平均1の Galton-Watson 過程の箇数分布の漸近形

今　井　晴　男

(1969年 11月　受付)

On an Asymptotic Form of the Individual Distribution of the Galton-Watson Process with Mean One

Haruo Imai

We give an asymptotic form for the individual probabilities P* (t, n) of the discrete time Galton-Watson process with mean one, given that the process is not extinct, where the generation t and the numbers n of the individual are such that
$0<c_1\leq t^{-1}n\leq c_2<\infty$.

The Institute of Stasistical Mathematics

§ 1.

粒子が独立に，同一規則にしたがって分裂消滅していくとき，世代 t における箇数 z_t が Galton-Watson 過程である．したがって状態空間 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ の上の離散パラメータのマルコフチェインで，推移確率 p_{ij} が $p_{1j}=p_j$ の i 回コンボリューション $p_j{}^{*i}$ で与えられる．

分裂確率 $p_\kappa=p_{1\kappa}$ の生成関数を $g(x)$ とする，$g(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots$.

分裂箇数の平均 $m=g'(1)$ が1の場合を考える．意味のない場合を除外するために，$p_1\neq 1$ とする．

$z_0=1$ から始まる Galton-Watgon 過程で，世代 t における粒子数 z_t の確率分布を

$$p(t, \kappa)=P(z_t=\kappa)$$

その生成関数を

$$G(t, x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(t, \kappa)\, x^\kappa$$

とする．粒子が独立に分裂するから

$$P(z_{t+s}=\kappa/z_t=n)=P^{*n}(s, \kappa)$$

で与えられる。ここに P^{*n} は，n 回コンボリューションを表わす．生成関数で表わせば，

$$G(t+s, x)=G(s, G(t, x)) \tag{1}$$

$$G(0, x)=x,\ G(1, x)=g(x),$$

で特長つけられる．$G(t, x)$ は $g(x)$ の t 回反復である，$G(t, x)=g_t(x)$，$g_t(x)=g(g_{t-1}(x))$.

世代 t で z_t が消滅しないとの条件のもとでの分布を $P^*(t, n)=P(z_t=n, z_t>0)$ とかくと

$$P^*(t, n)=\frac{P(t, n)}{1-P(t, 0)},\quad (n=1, 2, \cdots)$$

である．この分布をもつ変数を $z_t{}^*$ と書く．

$P^*(t, n)$ の平均は，後に示すように，$\dfrac{bt}{2}+0(\log t)$ である．この平均の近くの n に対し，すなわち $0<c_1\leq t^{-1}n\leq c_2<\infty$ なる n について，$P^*(t, n)$ の $t\to\infty$ の漸近的ふるまいを調べる．

§ 2.

Galton-Watson 過程 $G(t+s, x)=G(t, G(s, x))$ で，$g(x)=G(1, x), m=g'(1)=1,\ b=g''(1)=\sigma^2(=\text{Variance}(z_1))$，$c=g'''(1)<\infty$ を仮定する．またつぎの記号を用いる

$$R(t, x)=1-G(t, x)$$
$$q_t=G(t, 0),\quad q=\lim_{t\to\infty} q_t(=1)$$
$$f(x)=g(x)-x;\quad f(1)=0, f(0)=p_0.$$

ここに q_t は世代 t までに消滅する確率である．$f(q_t)=q_{t+1}-q_t$ は，$t+1$ 世代で始めて消滅する確率を与える．q は消滅確率で，ここで考えている場合 ($g'(1)=1,\ p_1\neq 1$) には1である．

z_t^* の分布 $P^*(t, \kappa)=P(t, \kappa)/R(t, 0)\ (\kappa\geqq 1)$ の生成関数および特性関数をそれぞれ

$$G^*(t, x)=\sum_{n=1}^{\infty} P^*(t, \kappa)x^\kappa,$$
$$\varphi_t^*(u)=G^*(t, e^{iu})$$

とかく．

分裂箇数の確率分布 $\{p_\kappa\}$ の格子間隔を h，また $\{P(t, \kappa)\}$ の格子間隔を h_t とする．h は $p_\kappa\neq 0$ なる k の集合の最大公約数である．

個々の確率 $P^*(t, n)$ に関する漸近形を導びくために必要な性質を始めに導びいておく．

(i)　$h=h_t$ したがって $0<u<\dfrac{2\pi}{h}, u\neq 0$ なる u にたいし，$|G(t, e^{iu})|<1,\ |G(t, e^{\pm i2\pi/h}|=1$

これは基になる関係 (1) と格子形分布の特性関数の一般な性質 ([2]) から容易にわかる．

(ii)　$|R(t, x)|\leq 2R(t, 0)$，$|x|\leq 1$．したがって，$|x|\leq 1$ で一様に $|R(t, x)|\to 0$.

