

角度測定法に関する研究

大友 栄 松

(1966年4月受付)

A Study on Angle-Count Method

Eishoh OHOTOMO

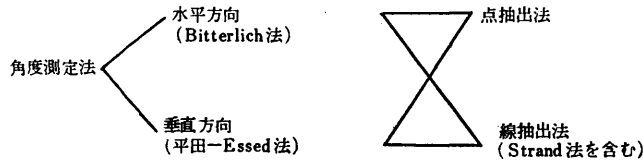
In this paper, the writer develops the general theory applicable to all angle-count methods. In that theory, he explains the unbiased estimating method of sums (per ha) of stand-volume, basal -area etc., and the formula of population variance, and investigates three estimators of mean diameter and mean height. Moreover, based upon that theory, he presents two other line sampling methods and shows how to calculate sample estimates of various stand-factors and their variances. He also presents two methods for correcting bias due to edge effect and them finds that a larger basal-area factor produces a larger variance and, under the condition of other items fixed, a higher sociability gives a larger variance, and a larger stand-area gives a larger rel-variance. According to his theory, circular or rectangular sample-plot sampling may be considered to be a special case of point or line sampling where the domain corresponding to each tree has a definite shape and an equal area. Lastly, he shows his own examples and cites other examples here and there, examinig which is more advantageous, plot-sampling or plotless sampling. He considers, in conclusion, that this is to be determined as the case may be, depending upon the object of survey, forest-type, stand-condition, forest area, cost, available labour and so on.

Government Forest Experiment Station

1. は じ め に

1947年と1948年にオーストリアの Bitterlich は、画期的な独創的な森林調査法を発表した。その方法は始め数年は、オーストリア以外の国には余り知られなかったが、1950年頃より次第にオーストリア以外の国の林業研究者の注目を浴びてきた。日本では、アメリカの南部林業試験場の Grosenbaugh が *Journal of Forestry* の1952年1月号にこの方法を紹介し、批判した論文「Plotless timber estimates, new, fast, easy」を同年、雑誌「林業経済」に九州大学の木梨が、紹介したのが始めてである。Grosenbaugh の紹介はこの方法を全世界に普及する契機となり、それ以後、急速にこの方法の研究やそのための器械が続々と発表され、今日では全く実用化された。しかしこの方法の理論的研究は、実験的研究が極めて多いのにも拘らず、非常に少なく、特に標本調査理論の面からの研究は、僅かに Grosenbaugh, Palley and Horwitz らの研究があるにすぎない。

Bitterlich の方法は平田や Essed の方法や, Strand の線抽出法を生みだした. これらの方法は Grosenbaugh の述べた通り, 標本調査理論では全く共通的なものであるが, 彼はその正確な証明を示さなかった. 筆者は, これらの諸方法に共通する一般的な証明と母分散の式を与え, これらから, 上記の諸方法の実地面における諸問題の解決をはかった. これらの方法の組合せは次のようになる.



2. 基礎理論

林地面積 $A \text{ m}^2$, 成立本数 N 本の森林の調査をすることとしよう. この林の木に番号をつけたと考え, i 番目の木の特性値を x_i とする. x は, 木の特性なら何でもよい. 例えば, 胸高直径, 樹高, 胸高断面積, 材積など何でもよいが, 本数を知りたいときは $x_i=1$ とおけばよい. 従って x は上記の特性値を要素とするベクトルと考えた方がよい. ここで, 次のことを仮定する. その面積, 形状は何でもよいが, 各木に対し, ある領域を対応させる. ただし, この領域の境界は, 現地でははっきり定められるものでなければならない. つまり現地で, 観測点に立ったとき, その点がある木の領域の内にあるのか, 外にあるのか, わかるようになっていなければならない. この目的のため考案された器械としては点抽出法, 線抽出法におけるレラスコープ, コノメーターなど各種の器械がある. そして, 点抽出法の場合は領域の形は円形, 線抽出法の場合は長方形となる. 次に, 領域は林の境界外にとびださないものとする. このときは林縁木の領域の形は複雑となる.

