1} + A_2^{-1})\mathbf{b})$$

を持つ正規分布であるから

$$t_{a,b} = \frac{\mathbf{a}'(\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)} - B^{(1)} + B^{(2)})\mathbf{b}}{(\mathbf{a}' S \mathbf{a})^{1/2}\{\mathbf{b}'(A_1^{-1} + A_2^{-1})\mathbf{b}\}} \tag{3.6}$$

は自由度 $n = N - q$ の t-変数である. ゆえにこの場合には 1.1 節と全く同様にして，(3.5) に対する同時信頼区間は,

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}'(\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)})\mathbf{b} - n^{1/2}\lambda_M^{1/2}(\alpha)\{(\mathbf{a}' S \mathbf{a})(\mathbf{b}' A^{(1,2)} \mathbf{b})\}^{1/2} \\ & \leq \mathbf{a}'(B^{(1)} - B^{(2)})\mathbf{b} \\ & \leq \mathbf{a}'(\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)})\mathbf{b} + n^{1/2}\lambda_M^{1/2}(\alpha)\{(\mathbf{a}' S \mathbf{a})(\mathbf{b}' A^{(1,2)} \mathbf{b})\}^{1/2} \\ & \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{A}_p,\ \forall \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_h \end{aligned} \tag{3.7}$$

と求められる. こゝに

$$A^{(1,2)} = A_1^{-1} + A_2^{-1}$$

で，$\lambda_M(\alpha)$ は

$$\begin{aligned} & |(\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)} - B^{(1)} + B^{(2)})(A^{(1,2)})^{-1} \\ & (\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)} - B^{(1)} + B^{(2)})' - \lambda n S| = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

の最大根 $\lambda_{\max}$ の上方 100α% 点である.

$$\mathbf{a}_i'(B^{(1)} - B^{(2)})\mathbf{b}_j, \quad i = 1, \cdots, m_1;\ j = 1, \cdots, m_2 \tag{3.9}$$

に対する信頼区間も 1.2 節と同様に論じられることを注意しておく.

3.2 $k \geq 3$ で比較が一個の場合

この場合は前節と同じである. 与えられたる比較の係数ベクトルを $\mathbf{c}_0' = \{c_{01}, c_{02}, \cdots, c_{0k}\}$ とし,

$$\mathbf{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{0r} B^{(r)}\right\}\mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{A}_p,\ \forall \mathbf{b} \in \mathfrak{B}_h \tag{3.10}$$

に対する同時信頼区間が問題とされている. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ を止めたとき,

$$\mathbf{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{0r}(\hat{B}^{(r)} - B^{(r)})\right\}\mathbf{b}$$

が，平均 0，分散 $(\mathbf{a}' \Sigma \mathbf{a})\left\{\mathbf{b}'\left(\sum_{r=1}^{k} c_{0r}^2 A_r^{-1}\right)\mathbf{b}\right\}$ なる正規分布に従うから，結果は明らかである. すなわち，(3.7) において $\hat{B}^{(1)} - \hat{B}^{(2)}$, $B^{(1)} - B^{(2)}$, $A^{(1,2)}$ の代わりにそれぞれ $\sum_{r=1}^{k} c_{0r}\hat{B}^{(r)}$, $\sum_{r=1}^{k} c_{0r} B^{(r)}$, $\sum_{r=1}^{k} c_{0r}^2 A_r^{-1}$ としたものである.

3.3 $k \geq 3$ で比較が事前に与えられた有限個の場合

$$\sum_{r=1}^{k} c_{ir} B^{(r)}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{3.11}$$

を比較を意味する与えられた m 個の一次結合とする．そして

$$\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir} B^{(r)}\right\}\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\ i=1,\cdots,m \tag{3.12}$$

に対する同時信頼区間を考えよう．i を止めたとき，問題は前節と正確に同じであり，これを用いると次の同等関係が得られる：

$$\left[|t_{a,b,i}|=\frac{\left|\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})\right\}\boldsymbol{b}\right|}{(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})^{1/2}\left\{\boldsymbol{b}'\left(\sum_{r=1}^{k} c_{ir}^{2}A_r^{-1}\right)\boldsymbol{b}\right\}^{1/2}}\le g,\ \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\ i=1,\cdots,m\right] \tag{3.13}$$

$$\Leftrightarrow\left[\lambda_{\max,i}\le g^2,\ i=1,\cdots,m\right]\Leftrightarrow\left[\max_{1\le i\le m}\{\lambda_{\max,i}\}\le g^2\right]$$

