Galton-Watson 過程の消滅までの世代数分布のモーメントと分布例

志村利雄・高橋宏一*

（1967年11月受付）

On the Moments and the Examples of the Distribution of the Time to Extinction in the Galton-Waston Process

Toshio SHIMURA and Koiti TAKAHASI

We study the moments of the time to extinction for the Galton-Waston process with mean $\leqq 1$.

In §1, we show that (i) the mean of the time to extinction does not exist when the mean equals to 1 and the variance is finite; (ii) all the moments of the time to extinction exist when the mean is <1. The content of the proof of (ii) can be applied to the estimation of the error in the numerical calculation of the moments. In table 1 the numbers of iteration required for obtaining given precision are shown. In Fig. 1 the mean time to extinction is shown in the case where the distribution of Z_1 is Poisson. In §3 some examples with explicit form of the distribution of the time to extinction are shown.

The Institute of Statistical Mathematics

§0. 序

Galton-Watson 過程は，状態空間が非負整数値のマルコフ連鎖 Z_n, $n\geqq 0$ で，推移確率が

$$P_{ij}=P\{Z_{n+1}=j\,|\,Z_n=i\}=\sum_{k_\nu\geqq 0,\,k_1+\cdots+k_i=j} p_{k_1}p_{k_2}\cdots p_{k_i},$$

で定義される．つまり，各個体の子供の数の分布が $\{p_i\}$ であたえられ，各個体はそれぞれ独立に行動するような系の第 n 世代の個体数 Z_n が Galton-Waltson 過程である．今後 $Z_0\equiv 1$ と仮定する．Galton-Watson 過程では，$\{p_i\}$ の確率生成関数とその反復関数 (iteration) は

$$f_1(s)=f(s)=\sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i, \quad f_0(s)=s, \quad f_{n+1}(s)=f[f_n(s)] \quad (|s|\leqq 1)$$

になり，推移確率とその反復関数は

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}s^j=[f(s)]^i, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}{}^{(n)}s^j=[f_n(s)] \quad (|s|\leqq 1)$$

となる．

$q=P\{Z_n\rightarrow 0\}=\lim_{n\to\infty} f_n(0)$ を Galton-Walton 過程 Z_n の消滅確率とよぶ．Z_1 の平均値

---

* 本稿は統計数理研究所の分枝過程研究会で提案された問題の1つで，主として §0, §1 を志村が §2, §3 を高橋が研究し，両者で討議してまとめたものである．

$m=E\{Z_1\}\leqq 1$ のとき $q=1$, $m>1$ のとき q は方程式

$$s=f(s)$$

の唯一の根 $0\leqq q<1$ になっていることはよく知られている.（[1] p. 7）

Galton-Waston 過程において

$$N=\min\{n;\, Z_n=0\}$$

によって定義した N を消滅までの世代数あるいは消滅時間とよぶ（[1], p. 32). 消滅時間の分布は確率生成関数の反復関数を用いれば

$$P\{N=n\}=f_n(0)-f_{n-1}(0)$$

になる. したがって, $P\{N<\infty\}=q$ になるから, $q<1$ ならば N は広義確率変数になってしまう. ここでは $q=1$, すなわち, $m\leqq 1$ のときの N のモーメントについて考察する.

消滅時間 N の分布については Harris [3], Bishir [4] 等でも取扱われている. われわれはまず Kesten-Ney-Spitzer [2] の結果を利用して $m=1$, $\sigma^2=f''(1)<\infty$ の場合の N のモーメントが存在しないことを導き, つぎに $m<1$ の場合には σ^2 に如何なる仮定もしないで N のすべてのモーメントが存在することを示し, 特別な $\{p_i\}$ について消滅時間 N の分布例をあげて, 数値例も示すことにする.

§1. 消滅時間のモーメント

（i） $m=1$, $\sigma^2<\infty$ の場合；

消滅時間 N の平均値は

$$(1)\qquad E\{N\}=\sum_{k=1}^{\infty}k[f_k(0)-f_{k-1}(0)]=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k[f_k(0)-f_{k-1}(0)]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{n[f_n(0)-1]+\sum_{k=0}^{n-1}[1-f_k(0)]\right\}$$

になる. $0\leqq s<1$ のとき

$$G(1,k)=\sum_{n=0}^{\infty}P^{(n)}(1,k)$$

$$G(s)=\sum_{k=1}^{\infty}G(1,k)s^k$$

とおけば, ([2] p. 583)

$$G[f_n(0)]=\sum_{k=0}^{n-1}[1-f_k(0)]$$

になって,

$$G[f_n(0)]\sim\frac{2}{\sigma^2}\log n\quad(n\to\infty)$$

を得るから,

$$E\{N\}=\lim_{n\to\infty}\{n[f_n(0)-1]+G[f_n(0)]\}=\infty$$

になることがわかる. よって N の平均値は存在しない.

