

二次元集中曲面の局所的性質

田 口 時 夫

(1971 年 7 月 受付)

On Some Local Properties of Two Dimensional Concentration Surface*

Tokio Taguchi

The author tried to treat in this paper some local properties of two dimensional concentration surface, opposed to the previous paper,** in which he treated some global properties of it.

Consequently he found, for example, that the radii of curvature and torsion of every x curve ($y=\text{const.}$) and y curve ($x=\text{const.}$) are respectively proportional of the marginal density functions $f_1(x)$ and $f_2(y)$, etc., if random variables \mathcal{X} and \mathcal{Y} are either independent or monotone functionally correlated.

Furthermore, he concluded the any concentration surface of random vector $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ having continuous density function is never concave to the X-axis and so on.

The Institute of Statistical Mathematics

は し が き

筆者これまで主に二次元集中曲面を、例えば体積及び各座標平面上における領域の面積と散布度との関係を通して、大域的に考察を加えてきた。従ってこゝでは x 曲線及び y 曲線等の曲率、撓率等専ら小域的性質を扱ふことにする。

猶この報告は昭和 45 年度科学研究費補助金に基づく研究の一部である。

1. 一般的な準備

連続な密度関数 $f(x, y)$ 及び 0 でない期待値 μ_x, μ_y をもつ確率ベクトル $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ に対して、我々は二次元集中曲面を標準型*** を用いて

$$(1) \quad \begin{aligned} X &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ Y &= \frac{1}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \xi f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ Z &= \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \eta f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

で定義した。

* See [2] & [3], in which he defined the two dimensional concentration surface of random vector $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ having continuous density function $f(x, y)$ as follows:

$$\begin{aligned} X &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ Y &= \frac{1}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \xi f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ Z &= \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \eta f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

** Sec [2].

*** 後掲 [2] の Definition 1 及び Proposition 1 をみよ。

この場合 (1) は (2) の条件を充す特別な場合を除き一つの狭義曲面を与えることが容易に証明されるので、この曲面上の x 曲線及び y 曲線、或は $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が完全正曲線相関をもつ即ち \mathcal{Y} が \mathcal{X} の C^2 級の単調非減少一価関数として

$$(2) \quad \mathcal{Y} = \varphi(\mathcal{X})$$

を充す時得られる空間曲線等が三次元ユークリッド空間における単純弧を与えることが分る。

一方三次元ユークリッド空間に於ける曲線の曲率 κ 及び捩率 τ は、周知のように弧長 s を parameter として表現した時、

$$(3) \quad \kappa = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}$$

$$(4) \quad \tau = \begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} \rho^2$$

で与えられる。こゝで ρ は曲率半径であり従って $\rho = \kappa^{-1}$ である。

然し以下の各節では s 以外の parameter t を用いた方が有利なのでそれに従って κ, τ を表現すれば、行列式 D_t を

$$(5) \quad D_t = \begin{vmatrix} \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{dt} & \frac{dZ}{dt} \\ \frac{d^2X}{dt^2} & \frac{d^2Y}{dt^2} & \frac{d^2Z}{dt^2} \\ \frac{d^3X}{dt^3} & \frac{d^3Y}{dt^3} & \frac{d^3Z}{dt^3} \end{vmatrix}$$

によって定義した時、

$$(6) \quad \kappa = \sqrt{\left| \begin{vmatrix} \frac{dY}{dt} & \frac{dZ}{dt} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} & \frac{d^2Z}{dt^2} \end{vmatrix}^2 + \left| \begin{vmatrix} \frac{dZ}{dt} & \frac{dX}{dt} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} & \frac{d^2X}{dt^2} \end{vmatrix}^2 + \left| \begin{vmatrix} \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{dt} \\ \frac{d^2X}{dt^2} & \frac{d^2Y}{dt^2} \end{vmatrix}^2 \right.}$$

$$\times \left[\left(\frac{dX}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dY}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dZ}{dt} \right)^2 \right]^{-3/2}$$

$$(7) \quad \tau = \frac{D_t}{\left| \begin{vmatrix} \frac{dY}{dt} & \frac{dZ}{dt} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} & \frac{d^2Z}{dt^2} \end{vmatrix}^2 + \left| \begin{vmatrix} \frac{dZ}{dt} & \frac{dX}{dt} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} & \frac{d^2X}{dt^2} \end{vmatrix}^2 + \left| \begin{vmatrix} \frac{dX}{dt} & \frac{dY}{dt} \\ \frac{d^2X}{dt^2} & \frac{d^2Y}{dt^2} \end{vmatrix}^2 \right.}$$

となる。

此等によって以下我々は既に述べた諸曲線の曲率、捩率及び其等から導かれる性質を順次検討することにする。

2. C^1 級の密度関数をもつ独立な確率変数 \mathcal{X}, \mathcal{Y} に関する集中曲面の x 曲線及び y 曲線の性質

1 で用いた密度関数 $f(x, y)$ の周辺密度分布を $f_1(x)$ 及び $f_2(y)$ としてまず x 曲線について考察する。

この場合 $f(x, y)$ は C^2 級の関数であるとすれば

$$(8) \quad X = F_1(x) F_2(y), \quad Y = \frac{F_2(y)}{\mu_x} \int_{-\infty}^y \xi f_1(\xi) d\xi, \quad Z = \frac{F_1(x)}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta$$

$$(9) \quad X_x = f_1(x) F_2(y), \quad Y_x = \frac{F_2(y)}{\mu_x} x f_1(x), \quad Z_x = \frac{f_1(x)}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta$$

$$(10) \quad X_{xx} = f_1'(x) F_2(y), \quad Y_{xx} = \frac{F_2(y)}{\mu_y} \{f_1(x) + x f_1'(x)\},$$

$$Z_{xx} = \frac{f_1'(x)}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta$$

$$(11) \quad X_{xxx} = f_1''(x) F_2(y), \quad Y_{xxx} = \frac{F_2(y)}{\mu_x} \{2f_1'(x) + x f_1''(x)\},$$

$$Z_{xxx} = \frac{f_1''(x)}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta$$