こゝに $\lambda_{\max,i}$ は，i が固定されたときの

$$\left|\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})\right\}\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}^{2}A_r^{-1}\right\}^{-1}\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'\right\}-\lambda nS\right|=0 \tag{3.13}$$

の最大根である．したがって

$$\lambda_{MM}=\max_{1\le i\le m}\{\lambda_{\max,i}\} \tag{3.14}$$

の分布の上方 100α % 点 $\lambda_{MM}(\alpha)$ が実際評価できるならば，(3.10) に対する同時信頼区間を具体的に得ることができる．すなわち

$$\begin{aligned}(3.15)\qquad &\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}\hat{B}^{(r)}\right\}\boldsymbol{b}-n^{1/2}\lambda_{MM}{}^{1/2}(\alpha)\left[(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})\left\{\boldsymbol{b}'\left(\sum_{r=1}^{k} c_{ir}^{2}A_r^{-1}\right)\boldsymbol{b}\right\}\right]^{1/2}\\ &\le\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}B^{(r)}\right\}\boldsymbol{b}\\ &\le\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_{ir}\hat{B}^{(r)}\right\}+n^{1/2}\lambda_{MM}{}^{1/2}(\alpha)\left[(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})\left\{\boldsymbol{b}'\left(\sum_{r=1}^{k} c_{ir}^{2}A_r^{-1}\right)\boldsymbol{b}\right\}\right]^{1/2}\\ &\forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \forall\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\quad i=1,\cdots,m\end{aligned}$$

しかし $\lambda_{MM}(\alpha)$ の評価は大変困難である．そこで例によって，Bonferroni の不等式を利用して

$$P_r\{\lambda_{MM}\le g^2\}=P_r\{\max_{1\le i\le m}\{\lambda_{\max,i}\}\le g^2\}\ge 1-\sum_{i=1}^{m}P_r\{\lambda_{\max,i}>g^2\} \tag{3.16}$$

が成立するから

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m}P_r\left\{\lambda_{\max,i}>g^2\right\} \tag{3.17}$$

を満たす g^2 の値 $g_1{}^2(\alpha)$ を求め，(3.15) における $\lambda_{MM}(\alpha)$ の代わりに $g_1{}^2(\alpha)$ を用いるのである．しかしこの場合，同時信頼係数は $\ge 1-\alpha$ となり，各区間の幅も広くなってしまう．

3.4 $k\ge 3$ ですべての一次結合に対する場合

$B^{(r)}, r=1,\cdots,k$ の同形の双一次結合 $\boldsymbol{a}'B^{(r)}\boldsymbol{b}$ の間のあらゆる一次結合を考えよう．すなわち

$$\sum_{r=1}^{k} c_k\,\boldsymbol{a}'B^{(r)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}'B(\boldsymbol{b}\otimes I_k)\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\ \boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k \tag{3.18}$$

に対する同時信頼区間を設けることを考えるのである．こゝに⊗はクロネッカー積を意味するものである．

さて今までと同じく，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を止めたとき

$$\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)(\boldsymbol{b}\otimes I_k)\boldsymbol{c}=\sum_{r=1}^{k}c_r\,\boldsymbol{a}'(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})\boldsymbol{b}$$

の分布は，平均 0，分散

$$(\boldsymbol{a}'\Sigma\,\boldsymbol{a})\Big[\sum_{r=1}^{k}c_r^2\left\{\boldsymbol{b}'A_r^{-1}\boldsymbol{b}\right\}\Big]=(\boldsymbol{a}'\Sigma\,\boldsymbol{a})\left\{\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{b}\otimes I_k)'(ZZ')^{-1}(\boldsymbol{b}\otimes I_k)\boldsymbol{c}\right\}$$

なる正規分布である．したがって問題は

$$\text{(3.19)}\qquad \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k,\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k}\left\{t_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}^2\right\}=\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k,\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k}\left\{\frac{[\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)(\boldsymbol{b}\otimes I_k)\boldsymbol{c}]^2}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}'H_b\,\boldsymbol{c})}\right\}$$

の評価である．こゝに

$$H_b:k\times k=(\boldsymbol{b}\otimes I_k)'(ZZ')^{-1}(\boldsymbol{b}\otimes I_k)$$