(証明)　$|R(t, x)|=|1-\sum_{\kappa=0}^{\infty} P(t, k)x^\kappa|\leqq 1-P(t, 0)+\sum_{\kappa=1}^{\infty} P(t, \kappa)$

この最後の和は $1-P(t, 0)=R(t, 0)$ に等しいから，$|P(t, x)|\leq 2R(t, 0)$ が成立つ．

また $R(t, 0)\uparrow 0$ ([1]) であるから，$|x|\leq 1$ で一様に $R(t, x)\to 0$ となる．(証明終)

ここでつぎの記号を導入する

$$D=\{x;\ |x|\leq 1\},$$
$$D_0=\{x\in D;\ |g(x)|<1\},$$
$$D_1=\{x\in D;\ |g(x)|\leq 1-\alpha\}\quad \alpha>0.$$

ただし α は任意に小さい定数である．

$$0<u<\frac{2\pi}{h}\text{ で }|g(e^{iu})|<1,$$

$$g(e^{i2n\pi/h})=p_0+p_he^{i2\pi n}+p_{2h}e^{i2\pi 2n}+\cdots=1,$$

したがって，$|g(x)|=1$ ならば $g(x)=1$ である ($|x|\leq 1$)．このことから，D_0 は D から h 箇の点 $\exp\left(i\dfrac{2n\pi}{h}\right)$ ($n=0, 1, \cdots h-1$) を除いた集合，D_1 はこれら h 箇の点の近傍を除いた集合である．

(iii)　$x\in D_1$ において，$t\to\infty$ で

$$R(t, x)=\frac{2}{bt}\left[1+0\left(\frac{\log t}{t}\right)\right] \tag{2}$$

定数 T が存在して，$t\geqq T$，$x\in D_0$ にたいし

$$\frac{1}{R(t, x)}-\frac{1}{R(T, x)}=\frac{b}{2}\ t+A(t, x)\ \log(t) \tag{3}$$

ここに $A(t, x)$ は有界である，$|A(t, x)|\leq A$.

(証明)　$g(1-R(t, x))$ を展開して

$$g(1-R(t,x))=g(1)-g'(1)R+\frac{1}{2}g''(1)R^2-rR^3$$

$(r\leq 2g'''(1))$, ただし $R=R(t,x)$.

したがって

$$g(1-R)=G(t,x)+\frac{b}{2}R^2-rR^3.$$

$$R(t,x)-R(t+1,x)=g(1-R)-G(t,x)=\frac{b}{2}R^2-rR^3. \tag{4}$$

$$\frac{R(t+1,x)}{R(t,x)}=1-\frac{b}{2}R+rR^2 \quad (t\geqq 0, x\in D_0). \tag{5}$$

また D で一様に $R(t,x)\to 0$ であるから, $x\in D$ によらない定数 T があって, $t\geqq T$ にたいし $|R(t,x)|<\varepsilon$ となる. (5) から

$$\frac{R(t,x)}{R(t+1,x)}=1+\frac{b}{2}R+r_1R^2 \quad (t\geqq T, x\in D_0) \tag{6}$$

ここに r_1 は有界

$$\delta(t,x)\equiv\frac{1}{R(t+1,x)}-\frac{1}{R(t,x)}=\frac{b}{2}+r_2R \quad (t\geqq T, x\in D_0) \tag{7}$$

とかけるから

$$\frac{1}{R(t,x)}-\frac{1}{R(T,x)}=\sum_{\kappa=T}^{t-1}\delta(\kappa,x)=\frac{b}{2}t-\frac{b}{2}T+\sum_{\kappa=T}^{t-1}r_2R(k,x) \tag{8}$$

となる. (6) で $x=0$ とおくと

$$\frac{1}{R(t,0)}-\frac{1}{R(T,0)}=\frac{b}{2}t-\frac{b}{2}T+\sum_{\kappa=T}^{t-1}r_2R(k,0) \tag{9}$$