が成立する。従って

$$(12) \quad D_x = \frac{F_2^2(y)}{\mu_x \mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta \begin{vmatrix} f_1(x) & x f_1(x) & f_1(x) \\ f_1'(x) & f_1(x) + x f_1'(x) & f_1'(x) \\ f_1''(x) & 2f_1'(x) + x f_1''(x) & f_1''(x) \end{vmatrix} = 0$$

つまり換率について

$$(13) \quad \tau_x = 0$$

が成立するから x 線は原点を含む同一平面上にあることが分る。

又この時曲率 κ_x は (6) 式に従って、

$$(14) \quad \kappa_x = \frac{F_2(y)}{\mu_y f_1(x)} \sqrt{\left\{ \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta \right\}^2 + F_2^2(y)} \Bigg/ \sqrt{F_2^2(y) + \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2 F_2^2(y) + \left\{ \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta \right\}^2}$$

となり、 x 曲線上の (x, y) に対応する点の曲率半径 ρ_x は x の周辺密度関数 $f_1(x)$ に比例する

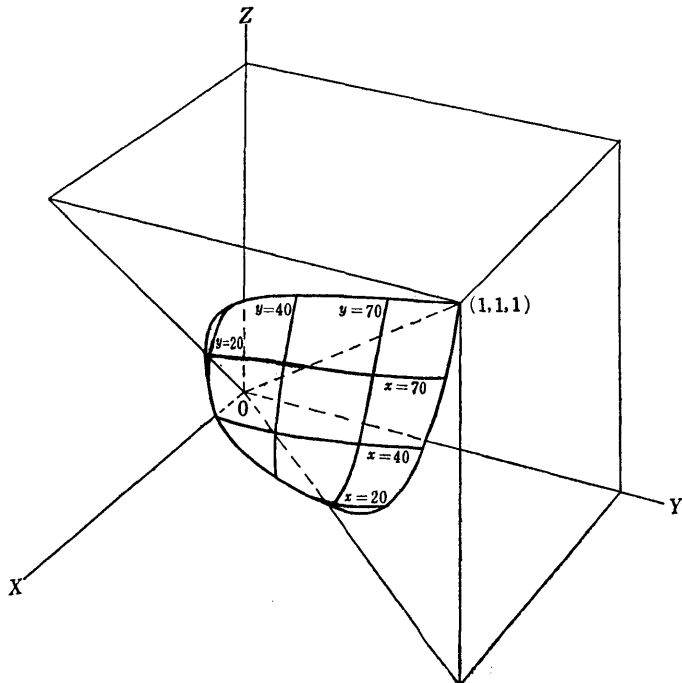


Fig 1. a)

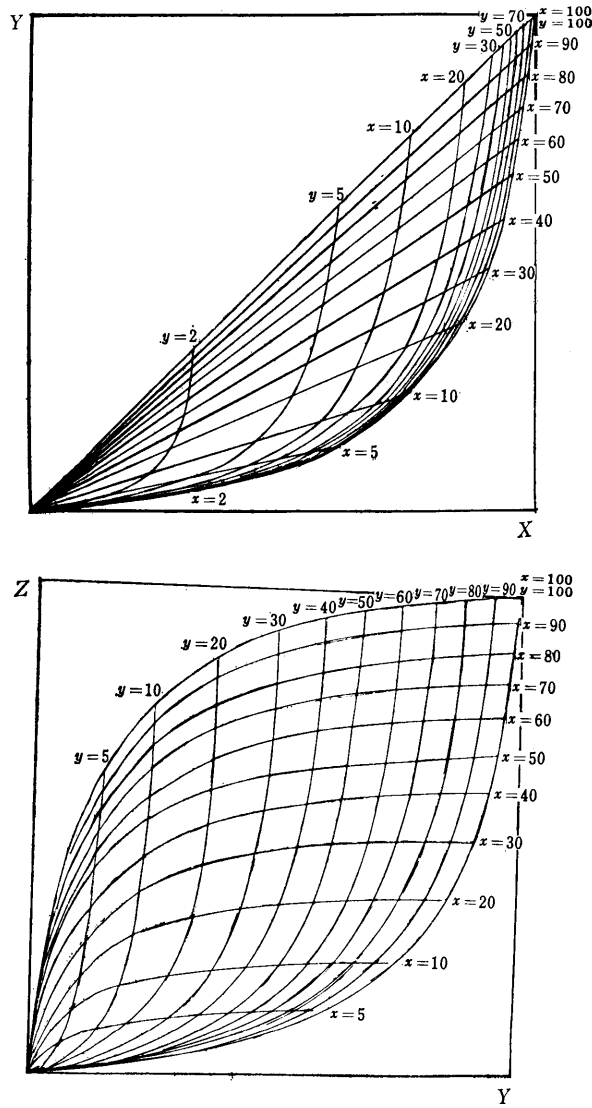


Fig 1. $f(x, y) = \frac{1}{4 \times 0.9^2 x^{3/2} y^{3/2}}$ $1 \leq x, y \leq 100$ 即 $81XYZ = (10Y - X)(10Z - X)$ で示される集中曲面

ここで

$$X = \frac{1}{0.9^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$Y = \frac{1}{10 \times 0.9^2} (\sqrt{x} - 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

$$Z = \frac{1}{10 \times 0.9^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) (\sqrt{y} - 1)$$

ことが分る.