（ii） $m<1$

分散 $\sigma^2<\infty$ ならば, Harris [1] (p. 18) により, $c_1>0$ が存在して, $(1-f_n(0))/m^n\to c_1$ $(n\to\infty)$. これを用いれば $\nu=1,2,\cdots$ のとき

$$E\{N^\nu\}=\sum_{n=0}^{\infty}n^\nu[f_n(0)-f_{n-1}(0)]=\sum_{n=0}^{\infty}n^\nu\cdot m^n\left[\frac{1-f_{n-1}(0)}{m^n}-\frac{1-f_n(0)}{m^n}\right]$$
$$\leqq 2M\sum_{n=0}^{\infty}n^\nu\cdot m^n<\infty\quad(M=\text{定数})$$

から N のすべてのモーメントの存在がわかる．この証明では σ^2 の存在を仮定したが，それを仮定しないでも

定　理 1 $m<1$ ならば，N のモーメントはすべて存在する．すなわち $E\{N^\nu\}<\infty$ $(\nu=1, 2, \cdots)$.

証　明

$b_n=\boldsymbol{P}\{N=n\}$ とおけば，$\sum_{n=0}^{\infty} b_n=1$

$$d_n=1-\sum_{k=1}^{n} b_k=\boldsymbol{P}\{Z_n>0\}=1-f_n(0)$$

$$\phi(s)=1-f(1-s) \qquad (0\leqq s\leqq 1)$$

とおけば

$$d_{n+1}=\phi(d_n)$$

になる．([3] p. 484, (6.1)) $\nu=1,2,\cdots$ として

$$E\{N^\nu\}=\sum_{k=0}^{\infty} k^\nu b_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} k^\nu b_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{(k^\nu-(k-1)^\nu)\cdot\sum_{j=k}^{n} b_j\right\}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{(k^\nu-(k-1)^\nu)\cdot\sum_{j=k}^{n} b_j\right\}\leqq\sum_{k=1}^{n}\left\{(k^\nu-(k-1)^\nu)\cdot\sum_{j=k}^{\infty} b_j\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(k^\nu-(k-1)^\nu)\cdot\left(1-\sum_{j=1}^{k-1} b_j\right)\leqq\sum_{k=1}^{\infty}(k^\nu-(k-1)^\nu)\cdot d_{k-1}$$
$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}((k+1)^\nu-k^\nu)\cdot\phi(d_{k-1})=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\nu-1}\binom{\nu}{l}k^l\right)\cdot\phi(d_{k-1}).$$

ところで $\phi(s)\leqq ms$ $(0\leqq s\leqq 1)$ である．なぜなら $ms-\phi(s)=g(s)$ とおけば，$g(0)=0$, $g'(s)=m-\phi'(s)$, $g'(0)=0$. $g''(s)=-\phi''(s)\geqq 0$ $(0<s\leqq 1)$. よって $g'(s)\geqq 0$ $(0\leqq s\leqq 1)$. ゆえに $ms\geqq\phi(s)$ $(0\leqq s\leqq 1)$. また，ms, $\phi(s)$ は $0\leqq s\leqq 1$ のとき s について単調非減少で $d_j\leqq m^j$ が成立つ．なぜなら $d_0=m^0=1$, $d_1=\phi(1)=1-\phi(0)=1-p_0=p_1+p_2+\cdots\leqq p_1+2p_2+3p_3+\cdots=m^1$. ここで $d_j\leqq m^j$ であると仮定すれば $d_{j+1}=\phi(d_j)\leqq\phi(m^j)\leqq m\cdot m^j=m^{j+1}$ となるから帰納法によって $d_j\leqq m^j$ $(j=1,2,\cdots)$ が成立つことがわかる．かくして，

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^\nu\phi(d_{k-1})\leqq\sum_{k=1}^{\infty} k^\nu m^{k-1}<\infty$$

が証明される．

§2. モーメントの計算

$m<1$ のとき N の平均値を計算しよう，

$$E\{N\}=\sum_{k=0}^{\infty} kb_k=1+\phi(d_0)+\phi(d_1)+\phi(d_2)+\cdots$$

であるから，$n=1,2,\cdots$ のとき

$$1+\phi(d_0)+\cdots+\phi(d_n)\leqq E\{N\}\leqq 1+\phi(d_0)+\cdots+\phi(d_n)(1+m+m^2+\cdots)$$
$$=1+\phi(d_0)+\phi(d_1)+\cdots+\phi(d_n)+\phi(d_n)\frac{m}{1-m}.$$