$R(t,0)\downarrow 0$ であるから, 最後の和は $0(t)$ である. したがって (9) から

$$\frac{1}{R(t,0)}=\frac{b}{2}t\cdot[1+0(1)], \quad \mathrm{R}(t,0)=\frac{2}{bt}[1+0(1)] \tag{10}$$

を得る. (ii) の $|R(t,x)|\leq 2R(t,0)$ と (10) を用いると, (8) によって

$$\frac{1}{R(t,x)}-\frac{1}{R(T,x)}=\frac{b}{2}t+A(t,x)\log t \quad (t\geqq T, x\in D_0) \tag{11}$$

を得る. ここに $A(t,x)$ は有界である. (証明終)

上のことから, とくに

$$\lim_{t\to\infty} tR(t,x)=\frac{2}{b} \quad (x\in D_0) \tag{12}$$

この収束は $x\in D_1$ で一様である.

(iv) $x_n=\exp\left(i\frac{2\pi}{h}n\right)$, $(n=0,1,\cdots h-1)$

とかく. $x\in D_0$ にたいし

$$\frac{1}{R(t,x)}-\sum_{n=0}^{h-1}\cdot\frac{x_n}{x_n-x}=\frac{b}{2}t+A(t,x)\log t \tag{13}$$

$A(t,x)$ は前と同じ.

(証明) はじめに $x=1$ の近傍で考える.

$$g(x)=g(1+(x-1))=1+(x-1)+O(x-1)^2,$$

したがって

$$G(T,x)=1+(x-1)+O(x-1)^2$$

$$R(T, x)=(1-x)+O(x-1)^2$$

とかける．つぎに各 x_n の近傍で

$$g(x)=g(x_n+(x-x_n))=g(x_n)+g'(x_n)(x-x_n)+O(x-x_n)^2=\frac{x}{x_n}+O(x-x_n)^2.$$

$$G(T, x)=G(T-1,\ g(x))=g(x)+O(g(x)-1)^2=\frac{x}{x_n}+O(x-x_n)^2.$$

したがって $x_n=\exp\left(i\frac{2\pi}{h}n\right)$ の近傍で

$$R(T, x)=1-\frac{x}{x_n}+O(x-x_n)^2 \tag{14}$$

したがって

$$\frac{1}{R(T, x)}-\sum_{n=0}^{h-1}\frac{x_n}{x_n-x}$$

は $x\epsilon D_0$ で有界である．(iii) によって

$$\frac{1}{R(t, x)}-\sum_{n=0}^{h-1}\frac{x_n}{x_n-x}=\frac{b}{2}t+O(\log t) \qquad \text{(証明終)}$$

連続パラメータの Galton-Watson 過程から等間隔にサンプリングされた場合，すなわち，連続パラメータの Galton-Watson 過程に埋込める場合は，$h=1$ であるから

$$\frac{1}{R(t, x)}-\frac{1}{1-x}=\frac{b}{2}t+O(\log t)$$

が成立つ．この関係は連続パラメータの場合の極限を調べるのに利用される．

$P^*(t, n)$ の平均を M^*_t，分散を D^*_t と書く．

(v) $$M_t^*=\frac{1}{R(t, 0)}=\frac{b}{2}t+O(\log t)$$

$$D^*_t=\left(\frac{b}{2}t\right)^2+O(t\log t)$$

(証明) M^*_t については (ii) から明らかである．D^*_t はつぎの形にかける．

$$D^*_t=E(z_t{}^{*2})-(Ez^*{}_t)^2=\frac{E(z_t{}^2)}{R(t, 0)}-\frac{1}{R(t, 0)^2}.$$

ここで，$G(t+1, x)=g(G(t, x))$ を用いて，

$G''(t+1, 1)=g''(1)+G''(t, 1)$,

$E(z_{t+1}{}^2)-E(z_{t+1})=b+E(z_t{}^2)-E(z_t)$,

$E(z_t)=1$ であるから，$E(z_{t+1}{}^2)-E(z_t{}^2)=b$.