更に単位従法線ベクトル β_x について

$$(15) \quad \beta_x = - \frac{\frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta}{\sqrt{\left\{ \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta \right\}^2 + F_2^2(y)}} i$$

$$+ \frac{F_2(y)}{\sqrt{\left\{ \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta \right\}^2 + F_2^2(y)}} k$$

が成立し、 x に関係しない。従って x 曲線は (13) と併せ考えて結局 Y 軸を含む平面

$$(16) \quad \left\{ \frac{-1}{\mu_y} \int_{-\infty}^y \eta f_2(\eta) d\eta \right\} u + F_2(y) w = 0$$

上にあることが分る。特に $f(x, y)$ が正値分布に従ふならばこの平面が X - Y 平面となす角 ϑ_x は常に $0 \leq \vartheta_x \leq \frac{\pi}{2}$ であることも理解出来る。

但し (16) 式の (u, v, w) は位置ベクトルであり流通座標を表わしている。

同様に我々は y 曲線の振率 τ_y 、曲率 κ_y 、接触平面についてそれぞれ

$$(17) \quad \tau_y = 0,$$

$$(18) \quad \kappa_y = \frac{F_1(x)}{\mu_y f_2(y)}$$

$$\times \sqrt{\left\{ \frac{1}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \xi f_1(\xi) d\xi \right\}^2 + F_1^2(x)}$$

$$\sqrt{F_1^2(x) + \left(\frac{y}{\mu_y}\right)^2 F_1^2(x) + \left\{ \frac{1}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \xi f_1(\xi) d\xi \right\}^2}$$

$$(19) \quad \left\{ \frac{-1}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \xi f_1(\xi) d\xi \right\} u + F_1(x) v = 0$$

を得ることが出来る。

以上で我々は $f(x, y)$ を C^2 級関数としたがもし $f(x, y)$ が連続であれば (8) 式から直接 (16) 及び (19) を導くことが出来る。従って

定理 1 『 C^1 級の密度関数 $f(x, y)$ をもつ独立な確率変数 \mathcal{X}, \mathcal{Y} に関する集中曲面の x 曲線及び y 曲線はそれぞれ Y 軸及び Z 軸を含む平面 (16) 及び (19) の上に存在し、且任意の (x, y) に対応する曲面上の点を通る x 曲線及び y 曲線のこの点に於ける曲率半径はそれぞれ周辺密度関数 $f_1(x)$ 及び $f_2(y)$ に比例する。』

従って、

系 1 『周辺分布 $f_1(x)$ の mode が $x=0$ ならば y 曲線 $x=0$ は集中曲面の一つの稜線 (x 曲線方向についての曲率が最大の点の集合) を形成する。又、 y 曲線 $f_1(x)=0$ は集中曲面の一つの巔線 (尖点の集合) を形成する。此等は $f_2(y)$ 及び x 曲線についても云える。』

又

系 2 『正値分布の集中曲面上の x 曲線を含む平面が XY 平面となす角 ϑ_x は常に

$$0 \leq \vartheta_x \leq \frac{\pi}{2}$$

である。同様にこの曲面上の y 曲線を含む平面が ZX 平面となす角 ϑ_y は

$$0 \leq \vartheta_y \leq \frac{\pi}{2}$$

である。』

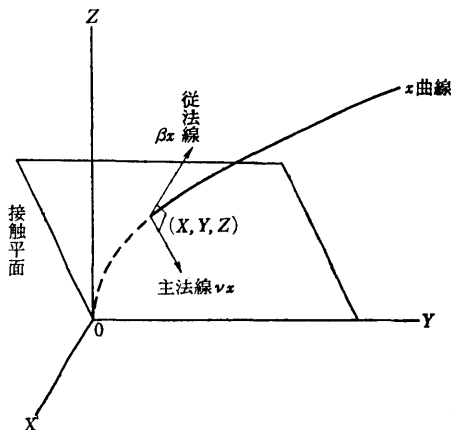


Fig 2. x 曲線の状態

今, 集中曲面 (1) の境界は $x=\infty$ 及び $y=\infty$ で与えられる* こと, 及び $x \rightarrow \infty$ 又は $y \rightarrow \infty$ のとき $f_1(x) = 0 \left(\frac{1}{x^3} \right)$ 又は $f_2(y) = 0 \left(\frac{1}{y^3} \right)$ が成立するならば $f_1(x)$ 又は $f_2(y)$ は分散が存在するが, その他の場合は分散が存在しないパレート・ジップを代表する本来的な歪み型分布である事を考えると定理 1 から次の関係を得る事が出来る.

定理 2 『もし周辺分布 $f_1(x) (\neq 0)$ が本来的な歪み形分布 (分散が存在しない) ならば, $f(x, y)$ の集中曲面の境界 ($x=\infty$) 上に於ける x 曲線の曲率は常に有限である. 逆に分散を有する分布はその境界上に於て曲率が無限大となる.

又, y 曲線についても周辺分布 $f_2(y)$ が歪み形であるか否かによって同様の事が成立する」 処で $\tau_x = \tau_y = 0$ は任意の集中曲面について成立するものではない. 事実 \mathfrak{V} が \mathcal{R} の C^2 級の一個単調非減少関数として (2) を充す場合, 曲率及び振率は $\varphi(\mathcal{R})$ の形に応じて微妙な変化を示すことを次節に示す事が出来る.

3. ($\mathcal{R}, \mathfrak{V}$) が完全正曲線相関をもつ場合の集中曲面の性質

この場合 $\mathfrak{V} = \varphi(\mathcal{R})$ で表わすならば $\varphi(\mathcal{R})$ は (2) で定義したように \mathcal{R} の単調非減少関数を表わすから勿論, 相関比, 二次元平均差**, 二次元平均偏差等は凡て 0 となる. 又 $\mathcal{R}, \mathfrak{V}$ が完全正直線相関をもつ場合を含むことはいふまでもない.

又 (1) の曲面は parameter x のみを有する原点及び点 (1, 1, 1) を通る三次元ユークリッド空間における曲線を表わしている事は明かであるからその振率 (20) をもとにして考察することが出来る.

即

$$(20) \quad X = F_1(x), \quad Y = \frac{1}{\mu_x} \int_{-\infty}^y \xi f_1(\xi) d\xi, \quad Z = \frac{1}{\mu_y} \int_{-\infty}^x \varphi(\xi) f_1(\xi) d\xi$$

$$(21) \quad \frac{dX}{dx} = f_1(x), \quad \frac{dY}{dx} = \frac{1}{\mu_x} x f_1(x), \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{\mu_y} \varphi(x) f_1(x)$$

$$(22) \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = f_1'(x), \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{\mu_x} \{f_1(x) + x f_1'(x)\},$$

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} = \frac{1}{\mu_y} \{\varphi'(x) f_1(x) + \varphi(x) f_1'(x)\}$$

$$(23) \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = f_1''(x), \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} = \frac{1}{\mu_x} \{2f_1'(x) + x f_1''(x)\},$$

$$\frac{d^3 Z}{dx^3} = \frac{1}{\mu_y} \{\varphi''(x) f_1(x) + 2\varphi'(x) f_1'(x) + \varphi(x) f_1''(x)\}$$

が成立する.