よって，

$$0\leqq E\{N\}-(1+\phi(d_0)+\cdots+\phi(d_n))\leqq\phi(d_n)\frac{m}{1-m}$$

$$\frac{\phi(d_n)}{E\{N\}}\frac{m}{1-m}\leqq\frac{m^{n+1}}{\frac{1}{p_0}}\cdot\frac{m}{1-m}=\frac{m^{n+2}p_0}{1-m}$$

上の不等式の左辺は相対精度であるからこれを ε 以下にするには

$$\frac{m^{n+2}p_0}{1-m} \leqq \varepsilon$$

となるように n をとれば十分である，すなわち

$$m^{n+2} \leqq \frac{(1-m)\varepsilon}{p_0}, \qquad (n+2)\log m \leqq \log\left(\frac{(1-m)\varepsilon}{p_0}\right)$$

$$n+2 \geqq \frac{\log\left(\frac{(1-m)\varepsilon}{p_0}\right)}{\log m}, \qquad n \geqq \frac{\log\left(\frac{(1-m)\varepsilon}{p_0}\right)}{\log m} - 2$$

$\{p_i\}$ が例えば，Poisson 分布ならば，

$m=\lambda$, $p_0=e^{-\lambda}$ であるから

$$n \geqq \frac{\log\left(\frac{(1-m)\varepsilon}{p_0}\right)}{\log m} - 2 = \frac{\log(1-\lambda)+\log\varepsilon+\lambda}{\log\lambda} - 2 .$$

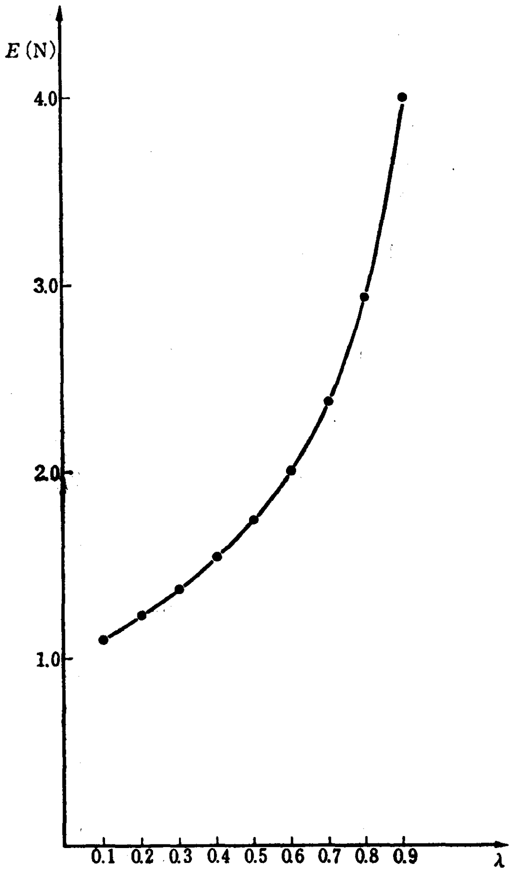
したがって $E(N)$ を相対誤差 ε 以下で評価するためには，$[\log((1-m)\varepsilon/p_0)/\log m]=k$ として，$1+\phi(d_0)+\cdots+\phi(d_k)$ まで計算すれば十分である．(但し $[\varepsilon]$ はガウスの記号)．これらの値の数値例を第1表に示す．

第1表 $\left[\log\left(\frac{(1-m)\varepsilon}{p_0}\right)\Big/\log m\right]$ 及び $[(\log(1-\lambda)\varepsilon+\lambda)/\log\lambda]$，$\varepsilon=0.01$

$m[\lambda]$ \ p_0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	ポアッソン
0.10									1	2
0.15									1	2
0.20								1	1	2
0.25								1	1	3
0.30							1	2	2	3
0.35							2	2	2	4
0.40						2	2	2	2	5
0.45						2	3	3	3	5
0.50					3	3	3	4	4	6
0.55					4	4	4	4	5	8
0.60				4	4	5	5	5	6	9
0.65				5	6	6	6	7	7	11
0.70			6	7	7	8	8	9	9	14
0.75			8	9	10	11	11	12	12	18
0.80		10	12	13	14	15	15	16	17	24
0.85		15	18	20	21	22	23	24	25	34
0.90	21	28	32	35	37	38	40	41	42	57
0.95	58	71	79	85	89	93	96	98	101	129