$E(z_0{}^2)=1$ により，$E(z_{t+1}{}^2)=bt+1$ となる．したがって $\mathrm{Var}(z_t)=bt$ である．

$$D_t^*=\frac{bt+1}{R(t, 0)}-\frac{1}{R(t, 0)^2}$$

に (ii) の $\frac{1}{R(t, 0)}=\frac{bt}{2}\left[1+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right]$ を用いると，$D^*_t=\frac{b^2}{4}t^2+O(t\log t)$ (証明終)

平均 $m=1$, $g'''(1)<\infty(p_1\neq 1)$ のとき，正規化された確率変数 $\frac{z_t{}^*}{E(z_t{}^*)}$ は指数分布に法則収束することはよく知られている ([2] p22, 定理 10·1)

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{2z_t{}^*}{bt}>y\right)=e^{-y}. \tag{16}$$

すなわち，任意に固定した有限区間 $I=\{u,;\ |u|\le A\}$ で一様に

$$\varphi_t^*\left(\frac{2u}{ht}\right)-\frac{1}{1-iu}=0\left(\frac{\log t}{t}\right). \tag{17}$$

我々の目的にはもう少しくわしい計算を必要とする．t よりもゆっくり無限に増加する関数 $L(t)$ を取る，$L(t)\to\infty, t^{-1}L(t)\to 0$.
$|u|\le L(t)$ なる u で (17) が成立つ．

(vi) $L(t)\to\infty, t^{-1}L(t)\to 0$ なる $L(t)>0$ にたいし $|u|\le L(t)$ で $t\to\infty$ のとき

$$\varphi_t^*\left(\frac{2u}{bt}\right)-\frac{1}{1-iu}=0\left(\frac{\log t+L(t)}{t}\right) \tag{18}$$

(証明)　$\varphi_t^*\left(\frac{2u}{bt}\right)=R(t,0)^{-1}\{R(t,0)-R(t,e^{i2u/bt})\}=1-R(t,0)^{-1}R(t,e^{i2u/bt})$.

ところで，$U=\left\{u;\ 0<u<2\pi,\quad u\neq\frac{2n}{h}\pi\right\}$ $(n=0,1,\cdots h-1)$ とかくと，$x=e^{iu}$, $u\in U$ にたいし，(v) により

$$\frac{1}{R(t,x)}=\sum_{n=0}^{h-1}\frac{x_n}{x_n-x}+\frac{b}{2}t+O(\log t)$$

が成立つ．とくに $\frac{1}{R(t,0)}=\frac{b}{2}t\left\{1+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}$

したがって

$$R(t,x)=\frac{2}{bt}\left\{1+\frac{2}{bt}\sum\left(\frac{x_n}{x_n-x}\right)+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}^{-1}.$$

$$\varphi_t^*\left(\frac{2u}{bt}\right)=1-\left\{1+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}\left\{1+\frac{2}{bt}\sum\frac{x_n}{x_n-x}+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}^{-1} \tag{19}$$

$|u|\le L(t)$ において，$x=\exp\left(i\frac{2u}{bt}\right)$ は 1 に近いから，(19) の和で $n=0$ の項が主な項である．

$$\left\{1+\frac{2}{bt}\cdot\sum\left(\frac{x_n}{x_n-x}\right)+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}=\left\{1+\frac{2}{bt}+\frac{1}{1-e^{i2u/bt}}+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}$$

したがって

$$\varphi_t^*\left(\frac{2u}{bt}\right)=1-\left\{1+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}\left\{1+\frac{2}{bt(1-e^{i2u/bt})}+O\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}^{-1} \tag{20}$$

ここで $|u|\le L(t)$ で $\frac{|u|}{t}<\varepsilon$, したがって $bt(1-e^{i2u/bt})=-i2u+u\left[\frac{2u}{bt}+O\left(\frac{u^2}{t^2}\right)\right]$ であるから，

$$\varphi_t^*\left(\frac{2u}{bt}\right)=1-\left\{1+0\left(\frac{\log t}{t}\right)\right\}\left\{\frac{-iu+u\left[\frac{u}{bt}\right]+O\left(\frac{u^2}{t^2}\right)]}{1-iu+u\left[\frac{u}{bt}+O\left(\frac{u^2}{t^2}\right)\right]+O\left(\frac{\log t}{t}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1+O\left(\frac{\log t}{t}\right)+O\left(\frac{u^3}{t^3}\right)}{1-iu+u\left[\frac{u}{bt}+O\left(\frac{u^2}{t^2}\right)\right]+O\left(\frac{\log t}{t}\right)}$$