従って

$$D_x = \frac{f_1(x)}{\mu_x \mu_y} \begin{vmatrix} 1 & x & \varphi(x) \\ f_1'(x) & f_1(x) + x f_1'(x) & \varphi'(x) f_1(x) + \varphi(x) f_1'(x) \\ f_1''(x) & 2f_1'(x) + x f_1''(x) & \varphi''(x) f_1(x) + 2\varphi'(x) f_1'(x) + \varphi(x) f_1''(x) \end{vmatrix}$$

D_x に於て (第二行) - (第一行 $x f_1'(x)$) 及び (第三行) - (第一行 $x f_1''(x)$) を考えると

$$D_x = \frac{f_1(x)}{\mu_x \mu_y} \begin{vmatrix} 1 & x & \varphi(x) \\ 0 & f_1(x) & \varphi'(x) f_1(x) \\ 0 & 2f_1'(x) & \varphi''(x) f_1(x) + 2\varphi'(x) f_1'(x) \end{vmatrix}$$

* 拙稿 [2] Proposition 2 参照

** 篇末 [2] 参照

更に (第三行) - (第一行) $\times 2 \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}$ を考えると

$$D_x = \frac{f_1(x)}{\mu_x \mu_y} \begin{vmatrix} 1 & x & \varphi(x) \\ 0 & f_1(x) & \varphi'(x) f_1(x) \\ 0 & 0 & \varphi''(x) f_1(x) \end{vmatrix}$$

結局

$$(24) \quad D_x = \frac{\varphi''(x) f_1^3(x)}{\mu_x \mu_y}$$

従って

$$(25) \quad \tau_x = \frac{\varphi''(x)}{\mu_x \mu_y f_1(x) \left[\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{\varphi'^2(x)}{\mu_y^2} + \left\{ \frac{x \varphi'(x) - \varphi(x)}{\mu_x \mu_y} \right\}^2 \right]}$$

が成立する。(25) によりもし曲線 (1) が同一平面上にある, すなわ振率が 0 である為には $f_1(x) \neq 0$ の時

$$\varphi''(x) = 0$$

すなわち

$$(26) \quad y = \alpha x + \beta$$

つまり \mathcal{X}, \mathcal{Y} が完全正直線相関をもつことが必要且充分である事が分る。

一方 (25) 式は τ の符号が曲線

$$(2') \quad y = \varphi(x)$$

の曲率のそれによって左右されることを示している。

話を簡単にする為に今 $f(x, y)$ を $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ の正値分布であるとすれば

$$(27) \quad \mu_x > 0, \quad \mu_y > 0$$

であり, この時は, (1) の振率と (2') 上の対応点の曲率は常に同一符号をとり, 又その半径は周辺密度関数に比例する。

又曲率については,

$$(28) \quad \kappa = \frac{1}{f_1(x)} \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{\varphi'^2(x)}{\mu_y^2} + \frac{\{x \varphi'(x) - \varphi(x)\}^2}{\mu_x^2 \mu_y^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2 + \left\{\frac{\varphi(x)}{\mu_y}\right\}^2}^3}$$

従ってこの場合も, (x, y) に対応する曲線 (20) 上の点は密度関数に比例した曲率半径をもつことが分る。

更に単位従法線ベクトル β について

$$(29) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{\varphi'^2(x)}{\mu_y^2} + \frac{\{x \varphi'(x) - \varphi(x)\}^2}{\mu_x^2 \mu_y^2}}} \left\{ \frac{x \varphi'(x) - \varphi(x)}{\mu_x \mu_y} \mathbf{i} - \frac{\varphi'(x)}{\mu_y} \mathbf{j} + \frac{1}{\mu_x} \mathbf{k} \right\}$$

が成立するから, 接触平面の方程式は流通座標 (u, v, w) を用いて

$$(30) \quad \{x \varphi'(x) - \varphi(x)\} (u - X) - \mu_x \varphi'(x) (v - Y) + \mu_y (w - Z) = 0$$

となる。

従ってこの平面と $Y-Z$ 平面との交線が Y 軸となす角を θ とすれば

$$(31) \quad \tan \theta = \frac{\mu_x}{\mu_y} \varphi'(x)$$

が成立する。

又、 \mathcal{X}, \mathcal{Y} が完全正直線相関々係にあるならば (26) が成立するものと考えられるから (30) は

$$\beta(u - X) + \mu_x a(v - Y) - \mu_y(w - Z) = 0$$

となる。これは x, y に関係せず、又 $\tau=0$ 、つまり曲線は原点を通る同一平面上にあることが既知であるから結局

$$(32) \quad \beta u + a\mu_x v - \mu_y w = 0$$

又は

$$(32') \quad \frac{u - w}{v - w} = -\frac{\beta}{a\mu_x} \quad (\text{一定})$$

が曲線 (20) の任意の点 (x, y) について成立することが分る。

この時又従法線と均等線

$$(33) \quad X = Y = Z$$

となす角 θ を考えると

$$\cos \theta = \beta + a\mu_x - \mu_y = 0$$

となるから結局 (32) 又は (33) の平面は均等線を含むものであり、且この場合 (31) から

$$(34) \quad \tan \theta = \frac{\mu_x}{\mu_y} a = 1 - \frac{\beta}{a\mu_x + \beta}$$

となる。

一方曲線 (20) の曲率は

$$(35) \quad \kappa = \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{a^2}{\mu_y^2} + \frac{\beta^2}{\mu_x^2 \mu_y^2}}}{f_1(x) \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2 + \left(\frac{ax + \beta}{\mu_y}\right)^2}}^3$$