で，$\boldsymbol{b}'A_r^{-1}\boldsymbol{b}$, $r=1,\cdots,k$ を対角要素とする対角行列である．ところで今までのように $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に関する max を最初に行うと，あとで $\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k}\{\lambda_{\max,c}\}$ の処置に困るので，こゝではまず $\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k$ に関する最大化を行う．

$$\boldsymbol{y}_{a,b}=\frac{H_b^{-1/2}(\boldsymbol{b}\otimes I_k)'(\hat{B}-B)'\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{c}_b^*=H_b^{1/2}\boldsymbol{c}$$

とおけば，(3.19) の $\boldsymbol{c}$ に関する Max は

$$\text{(3.20)}\qquad \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{c}_b^*\in\mathfrak{C}_k}\left\{\frac{(\boldsymbol{y}'_{a,b}\,\boldsymbol{c}_b^*)^2}{\boldsymbol{c}_b^{*\prime}\,\boldsymbol{c}_b^*}\right\}=\boldsymbol{y}_{a,b}'\,\boldsymbol{y}_{a,b}$$

$$=\frac{\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)(\boldsymbol{b}\otimes I_k)H_b^{-1}(\boldsymbol{b}\otimes I_k)'(\hat{B}-B)'\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a}}$$

$$=\sum_{r=1}^{k}\frac{\boldsymbol{a}'(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{b}'(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'A_r^{-1}\boldsymbol{b})}$$

となる．したがって

$$\text{(3.21)}\qquad \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k,\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k}\left\{t_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}^2\right\}=\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k}\left[\sum_{r=1}^{k}\frac{\boldsymbol{a}'(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{b}'(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'\boldsymbol{a}}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'A_r^{-1}\boldsymbol{b})}\right]$$

$$\leq\sum_{r=1}^{k}\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_k}\left\{\frac{[\boldsymbol{a}'(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})\boldsymbol{b}]^2}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}'A_r^{-1}\boldsymbol{b})}\right\}=n\sum_{r=1}^{k}\theta_{\max,r}$$

こゝに $\theta_{\max,r}$ は

$$\text{(3.22)}\qquad |(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})A_r(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'-\theta_r\,nS|=0$$

の最大根である．かくして

$$\text{(3.23)}\qquad P_r\left\{|t_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}}|\leq g,\ \forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \forall\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\ \forall\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k\right\}\geq P_r\left\{n\sum_{r=1}^{k}\theta_{\max,r}\leq g^2\right\}$$

ゆえに与えられたる α に対して

$$\text{(3.24)}\qquad \alpha=P_r\left\{n\sum_{r=1}^{k}\theta_{\max,r}>g^2\right\}$$

を満たす g^2 の値を $n\theta_{MS}(\alpha)$ と表わせば，

$$\text{(3.25)}\qquad \boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k}c_r\,\hat{B}^{(r)}\right\}\boldsymbol{b}-n^{1/2}\,\theta_{MS}^{1/2}(\alpha)\Big[(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})\left\{\boldsymbol{b}'\Big(\sum_{r=1}^{k}c_r^2A_r^{-1}\Big)\boldsymbol{b}\right\}\Big]^{1/2}$$

$$\leq\boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k}c_r\,B^{(r)}\right\}\boldsymbol{b}$$

$$\leq \boldsymbol{a}'\left\{\sum_{r=1}^{k} c_r \hat{B}^{(r)}\right\}\boldsymbol{b} + n^{1/2}\theta_{MS}{}^{1/2}(\alpha)\left[(\boldsymbol{a}' S\,\boldsymbol{a})\left\{\boldsymbol{b}'\left(\sum_{r=1}^{k} c_r{}^2 A_r{}^{-1}\right)\boldsymbol{b}\right\}\right]^{1/2}$$

$$\forall \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\quad \forall \boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\quad \forall \boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k$$

が求むる (3.18) に対する信頼係数 $1-\alpha$ をもつ同時信頼区間となる．しかし実際問題として現段階では $\theta_{MS}(\alpha)$ の評価ができていない．ごく粗っぽい評価を行えば，$\theta_{MM}=\max\limits_{1\leq r\leq k}\{\theta_{\max,r}\}$ として

$$(3.26)\qquad P_r\left\{n\sum_{r=1}^{k}\theta_{\max,r}\leq g^2\right\}\geq P_r\left\{n\,k\,\theta_{MM}\leq g^2\right\}=1-P_r\left\{n\,k\,\theta_{MM}>g^2\right\}$$

$$\geq 1-\sum_{r=1}^{k}P_r\left\{n\,k\,\theta_{\max,r}>g^2\right\}$$

なる不等式を利用し，

$$(3.27)\qquad \alpha=\sum_{r=1}^{k}P_r\left\{n\,k\,\theta_{\max,r}>g^2\right\}$$