注意： $m \geqq 1-p_0$ なる関係がある．

今求めた繰り返し回数を考慮してまず分裂個数分布がポアッソン分布のとき $E(N)$ を求めてみると第1図のようになる．繰り返し回数は各 λ 共通に 80 回とっているので実際には相対誤差は 0.001 以下になっている．



注意・の間はフリーハンドで結んでいる

第1図 $E(N)$，(分裂個数分布ポアッソン)

§3. 消滅までの世代数分布例

分裂個数分布が特別な場合には消滅までの世代数分布が簡単な形で与えられる．

例 (i) $f(s)=p_0+p_1s$, $p_0+p_1=1$ のときは $\phi(s)=p_1s$ であるから直ちに

$$d_n=p_1^n, \quad b_n=p_0p_1^{n-1}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

を得る．即ち N の分布は幾何級数分布である．

例 (ii) $f(s)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}s+\frac{1}{2^2}s^2+\cdots=\frac{1}{2-s}$ のとき，即ち分裂個数分布が平均1の幾何級数分布のときは，

$$\phi(s)=\frac{s}{1+s}$$

より

$$d_n=\frac{1}{n+1}, \quad b_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}, \quad (n=1,2,\cdots)$$

を得る．

例 (iii) $f(s)=q+qps+qp^2s^2+\cdots$, $q+p=1$, $p/q=m<1$ のとき，即ち分裂個数分布が平均が1より小さい幾何級数分布のときは，

$$\phi(s)=\frac{ms}{1+ms}$$

より，

$$d_n = m^n \frac{1-m}{1-m^{n+1}}, \qquad b_n = m^{n-1}\frac{(1-m)^2}{(1-m^{n+1})(1-m^n)}, \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

を得る．これは数学的帰納法で容易に験証される．

例 (iv) 分裂個数分布が平均 λ のポアッソン分布のときは，実際に函数の反復により数値的に求めた．その結果を第2表に示す．

第2表 分裂個数分布がポアッソンのときの N の分布

b_n \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066
2	0.0857	0.1457	0.1844	0.2061	0.2149	0.2140	0.2064	0.1944	0.1796
3	0.0085	0.0285	0.0526	0.0753	0.0932	0.1045	0.1093	0.1083	0.1029
4	0.0009	0.0057	0.0156	0.0291	0.0436	0.0561	0.0646	0.0680	0.0668
5	0.0001	0.0011	0.0046	0.0115	0.0211	0.0316	0.0405	0.0459	0.0469
6	0.0000	0.0002	0.0014	0.0046	0.0104	0.0183	0.0264	0.0324	0.0265
7		0.0000	0.0004	0.0018	0.0052	0.0107	0.0176	0.0236	0.0208
8			0.0001	0.0007	0.0026	0.0064	0.0119	0.0175	0.0167
9			0.0000	0.0003	0.0013	0.0038	0.0082	0.0133	0.0137
10				0.0001	0.0006	0.0023	0.0056	0.0102	0.0113
11				0.0000	0.0003	0.0014	0.0039	0.0079	0.0095
12					0.0002	0.0008	0.0027	0.0061	0.0080
13					0.0001	0.0005	0.0019	0.0048	0.0069
14					0.0000	0.0003	0.0013	0.0038	0.0059
15						0.0002	0.0009	0.0030	0.0051
16						0.0001	0.0006	0.0024	0.0044
17						0.0001	0.0004	0.0019	0.0038
18						0.0000	0.0003	0.0015	0.0034
19							0.0002	0.0012	0.0029
20							0.0002	0.0009	0.0026
$\sum_{n=21}^{\infty} b_n$	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0000	0.0001	0.0005	0.0036	0.0557

注意： 小数第5位で四捨五入

本稿は統計数理研究所の分枝過程研究会で提案された問題のうちの1つで，特に同会の崎野滋樹，今井晴男の両氏に種々討論していただいた．記して謝意を表す．

統計数理研究所

参考文献

[1] T. E. Harris, The Theory of Branching Processes. Springer-Verlag, Berlin, 1963.

[2] H. Kesten, P. Ney and F. Spitzer, "The Galton-Watson Process with mean one and finite variance." Теория вероят. и ее пирмен., XI, 4 (1966), 580～611.

[3] T. E. Harris, "Branching processes." AM,S 19 (1948), 476～494.

[4] J. Bishir, "Maximum population size in a branching process." Biometrics, 18 (1962), 394～403.