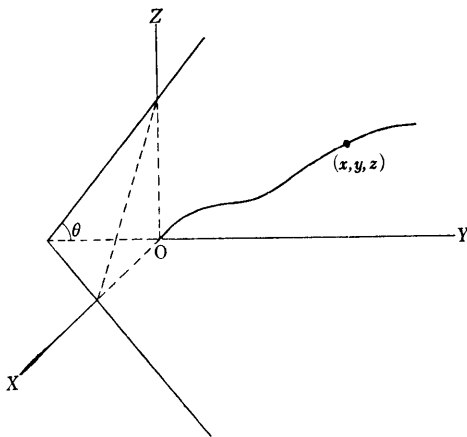


Fig 3. $\mathcal{Y}=\varphi(\mathcal{X})$ の集中曲線

となり曲率半径は密度関数と曲線の長さの微係数の三乗のみに比例することが分る。更に $\beta=0$ つまり $\varphi(x)$ が原点を通る直線ならば

$$(36) \quad \kappa = \frac{\sqrt{2}\mu_x^2}{f_1(x)\sqrt{\mu_y^2 + 2x^2}}^3$$

が成立し、従ってこの場合の集中曲面(線)は方向係数 a の如何に関係なく

$$a\mu_x Y = \mu_y Z$$

すなわち

$$(37) \quad Y = Z$$

面上の曲率 (36) をもつ定曲線となる。

以上を纏めると

定理 3 『 C^2 級の密度関数 $f(x, y)$ をもつ確率ベクトル $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ が C^2 級の単調非

減少な関数関係 $\mathcal{Y}=\varphi(\mathcal{X})$ をみたす時、その集中曲面は (20) で示される空間曲線を与え、且この曲線上の任意の点 (X, Y, Z) における振率はそれに対応する $y=\varphi(x)$ 上の点における曲率と同符号をもつ。又 (X, Y, Z) における曲率半径、振率半径は共に $f_1(x)$ に比例する。』

系 3 『定理 3 の条件をみたす集中曲線は $f_1'(x)(\mu_x^2 + 2x^2) + 6f_1(x)x=0$ をみたす x に対応する点に於て曲率最大であり又 $f_1(x)=0$ をみたすに対応する点に於て尖点を有する。』

定理 4 『定理 3 の条件をみたす集中曲線上の x に対応する点に於ける接触平面と $Y-Z$ 面との交線が Y 軸に対してなす角 θ の正接は $\varphi'(x)$ に比例する。従って特に $\varphi(x)$ の変曲点に

対応する点の接触平面は $X-Z$ 面に直交する.]

系 4 『定理 3 の条件をみたす正値分布の集中曲線の振率はその対応点に於ける $\varphi(x)$ の曲率と同じ符号をもつ. 又定理 4 の θ について, 常に

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

が成立する.]

系 5 『確率変数 \mathcal{H} 及び \mathfrak{H} が (26) 式で示されるような完全正直線相関を示すならば, その集中曲面は, (32) 又は (32') で与えられる均等線を含む平面上の曲線となり, その曲率は (35) 式で表わされる.]

系 6 『確率変数 \mathcal{H} 及び \mathfrak{H} が同時一次の関係

$$\mathfrak{H} = \lambda \mathcal{H} \quad \lambda > 0$$

にあるならば $(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ の集中曲面線は $Y=Z$ 面上の曲率 (36) をみたす α に拘りのない定曲線となる.]

4. $(\mathcal{H}, \mathfrak{H})$ が完全負曲線相関をもつ場合の集中曲面の性質

\mathfrak{H} が \mathcal{H} の C^2 級単調非増加一価関数として

$$(38) \quad \mathfrak{H} = \phi(\mathcal{H})$$

をみた場合 (1) の集中曲面は

$$(39) \quad \begin{aligned} X &= \int_{\phi^{-1}(y)}^x f_1(\xi) d\xi, \\ Y &= \frac{1}{\mu_x} \int_{\phi^{-1}(y)}^x \xi f_1(\xi) d\xi \\ Z &= \frac{1}{\mu_y} \int_{\phi^{-1}(y)}^x \phi(\xi) f_1(\xi) d\xi \end{aligned}$$

となる.

この時 $f_1(x)$, $\phi(x)$ が共に連続ならば $X=X_0$ と固定した場合 y は x の連続関数となり (Y, Z) は $X=X_0$ 面上の一つの曲線を描く. 従って (39) 式は前節と異なり一般に空間曲線ならざる曲面を与える. 故に此の場合は前々節と同様 x 曲線 y 曲線について考察する要がある.

今 y を y_0 に固定した x 曲線を考えると

$$(40) \quad X_x = f_1(x), \quad Y_x = \frac{1}{\mu_x} x f_1(x), \quad Z_x = \frac{1}{\mu_y} \phi(x) f_1(x)$$

$$(41) \quad X_{xx} = f_1'(x), \quad Y_{xx} = \frac{1}{\mu_x} \{f_1(x) + x f_1'(x)\},$$

$$Z_{xx} = \frac{1}{\mu_y} \{\phi'(x) f_1(x) + \phi(x) f_1'(x)\}$$

$$(42) \quad X_{xxx} = f_1''(x), \quad Y_{xxx} = \frac{1}{\mu_x} \{2f_1'(x) + x f_1''(x)\},$$

$$Z_{xxx} = \frac{1}{\mu_y} \{\phi''(x) f_1(x) + 2\phi'(x) f_1'(x) + \phi(x) f_1''(x)\}$$

がそれぞれ成立し, これは前節 (21), (22), (23) 式と全く同じ関係を示す.