を満たす g^2 の値 $nk\theta_{M1}(\alpha)$ を (3.25) の $n\theta_{MS}(\alpha)$ の代わりに用いることが考えられる．この $\theta_{M1}(\alpha)$ は評価可能である．しかし (3.26) の不等式は精密なものではなく，$\theta_{M1}(\alpha)$ にもとづく信頼区間の幅は広くて実際的価値を失う恐れが十分ある．そこで信頼区間設定の最後の段階で粗い評価をする代わりに，最初の，信頼区間を求めるべき $B^{(r)}, r=1,\cdots,k$ の比較の設定において，(3.18) より大きな集合を考えて，それに対する同時信頼区間を求めるのも一策であろう．

例えば，$\mathfrak{D}_q$, $q=kh$ を $\boldsymbol{o}$ でない q 成分ベクトル全体として

$$(3.28)\qquad \boldsymbol{a}'B\,\boldsymbol{d}=\sum_{r=1}^{k}\boldsymbol{a}'B^{(r)}\boldsymbol{d}_r\qquad \boldsymbol{d}\in\mathfrak{D}_q,\ \ \boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p$$

を考えよう．$\boldsymbol{d}'=(\boldsymbol{d}_1', \boldsymbol{d}_2', \cdots, \boldsymbol{d}_k')$, $\boldsymbol{d}_r'$: $1\times h$ である．ところで (3.18) において $\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{b}\otimes I_k)'=(c_1\boldsymbol{b}', c_2\boldsymbol{b}', \cdots, c_k\boldsymbol{b}')$ の $\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h$, $\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k$ を動かした時の全体は明らかに $\mathfrak{D}_q$ に含まれる．すなわち

$$\mathfrak{D}_q\supset[(\boldsymbol{b}\otimes I_k)\boldsymbol{c}:\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\ \ \boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k]$$

であるから，

$$(3.29)\qquad \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k}\left\{\frac{[\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)(\boldsymbol{b}\otimes I_k)\boldsymbol{c}]^2}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}'H_b\,\boldsymbol{c})}\right\}$$

$$\leq \operatorname*{Max}_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\boldsymbol{d}\in\mathfrak{D}_q}\left\{\frac{[\boldsymbol{a}'(\hat{B}-B)\boldsymbol{d}]^2}{(\boldsymbol{a}'S\,\boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}'(ZZ')^{-1}\boldsymbol{d})}\right\}=n\,\gamma_{\max}$$

となる．こゝに $n=N-q$, $\gamma_{\max}$ は

$$(3.30)\qquad |(\hat{B}-B)(ZZ')(\hat{B}-B)'-\gamma\,n\,S|=0$$

すなわち

$$(3.30)^*\qquad \left|\sum_{r=1}^{k}(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})A_r(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'-\gamma\,n\,S\right|=0$$

の最大根であり，これの上方 $100\,\alpha$ % 点 $\gamma_M(\alpha)$ の評価は可能である．したがって (3.19) および (3.29) により，

$$(3.31)\qquad P_r\left\{|t_{a,b,c}|\leq n^{1/2}\gamma_M{}^{1/2}(\alpha),\ \forall\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \forall\boldsymbol{b}\in\mathfrak{B}_h,\ \forall\boldsymbol{c}\in\mathfrak{C}_k\right\}$$

$$\geq P_r\left\{\gamma_{\max}\leq\gamma_M(\alpha)\right\}=1-\alpha$$

が成立する．これより信頼係数が $\geq 1-\alpha$ なる (3.18) に対する同時信頼区間として (3.25) の $\theta_{MS}(\alpha)$ を $\gamma_M(\alpha)$ でおき替えたものが得られる．もちろん (3.29) の関係から容易に認められるように，上の信頼区間の集合は，信頼区間の集合

$$(3.32)\qquad \boldsymbol{a}'\sum_{r=1}^{k}\hat{B}^{(r)}\boldsymbol{d}_r - n^{1/2}\gamma_M{}^{1/2}(\alpha)\left[(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})\left\{\sum_{r=1}^{k}\boldsymbol{d}_r'A_r^{-1}\boldsymbol{d}_r\right\}\right]^{1/2}$$
$$\leq \boldsymbol{a}'\sum_{r=1}^{k}B^{(r)}d_r$$
$$\leq \boldsymbol{a}'\sum_{r=1}^{k}\hat{B}^{(r)}\boldsymbol{d}_r + n^{1/2}\gamma_M{}^{1/2}(\alpha)\left[(\boldsymbol{a}'S\boldsymbol{a})\left\{\sum_{r=1}^{k}\boldsymbol{d}_r'A_r^{-1}\boldsymbol{d}_r\right\}\right]^{1/2}$$
$$\boldsymbol{a}\in\mathfrak{A}_p,\ \boldsymbol{d}'=(\boldsymbol{d}_1',\ \cdots,\ \boldsymbol{d}_k')\in\mathfrak{D}_q$$