これから，

$$\varphi^*_t\left(\frac{2u}{bt}\right)=\frac{1}{1-iu}+O\left(\frac{|u|+\log t}{t}\right)$$

とかける．（証明終）

(vii) 任意の n を固定すると，$(n=0, 1, 2, \cdots)$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}G^*(t, x)=0 \quad (x\in D_0) \tag{21}$$

この収束は D_1 で一様である．とくに $0\leq u\leq 2\pi$ から，点 $\frac{2\pi}{h}k$ $(k=0, 1, \cdots h-1)$ を除いた集合 U_0，その ε 近傍を除いた集合 U_ε とすると U_0 で

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d^n}{du^n}\varphi_t^*(u)=0 \quad (n=0, 1, 2\cdots\cdot)$$

U_ε で一様である．

（証明）$x\in D_0$ で $|g(x)|\leqq\alpha<1$，$x\in D_1$ で $|g(x)|$ の最大値 $\alpha_0<1$ である．$n=1$ について示す，$n=2, 3, \cdots\cdot$ についても同じである．

$G(t+1, x)=G(t, g(x))$ と $|g'(x)|\leq m=1$

から，つぎが成立つ

$$\left|\frac{d}{dx}G(t+1, x)\right| \leq \left|\frac{d}{d\alpha}G(t, \alpha)\right|$$

十分大きい N を取ると，$k>N$ にたいして，$k\alpha^{k-1}\leq\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^k\equiv\beta^k$ となる．$(\beta<1)$

$$\frac{d}{d\alpha}G(t, \alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}P(t, k)\ k\alpha^{k-1}\leq N\sum_{k=1}^{N}P(t, k)+\sum_{\kappa=1}^{\infty}P(t, k)\beta^k,$$

したがって

$$\frac{d}{d\alpha}G(t, \alpha)\leq N\sum_{k=1}^{N}P(t, \kappa)+[G(t, \beta)-G(t, 0)].$$

$$\frac{d}{d\beta}G^*(t, \beta)=\frac{d}{d\beta}\left[\frac{G(t, \beta)-G(t, 0)}{R(t, 0)}\right]\leq\frac{1}{R(t, 0)}N\sum_{\kappa=1}^{N}P(t, \kappa)+\frac{G(t, \beta)-G(t, 0)}{R(t, 0)} \tag{23}$$

これが 0 に収束することを示す．そのためには，$k\neq 0$ にたいし

$$\frac{P(t, \kappa)}{R(t, 0)}\to 0 \tag{24}$$

$$\frac{G(t, \beta)-G(t, 0)}{R(t, 0)}\to 0 \quad (\beta<1) \tag{25}$$

を示せばよい．

正規化された $\frac{1}{R(t, 0)}Z_t^*$ が指数分布に収束することを用いる．(16)により $\frac{bty}{2}$ を越えない最大の整数を $J=J(t)$ とかくと

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{J}\frac{P(t, \kappa)}{R(t, 0)}=1-e^{-y} \tag{26}$$

があるから，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{P(t, n)}{R(t, 0)}=0 \quad (n=1, 2, \cdots\cdot)$$

これで (24) が示された．つぎに (25) を示す．そのために $0<\beta<1$ にたいして，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{R(t,\beta)}{R(t,0)}=1 \text{ を示す}$$

$\beta<G(s,0)$ なる s を固定すると，

$$R(t+s,0)\leq R(t,\beta)\leq R(t,0)$$

したがって $\lim_{t\to\infty}\frac{R(t+s,0)}{R(t,0)}=1$ を示せばよい．(5) により

$$1\geq\frac{R(t+s,0)}{R(t,0)}\geqq\left\{1-\frac{b}{2}R(t+s,0)+O(R(t)^2)\right\}^s\to 1.$$