従って, (25) 式から

$$(43) \quad \tau_x = \frac{\phi''(x)}{\mu_x \mu_y f_1(x) \left[\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{\phi'^2(x)}{\mu_y^2} + \left\{ \frac{x \phi'(x) - \phi(x)}{\mu_x \mu_y} \right\}^2 \right]}$$

を得ることが出来る。

又 (26) 式に於て $\alpha < 0$ と考えた場合すなわち完全負直線相関性があれば $\tau_x = 0$ となり x 線は凡て (32) (32)' 式で与えられる同一平面上に存在することが分る。

曲率 κ についてもそれぞれの条件に応じて (28) (35) 及び (36) と同様、又は同一関係が得られる。

つまり

$$(44) \quad \kappa_x = \frac{1}{f_1(x)} \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_x^2} + \frac{\phi'^2(x)}{\mu_y^2} + \frac{\{x\phi'(x) - \phi(x)\}^2}{\mu_x^2 \mu_y^2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\mu_x}\right)^2 + \left\{\frac{\phi(x)}{\mu_y}\right\}^2}}$$

等が成立する。

同様に接触平面はそれぞれ (30), (32), (37) に一致或は対応する。

従つて曲率, 振率, 単位従法線ベクトルはこの場合にも y_0 のとり方に無関係で x のみによつて決定されることが分る。

擬集中曲面 (1) は (39) の他に

$$(45) \quad X = \int_{\phi(x)}^y f_2(\eta) d\eta, \quad Y = \frac{1}{\mu_x} \int_{\phi(x)}^y \phi^{-1}(\eta) f_2(\eta) d\eta, \quad Z = \frac{1}{\mu_y} \int_{\phi(y)}^y \eta f_2(\eta) d\eta$$

と表わされるからこれに基づいて y 曲線を考察することが出来る。つまりこの場合 (40), (41), (42) に対応して

$$(46) \quad X_y = f_2(y), \quad Y_y = \frac{1}{\mu_x} \phi^{-1}(y) f_2(y), \quad Z_y = \frac{1}{\mu_y} y f_2(y)$$

$$(47) \quad X_{yy} = f_2'(y), \quad Y_{yy} = \frac{1}{\mu_x} \left\{ \frac{f_2(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} + \phi^{-1}(y) f_2'(y) \right\},$$

$$Z_{yy} = \frac{1}{\mu_y} \{f_2(y) + y f_2'(y)\}$$

$$(48) \quad X_{yyy} = f_2''(y),$$

$$Y_{yyy} = \frac{1}{\mu_x} \left\{ 2 \frac{f_2'(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} - \frac{\phi'' \{\phi^{-1}(y)\} f_2(y)}{\phi'^3 \{\phi^{-1}(y)\}} + \phi^{-1}(y) f_2''(y) \right\}$$

$$Z_{yyy} = \frac{1}{\mu_y} \{2 f_2'(y) + y f_2''(y)\}$$

が得られるから

$$D_y = \frac{1}{\mu_x \mu_y} \begin{vmatrix} f_2(y) & \phi^{-1}(y) f_2(y) & y f_2(y) \\ f_2'(y) & \frac{f_2(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} + \phi^{-1}(y) f_2'(y) & f_2(y) + y f_2'(y) \\ f_2''(y) & 2 \frac{f_2'(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} - \frac{\phi'' \{\phi^{-1}(y)\} f_2(y)}{\phi'^3 \{\phi^{-1}(y)\}} + \phi^{-1}(y) f_2''(y) & 2 f_2'(y) + y f_2''(y) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_x \mu_y} \begin{vmatrix} f_2(y) & \phi^{-1}(y) f_2(y) & y f_2(y) \\ 0 & \frac{f_2(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} & f_2(y) \\ 0 & 2 \frac{f_2'(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} - \frac{\phi'' \{\phi^{-1}(y)\} f_2(y)}{\phi'^3 \{\phi^{-1}(y)\}} & 2 f_2'(y) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mu_x \mu_y} \begin{vmatrix} f_2(y) & \phi^{-1}(y) f_2(y) & y f_2(y) \\ 0 & \frac{f_2(y)}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} & f_2(y) \\ 0 & -\frac{\phi'' \{\phi^{-1}(y)\} f_2(y)}{\phi'^3 \{\phi^{-1}(y)\}} & 0 \end{vmatrix}$$

結局

$$(49) \quad D_y = \frac{f_2^3(y)}{\mu_x \mu_y} \frac{\phi'' \{\phi^{-1}(y)\}}{\phi'^3 \{\phi^{-1}(y)\}}$$

となりこれから

$$(50) \quad \tau_y = \frac{1}{\mu_x \mu_y f_2(y)} \frac{\phi'' \{\phi^{-1}(y)\}}{\phi'^3 \{\phi^{-1}(y)\}} \frac{1}{\frac{1}{\mu_x^2 \mu_y^2} \left[\phi^{-1}(y) - \frac{y}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} \right]^2 + \frac{1}{\mu_y^2} + \frac{1}{\mu_x^2 [\phi' \{\phi^{-1}(y)\}]^2}}$$

が成立つ。こゝで $\phi'(x) \leq 0$ を考えると、

y 曲線の振率はパラメーターに関する曲線 $y = \phi(x)$ 上の点 $(\phi^{-1}(y), y)$ の曲率と逆の符号をもち、振率半径は周辺密度関数 $f_2(y)$ に比例することが分る。

又容易に

$$(51) \quad \kappa_y = \frac{1}{f_2(y)} \frac{\sqrt{\frac{1}{\mu_x^2 \mu_y^2} \left[\phi^{-1}(y) - \frac{y}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} \right]^2 + \frac{1}{\mu_y^2} + \frac{1}{\mu_x^2 [\phi' \{\phi^{-1}(y)\}]^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\{\phi^{-1}(y)\}^2}{\mu_x^2} + \frac{y^2}{\mu_y^2}}}$$

及び接触平面の方程式

$$(52) \quad \left[\phi^{-1}(y) - \frac{y}{\phi' \{\phi^{-1}(y)\}} \right] (u - X) - \mu_x (v - Y) + \frac{\mu_y}{[\phi' \{\phi^{-1}(y)\}]} (w - Z) = 0$$