の部分集合である．(3.32) のもつ同時信頼係数は $1-\alpha$ に等しい．

4. 信頼係数設定に必要な統計量の％点の要約

今まで多変量回帰行列に関するいろいろな同時信頼区間を作ってきたわけであるが，これらが具体的に計算できるためには，それぞれの設定に対応する統計量の%点の評価ができなければならない．ところで本論文で取り扱った統計量としては，1.2 節を除けば，次のような行列式方程式の根の最大値に関係している．V, W を $p\times p$ の実対称行列とし，V は少なくとも非負定符号，W は正値定符号であるとする．この時

$$(4.1)\qquad |V-\tau W|=0$$

の最大根 $\tau_{\max}$ の分布を取り扱うことに要約されているのである．W は (1.2), (3.4) に定義されている nS に相当するもので，自由度 n のウイッシャート分布 $W(\Sigma, p, n)$ に従うと仮定される．V の方は回帰行列 $\hat{B}-B$ あるいは $\hat{B}^{(r)}-B^{(r)}$ に関するもので，W とは独立に分布するもので，いまその自由度を m で表わしておく．さらに V は平均 $\boldsymbol{o}$，共分散行列 Σ をもつ m 個の独立な正規変量ベクトル $\boldsymbol{y}_r$, $r=1, \cdots, m$ により

$$(4.2)\qquad V=\sum_{r=1}^{m}\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_r'$$

と表わされると仮定する．もし $m\geq p$ ならば V もウイッシャート分布をもつものである．かくして (4.1) の最大根 $\tau_{\max}$ を V と W の自由度 m と n を表に出して

$$\tau_{\max}(m,\ n)$$

と書き，具体的に信頼区間設定に現われたものとの対応を考えてみよう．

1.1 節の (1.7) の $(\hat{B}-B)(ZZ')(\hat{B}-B)'$ についてはすでによく知られており $\sum_{r=1}^{q}\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_r'$ と表わせるから，

$$(1.7)\ の\ c_{\max}\ の分布=\tau_{\max}(q,\ N-q)\ の分布$$

である．これの応用である 2 節 (2.4) の V_1^*，(2.9) の V^* の分布はそれぞれ $\sum_{r=1}^{k}\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_r'$，$\sum_{r=1}^{k-1}\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_r'$ の分布と同じであるから，

$$(2.4)\ の最大根の分布=\tau_{\max}(k,\ N-k)\ の分布$$
$$(2.9)\ の\ c_{\max}^*\ の分布=\tau_{\max}(k-1,\ N-k)\ の分布$$

である．さて 3 節にはいれば，まず (3.8) の最大根 $\lambda_{\max}$ について考えよう．$\hat{B}^{(1)}$, $\hat{B}^{(2)}$ は独立であり，$(\hat{B}^{(1)}-B^{(1)})-(\hat{B}^{(2)}-B^{(2)})$ の分布は平均 0 の ph-変量の正規分布で，その共分散行列は

$$\Sigma\otimes\left[(Z^{(1)}Z^{(1)\prime})^{-1}+(Z^{(2)}Z^{(2)\prime})^{-1}\right]=\Sigma\otimes A^{(1,2)}$$

である．したがって

$$G_{1,2}=(\hat{B}^{(1)}-\hat{B}^{(2)}-B^{(1)}+B^{(2)})(A^{(1,2)})^{-1/2}$$

の分布の共分散行列は

$$(I_p\otimes(A^{(1,2)})^{-1/2})(\Sigma\otimes A^{(1,2)})(I_p\otimes(A^{(1,2)})^{-1/2})=\Sigma\otimes I_h$$

となる．これは，$G_{1,2}$ の各列が独立で $N(\mathbf{o},\Sigma)$ に従うことを意味している．よって

$$(\hat{B}^{(1)}-\hat{B}^{(2)}-B^{(1)}+B^{(2)})(A^{(1,2)})^{-1}(\hat{B}^{(1)}-\hat{B}^{(2)}-B^{(1)}+B^{(2)})'$$

$$=G_{1,2}G_{1,2}'=\sum_{r=1}^{h}\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_r'$$