これで (25) が証明された．

$\varphi_t^*(u)$ については，$\varphi^*_{t+1}(u)=G^*(t,g(e^{iu}))$ を用いて

$$\frac{d}{du}\varphi_{t+1}^*(u)=i\frac{d}{dg}\,G^*(t,g)\,g'(e^{iu})$$

から明らかである．（証明終）

（注意）上のことから，$n=1,2,\cdots\cdot$ を固定すると，つぎの関係が成立つ

$$\frac{1}{R(t,x)}\left|\frac{d^n}{dx^n}R(t,x)\right|\to 0\quad(|x|<1)$$

(viii) 任意に小さい $\varepsilon,\zeta>0$ を固定すると，定数 $A=A(n)$ と $B(t)\downarrow 0\ (t\to\infty)$ があって，$|y|\to\infty$ のとき

$$|y|^n\left|\int_\varepsilon^{2\pi/h-\zeta}\varphi_t^*(u)\,\exp(-iyu)\,du\right|\leq AB(t).$$

（証明） $\alpha=\frac{1}{h}-\frac{\varepsilon+\zeta}{2\pi},\quad x=\frac{u-\varepsilon}{\alpha}$ とかく．

$$I=\int_\varepsilon^{2\pi/h-\zeta}\varphi_t^*(u)\exp(-iyu)\,du=\int_0^{2\pi}\varphi_t^*(\alpha x+\zeta)\exp(-iy(\alpha x+\varepsilon))\,\alpha dx.$$

αy に近い整数を k, $y\alpha=\kappa+\delta$ とする．関数 $f_t(x)=\varphi_t^*(\alpha x+\varepsilon)e^{-i\delta x}$ を考えると，

$$I=\int_0^{2\pi}f_t(x)\,e^{-i\kappa x}dx\equiv a_\kappa$$

これは $f_t(x)$ のフーリエ係数で，(viii) により，$\left|\frac{d^n}{dx^n}f_t(x)\right|$ が $0\leq x\leq 2\pi$ で有界である．

さらに，$t\to\infty$ で一様に 0 収束する．したがって $|a_\kappa|\leq B(t)\,y^{-\kappa}$ である（証明終）

我々は $n=1,\ 2$ の場合を使う．

§ 3

以上の準備により $P^*(t,\kappa)$ のひとつの漸近形を導びく．

〔定理〕 $g'(1)=1,\ g''(1)=b,\ g'''(1)<\infty$ のとき，$0<C_1\leq nt^{-1}\leq C_2<\infty$ なる n にたいし，$t\to\infty$ で

$$P^*(t,\ nh)=\frac{2h}{bt}\exp\left(-\frac{2nh}{bt}\right)+O\left(t^{-4/3}\right)\tag{27}$$

$$P^*(t,nh+i)=0\quad(i=1,2,\cdots\cdot h-1)\tag{28}$$

（証明）格子分布 $\{p_\kappa\}$ のスパン h で，$p_0\neq 0$ であるから，$p_\kappa\neq 0$ なる κ は h の倍数であるから (28) は明らかである．

分布 $\{P^*(t,\kappa)\}$ の特性関数は，$\varphi_t^*(u)=\sum_{k=1}^{\infty}P^*(t,nh)\,e^{inhu}$ で，$P^*(t,n)$ はこのフーリエ

係数である．

$$P^*(t, nh)=\frac{h}{2\pi}\int_{\pi h^{-1}}^{\pi h^{-1}}\varphi_t^*(u)\,e^{-inhu}du.$$

$x=\dfrac{b}{2}tu,\ \ H=\dfrac{\pi b}{2h}$ とかくと，

$$I=\frac{2\pi}{h}\cdot\frac{bt}{2}P^*\ (t,\ nh)=\int_{-Ht}^{Ht}\varphi_t^*\left(\frac{2x}{bt}\right)\exp\ (-inx\,2h/bt)\ dx.$$

上の積分の近似として，つぎの J を考える．

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-i\frac{2\,nh}{bt}x\right)\frac{1}{1-ix}dx=2\pi e^{-2nh/bt}.$$

$$(I-J)=2\pi\left\{\frac{bt}{2h}P^*(t,\ nh)-\exp\left(-\frac{2\,nh}{bt}\right)\right\}$$