が得られる。

つまり曲率半径 ρ_y も $f_2(y)$ に比例して増減する。

一方 τ_y , κ_y 及び接触平面、単位従法線ベクトルは x の固定の仕方に無関係である。

特に $\phi(x)$ が (26) をみたすならば (50), (51), (52) の関係はそれぞれ

$$(53) \quad \tau_y = 0$$

$$(54) \quad \kappa_y = \frac{\sqrt{\frac{\beta^2}{\mu_y^2 \mu_x^2} + \frac{\alpha^2}{\mu_y^2} + \frac{1}{\mu_x^2}}}{-a f_2(y) \sqrt{1 + \frac{(y - \beta)^2}{\alpha^2 \mu_x^2} + \frac{y^2}{\mu_y^2}}}$$

$$\beta(u - x) + \alpha \mu_y (v - Y) - \mu_y (w - Z) = 0$$

となる。

この最後の方程式は x 曲線の接触平面について考察した場合と同様、結局は (32) 或は (32') 式に帰着する。

更に $\beta = 0$ とすれば

$$(55) \quad \kappa_y = \frac{\sqrt{2} \mu_x^2 \alpha^2}{f_2(y) \sqrt{\alpha^2 \mu_x^2 + 2y^2}}$$

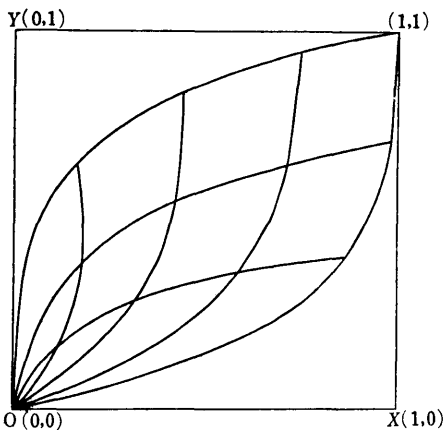


Fig 4. $\mathcal{V}=\phi(\mathcal{X})$ の場合の x 曲線及び y 曲線

及び (37) の関係を得る。

従って

定理 5 『 C^2 級の密度関数 $f(x, y)$ が C^2 級の単調非増加一価関数 $y=\phi(x)$ 上で定義されているとき、その集中曲面の $y=y_0$ を充す x 曲線の振率は $\phi(x)$ の x における曲率と同じ符号をもつ、且曲率半径及び振率半径は y_0 の値に関係なく共に $f_1(x)$ に比例する。

然し $x=x_0$ を充す y 曲線の振率は $x=\phi^{-1}(y)$ の y における曲率と反対の符号をもちその曲率半径及び振率半径は、共に x_0 の値に関係なく $f_2(y)$ に比例する。』

系 7 『定理 5 の条件をみたす曲面に於て特に x 曲線 $f_2(y)=0$ 及び x 曲線 $\phi\{\phi^{-1}(y)\}=0$ が集中曲面の襞線を与える。』

定理 6 『定理 5 の条件を充す集中曲面の任意の x 曲線上の一点に於ける接触平面と $Y-Z$ 平面との交線が Y 軸に対してなす角 θ_x の正接は $\phi'(x)$ に比例する。従って特に $\phi'(x)=0$ つまり変曲点に於ては接触平面は $Z-X$ 面に直交する。

同様に任意の y 線上の一点に於ける接触平面と $Y-Z$ 平面との交線が Y 軸をなす角 θ_y の正接は $\phi\{\phi^{-1}(y)\}$ に比例する。従って特に $\phi\{\phi^{-1}(y)\}=0$ ならばこの点に於ける接触平面は $Z-X$ 面に直交する』

特に

系 8 『定理 5 の条件をみたす正値分布の集中曲面の x 曲線上の任意の一点に於ける振率は $y=\phi(x)$ 上の対応点の曲率と同じ符号をもつ。又 y 曲線上の任意の一点に於ける振率は $x=\phi^{-1}(y)$ 上の対応点の曲率と逆の符号をもつ。

又定理 6 の θ_x, θ_y について常に

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_x, \quad \theta_y \leq 0$$

が成立する』

系 8 及び次の系 9 系を 4 と比較すると、正、負両直線相関の相互関係についての理解が得られる。

系 9 『確率変数 \mathcal{X}, \mathcal{Y} が (26) 式を充し且完全負直線相関関係 (つまり $\alpha < 0$) にあるならばその集中曲面は (32) 又は (32') で表わされる平面上に存在する。又更に \mathcal{X}, \mathcal{Y} が同時一次の関係にあれば集中曲面は常に $Y=Z$ 面上にあり、その x 曲線及び y 曲線の任意の一点に於ける曲率は α に関係しない。』

5. 一般の集中曲面の性質

以上の各節 2, 3, 4 では特殊な集中曲面について x 曲線, y 曲線等の曲率, 振率等を中心に考察して来た。然し此の方法を任意の集中曲面に直接適用すると、複雑な計算を伴いその特性の把握が難かしい。従って、一般の曲面を解析する前に角度を変えてまず 2, 3, 4 の各節で扱った曲面を再検討することにする。

まず \mathcal{X}, \mathcal{Y} が独立な場合その x 曲線 $y=y_0$ は (1) 式より直ちに

$$X = F_2(y_0) F_1(x), \quad Y = \frac{F_2(y_0)}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \zeta f_1(\zeta) d\zeta, \quad Z = \frac{\int_{-\infty}^{y_0} \eta f_2(\eta) d\eta}{\mu_y} F_1(x)$$

となる。つまり x 曲線の X - Y 面への projection は \mathcal{H} の一次元集中曲線の位置ベクトル $(F_1(x), \frac{1}{\mu_x} \int_{-\infty}^x \xi f_1(\xi) d\xi)$ と定ベクトル $(F_2(y_0), F_2(y_0))$ との内積で与えられるから、一般に一次元集中曲線が常に X 軸に対して凸であることを考えれば、この x 曲線の X - Y 面への射影によって得られる曲線も X 軸に対して凸であることが分る。 y 曲線についても同様に Y の Z - X 面への射影が X 軸に対して凸であるといえる。

又、 \mathcal{H}, \mathcal{V} が第2節で扱ったように相互に非減少な関数関係にある場合 (1) の曲面は (20) の曲線を表わしその X - Y 平面及び Z - X 平面への射影は共にそれぞれ \mathcal{H} 及び \mathcal{V} に関する一次元集中曲線そのものを示すから上の場合と同様、曲線 (20) は X 軸に対し凸なる射影をもつといえる。逆に \mathcal{H}, \mathcal{V} が第3節で扱ったように相互に非増加な関数関係にある場合には、例えば x 曲線 $y=y_0$ について (39) 式から直ちに分るようにその X - Y 面への射影は \mathcal{H} の lower truncated density function の集中曲線ベクトル (\bar{X}, \bar{Y}) すなわち

$$(56) \quad \bar{X} = \frac{F(x) - F(\phi^{-1}(y_0))}{1 - F(\phi^{-1}(y_0))},$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{E(\mathcal{H}/\mathcal{H} \geq \phi^{-1}(y_0))} \int_{\phi^{-1}(y_0)}^y \xi \frac{f_1(\xi)}{1 - F(\phi^{-1}(y_0))} d\xi$$