と書ける．これより

(3.8) の最大根 $\lambda_{\max}$ の分布 $=\tau_{\max}(h,\ N-2h)$ の分布

となる．$N=N_1+N_2$ である．(3.13) の最大根，$\lambda_{\max,i}$ の分布も上の $\lambda_{\max}$ と同様の考察により明らかで，$\tau_{\max}(h,N-kh)$ の分布である．たゞし $N=N_1+\cdots+N_k$ である．また (3.22) の最大根 $\theta_{\max,r}$ の分布が $\tau_{\max}(h,N-kh)$ の分布に等しいことも容易にみられる．こゝにこの分布が r に無関係であることは注目しておく必要がある．何んとなれば，(3.27) において

$$\sum_{r=1}^{k}P_r\{n\,k\,\theta_{\max,r}>g^2\}=k\,P_r\{n\,k\,\theta_{\max,1}>g^2\}$$

となるからである．最後に $\gamma_{\max}$ についてみよう．(3.30) あるいは (3.30)* において $(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})A_r(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'$ $r=1,\cdots,k$ は独立であるから，

$$(\hat{B}-B)(ZZ')(\hat{B}-B)'=\sum_{r=1}^{k}(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})A_r(\hat{B}^{(r)}-B^{(r)})'$$

$$=\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{h}\boldsymbol{y}_j^{(r)}\boldsymbol{y}_j^{(r)\prime}=\sum_{r=1}^{kh}\boldsymbol{y}_r\boldsymbol{y}_r'$$

ゆえに

$\gamma_{\max}$ の分布 $=\tau_{\max}(kh,\ N-kh)$ の分布

となる．

以上により信頼区間を具体的に計算するためには，$\tau_{\max}(m,\ n)$ の上方 100α% 点が求められればよい．これはすでに可成りの範囲の p,m,n の値に対して作表されており，これらを利用することができる．例えば，Pillai [8]，Pillai and Bantegui [9]，Foster and Rees [2]，Foster [3] および Heck [4] をあげておく．

(3.14) の $\lambda_{MM}=\max_{1\le i\le m}\{\lambda_{\max,i}\}$，(3.24) の $\sum_{r=1}^{k}\theta_{\max,r}$ の分布はまだわかっておらず，今後の研究を待たねばならない．もしこれらの % 点が評価されれば，対応する信頼区間を求めるのに，Bonferroni の不等式のような区間の幅を不必要に広げる因を除くことができる．

Kansas State University

文　　献

[1] Anderson, T.W. (1958) Introduction to Multivariate Statistical Analysis. Wiley.

[2] Foster, F.G. and Rees, D.H. (1957) Upper percentage points of the generalized beta distribution. I. Biometrika Vol. 44 237–247.

[3] Foster, F.G. Upper percentage points of the generalized beta distribution. II. Biometrika Vol 44 (1957) 441–453; III. Biometrika Vol. 45 (1958) 492–503.

[4] Heck, D.L. (1960) Charts of some upper percentage points of the distribution of the largest characteristic root. Ann. Math. Statist. Vol. 31 625–642.

[5] Khatri, C.G. (1962) A note on the interval estimation related to the regression matrix. Ann. Inst. Stat. Math. Vol. 13 145–146.

[6] Krishnaiah, P.K. (1969) Simultaneous test procedures under general MANOVA models. Multivariate Analysis-II (edited by P.K. Krishnaiah) 121–143. Academic Press.

[7] Lehmann, E.L. (1959) Testing Statistical Hypotheses. Wiley.

[8] Pillai, K.C.S. (1957) Concise Tables for Statisticians. The Statistical Center, Univ. of Philippines, Manila.

[9] Pillai, K.C.S. and Bantegui, C.G. (1959) On the distribution of the largest of six roots of a matrix in multivariate analysis. Biometrika Vol. 46 237–240.

[10] Roy, S.N. (1957) Some Aspects of Multivariate Analysis. Wiley

[11] Siotani, M. (1960) Notes on multivariate confidence bounds. Ann. Inst. Stat. Math. Vol. 11 167–182.

[12] Siotani, M. (1961) A note on the interval estimation related to the regression matrix. Ann. Inst. Stat. Math. Vol. 12 147–149.

[13] Siotani, M. (1964) Interval estimation for linear combinations of means. Jour. Amer. Statist. Assoc. Vol. 59 1141–1164.