この差 $(I-J)$ を評価する．

$L(t)\to\infty, t^{-1}L(t)\to 0$ なる L と，十分小さい定数 $\varepsilon>0$ をとる．

$$I_1=\int_{-L(t)}^{L(t)}\exp\left(-i\frac{2\,nh}{bt}x\right)\left[\varphi_t^*\left(\frac{2x}{bt}\right)-\frac{1}{1-ix}\right]dx,$$

$$I_2=\int_{L\leq|x|<\varepsilon t}\exp\left(-i\frac{2\,nh}{bt}x\right)\varphi_t^*\left(\frac{2x}{bt}\right)dx,$$

$$I_3=\int_{\varepsilon t\leq|x|<Ht}\exp\left(-i\frac{2\,nh}{bt}x\right)\varphi_t^*\left(\frac{2x}{bt}\right)dx,$$

$$I_4=\int_{|x|>L(t)}\exp\left(-i\frac{2\,nh}{bt}x\right)\frac{1}{1-ix}dx,$$

とする．$(I-J)=I_1+I_2+I_3-I_4$ である。

$$|I_1|\leq\int_{-L(t)}^{L(t)}\left|\varphi_t^*\left(\frac{2x}{bt}\right)-\frac{1}{1-ix}\right|dx$$

ここで，$\left|\dfrac{x}{t}\right|\leq\dfrac{L(t)}{t}\to 0$ から，(18) により

$$|I_1|\leq O\left(\frac{L(t)\log t+L^2(t)}{t}\right). \tag{29 a}$$

$\left|\dfrac{x}{t}\right|<\delta$ でつぎの展開ができる

$$\log\varphi_t^*\left(\frac{2x}{bt}\right)=i\frac{2x}{bt}M_t^*+\frac{1}{2}\left(i\frac{2x}{bt}\right)^2\cdot D_t^*+O\left(\frac{x^2}{t^2}\right).$$

ここで，$D_t^*=\left(\dfrac{bt}{2}\right)^2+O\ (t\log t)$ であるから，$D_t^*/t>a>0$ である．したがって，十分大きい t にたいし，$\left|\varphi_t^*\left(\dfrac{2x}{bt}\right)\right|<Ae^{-\alpha x^2}$ とかける。

$$\left|I_2\right|\leq\int_{L(t)}^{\varepsilon t}Ae^{-\alpha x^2}dx\leq A_1e^{-\alpha L^2(t)} \tag{29 b}$$

つぎに，I_3 を評価する．

$$I_3=\int_{\varepsilon h^{-1}\le|u|\le\pi h^{-1}}\exp(-i\,nhu)\varphi^*_t(u)\frac{bt}{2}\,du.$$

(viii) により, $|I_3|\le\dfrac{A}{t}$ (29 c)

$\displaystyle\int_{L(t)}^{\infty}\exp\left(-i\frac{2\,nh}{bt}\right)\frac{1}{1-ix}\,dx$ を部分積分して,

$$(I_4)\le2\,\frac{bt}{2n\,L(t)}=O\left(\frac{1}{L(t)}\right) \tag{29 d}$$

ここでとくに $L(t)=t^{1/3}$ と取ると, (29 a, b, c, d) によって

$$|I-J|\leqq|I_1|+|I_2|+|I_3|+|I_4|=O(t^{-1/3}),$$

したがって

$$\left|P^*(t,\ nh)-\frac{2h}{bt}\exp\left(-\frac{2nh}{bt}\right)\right|=|I-J|\frac{2h}{2\pi\,bt}=O(t^{-4/3})$$

を得る (証明終).

以上で, n が, Z_t^* の平均と同じ程度の大きさのとき, 箇々の条件確率 $P^*(t,\ n)$ にたいする漸近形を求めた. 世代で $Z_t^*=n$ である事象は, Z_{t-1}^* の分布全体に依存する. つまり, $Z_t^*=n$ の確率 $P^*(t,n)$ という局所的な問題は, Z_{t-1}^* の全体的分布を知ればきまってくる. 特性関数のフーリエ係数として $P^*(t,\ n)$ を求めることは, この全体的分布から箇々の値 $P^*(t,\ n)$ を求めることに相当する. Z_t^* の平均の近くの箇々の値にたいする確率は, この分布の大局的ふるまいすなわち特性関数から導びかれるのは, ごく自然である. これにたいし, 予め固定した有限の n にたいし, $Z_t^*=n$ となる事は, Z_{t-1}^* の大局的分布からうける影響がもっと小さくなり, このような方法は適当でないと考えられる.

統計数理研究所

文 献

〔1〕 T. E. Harris, The Theory of Branching Processes, Springer, 1963.
〔2〕 B. V. Gnedenko, A. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables, Adison-Wesley, 1954.