と定ベクトル $(1 - F(\phi^{-1}(y_0)), \{1 - F(\phi^{-1}(y_0))\} \frac{E(\mathcal{H}/\mathcal{H} \geq \phi^{-1}(y_0))}{\mu_x})$ との内積となり従ってこの場合も又 XY 平面への射影が X 軸に対して凸であることを示している。今一般に (1) 式の X, Y を

$$(57) \quad X = F_2(y_0) \frac{F(x, y_0)}{F_2(y_0)},$$

$$Y = \frac{F_2(y_0) E(\mathcal{H}/\mathcal{V} \leq y_0)}{\mu_x} \cdot \frac{1}{E(\mathcal{H}/\mathcal{V} \leq y_0)} \int_{-\infty}^x \xi \frac{F_x(x, y_0)}{F_2(y_0)} d\xi$$

と書き直すと、任意の集中曲面上の x 曲線 $y=y_0$ の X - Y 平面への射影は、 \mathcal{H} の条件付確率密度関数 $\frac{F_x(x, y_0)}{F_2(y_0)}$ の集中曲線を示す位置ベクトル (X_0, Y_0) 、すなわち

$$(58) \quad X_0 = \frac{F(x, y_0)}{F_2(y_0)}, \quad Y_0 = \frac{1}{E(\mathcal{H}/\mathcal{V} \leq y_0)} \int_{-\infty}^x \xi \frac{F_x(x, y_0)}{F_2(y_0)} d\xi$$

と定ベクトル $(F_2(y_0), \frac{F_2(y_0) E(\mathcal{H}/\mathcal{V} \leq y_0)}{\mu_x})$ との内積であることが分る。

従ってこの場合にもこの射影曲線が X 軸に対し凸であることを知ることが出来る。又同様に (1) 式における X, Z を

$$(59) \quad X = F_1(x) \frac{F(x_0, y)}{F_1(x_0)},$$

$$Z = \frac{F_1(x) E(\mathcal{V}/\mathcal{H} \leq x_0)}{\mu_y} \cdot \frac{1}{E(\mathcal{V}/\mathcal{H} \leq x_0)} \int_{-\infty}^y \eta \frac{F_y(x_0, y)}{F_1(x_0)} d\eta$$

と書き直すと、任意の集中曲面の y 曲線の Z - X 平面への射影が X 軸に対して凸であることが分る。

更に x 曲線の X - Y 面への射影曲線相互間又は y 曲線の Z - X 面への射影曲線相互間では決して交わることがないことは後掲 [2] の Proposition 2 の証明によって知ることが出来る。

以上の諸結果を纏めると

定理 7 『連続な密度関数 (1) の集中曲面はその任意の点に於て X 軸に対し非凹である。つまりその点の近傍に於て曲面が接触平面に対し X 軸の側にもみ存在することはない』

更に任意の x 曲線 $y=y_0$ の X - Y 面への projection を考えると

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{x}{\mu_x} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, \eta) d\eta}{\int_{-\infty}^{y_0} f(x, \eta) d\eta} = \frac{x}{\mu_x}$$

が成立する。従って

定理 8 「 x 曲線群に於て $\frac{dY}{dX}$ を等しくする ($=C_1$) 点を辿ればそれは一つの y 曲線 $x=c_1\mu_x$ を形成する。逆に y 曲線群に於て $\frac{dZ}{dX}$ を等しくする ($=c_2$) 点を辿ればそれは一つの x 曲線 $y=c_2\mu_y$ を形成する。

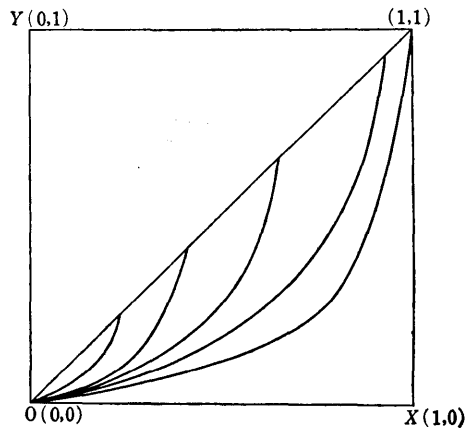


Fig 5. 任意に与えられた連続な密度関数の集中曲面の x 曲線

一般に集中曲面の任意の点に於ける曲面の曲率半径及び捩率半径が共にその点に対応する密度 $f(x, y)$ と密接に関係していることが予想出来そうである。然しその正確な証明はこの試論の小稿にとっては可成りの負担になりそうである。何れ再検討の機会があることを信じて擱筆する。

6. む す び

以上の試論及び後掲 [2] で扱った問題を通じて我々は統計的概念、解析法について一つの見解を得たように思う。つまり Gini の統計観、方法論を発展的に適用すれば、それは場の概念及び vector 解析の方法に結びつかざるを得ないということである。そしてそれは更に統計的な力の概念に発展するようと思われる。Gini はこの意味で Pearson と並び統計解析上の歴史的転換を与えていることを再確認することが出来る。

統計数理研究所

文 献

- [1] C. Gini, "On the characteristics of Italian statistics" J. R. S. S., Vol. 128, 1965.
- [2] T. Taguchi, "On the two-dimensional concentration surface (Lorenz surface), its extension to the multiple dimension, a generalization of concentration coefficient (Gini coefficient), and some related problems.
—On an application of differential geometric methods to statistics— Ann. Inst. Stat. Math. (to be appeared)
- [3] 田口時夫: "多次集中曲面と多次元集中係数(続)" 第39回日本統計学会研究報告会講演予稿集.