領域の面積を a_i とし, N 個の領域はある個所では重なり, あるいは離れたり, あるいは, 1 領域が全く他の領域に含まれたりするであろう. ここで全林がこれらの領域の境界で, $M+1$ 個の部分に分れたとし, その面積を $p_\alpha (\alpha=0, 1, \dots, M)$ とする. ただし, p_0 はどの木の領域にも含まれない林地の部分とする. この林地に, 1 ヶの点, またはランダムに方向の定められた 1 ヶの線を定め, そこで, 線抽出法や点抽出法による調査を行なったとし, カウント木の x_i/a_i を求め, 統計量としてその和 $y_k = \sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{x_i}{a_i}$ (i -木が点 k , または線 k でカウントされるときは $\delta_{ki}=1$, そうでないときは 0 をとるものとする). この期待値は

$$E(y_k) = \frac{p_0}{A} \times 0 + \frac{1}{A} \sum_{\alpha=1}^M p_\alpha \sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} x_i}{a_i} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\text{あるいは} \quad E(y_k) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{a_i} E(\delta_{ki}) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

ha あたりの各特性値の総計を求めるにはこれを 10,000 倍すればよいことがわかる. これから, $10,000/a_i$ を各観測した特性値に乘じ, その合計を標本の大きさの数でわれば, ha あたりの各特性の総数の不偏推定値が求まることがわかる. y_k の分散の期待値は次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_k) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{x_i}{a_i}\right) = \frac{p_0}{A} \left(0 - \frac{\sum_i x_i}{A}\right)^2 + \frac{1}{A} \sum_{\alpha=1}^M p_\alpha \left(y_\alpha - \frac{\sum_i x_i}{A}\right)^2 \\ &= \frac{1}{A} \left[\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} + 2 \sum_{i < j} \frac{a_{ij} x_i x_j}{a_i a_j} - \frac{\left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}{A} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

又は,

$$E(y_k^2) = E\left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{k_i} x_i}{a_i}\right)^2 = E\left\{\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{k_i}^2 x_i^2}{a_i^2} + 2 \sum_{i < j}^N \frac{\delta_{k_i} \delta_{k_j} x_i x_j}{a_i a_j}\right\}$$

$$= \frac{1}{A} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i} + 2 \sum_{i < j}^N \frac{a_i x_i x_j}{a_i a_j} \right\}$$

から $Var(y_k) = E(y_k^2) - (E(y_k))^2$ より (2) 式を得る.

a_{ij} は i -木 と j -木 の共通な領域の面積で線抽出法では共通長方形の面積で点抽出法では 2 円の共通部分の面積となる. 前者の場合の面積の計算は簡単だが, 後者の場合は計算が厄介だから, 次にその計算式を示しておく.

$$a_{ij} = r_i^2 \cos^{-1} \frac{d^2 + r_i^2 - r_j^2}{2dr_i} + r_j^2 \cos^{-1} \frac{d^2 - r_i^2 + r_j^2}{2dr_j}$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{4(d^2 r_i^2 + d^2 r_j^2 + r_i^2 r_j^2) - (d^2 + r_i^2 + r_j^2)^2}$$

$$= r_i^2 \cos^{-1} \frac{d^2 + r_i^2 - r_j^2}{2dr_i} + r_j^2 \cos^{-1} \frac{d^2 - r_i^2 + r_j^2}{2dr_j} - 2\sqrt{s(s-d)(s-r_i)(s-r_j)} \quad (3)$$

ただし, r_i, r_j は i -木, j -木の拡大円半径, d は i -木 と j -木の距離, $s = \frac{r_i + r_j + d}{2}$.

(2) 式で林地面積を一定とし, a_i で偏微分すればわかるように, a_i が大きいほど分散が小になる. また, 相対分散の式は

$$\frac{A}{\left(\sum_i^N x_i\right)^2} \left\{ \sum_i^N \frac{x_i^2}{a_i} + 2 \sum_{i < j}^N \frac{a_i x_i x_j}{a_i a_j} \right\} - 1 \quad (4)$$

だから, 他の条件が同一の場合は, 林地面積が大きいほど, 精度が悪くなる (事例は後出).

上述の理論から, 点抽出法や線抽出法で, レラスコープやコノメーターを用いて調査した場合の ha あたりの特性値の総計の不偏推定値や, 分散の推定値の求め方が直ちに理解されよう. なお, ha 当り本数を推定したい場合, 各点や各線における $10,000/a_i$ の和を作り, それを平均すればよいが, a_i は直径や樹高の括約された値を用いて計算されるので, 括約の幅が大きいときや, 直径や樹高の値が小さいときは, 区間内で一様分布を仮定して求めた次の値の和を計算するとよい. 階級幅は直径は d cm, 樹高は l m とする.

Bitterlich 法で切捨てのとき $\frac{40,000}{\pi d(d+l)}$

〃 四捨五入のとき $\frac{40,000}{\pi \left(d^2 - \frac{l^2}{4}\right)}$

線抽出法でコノメーター使用樹高 1m 括約 $\left(\log_e \frac{h + \frac{1}{2}}{h - \frac{1}{2}} \right) \times 10,000$

〃 レラスコープ使用直径切捨て $\left(\log_e \frac{d+l}{d} \right) \times 10,000$

〃 〃 四捨五入 $\left(\log_e \frac{d + \frac{l}{2}}{d - \frac{l}{2}} \right) \times 10,000$

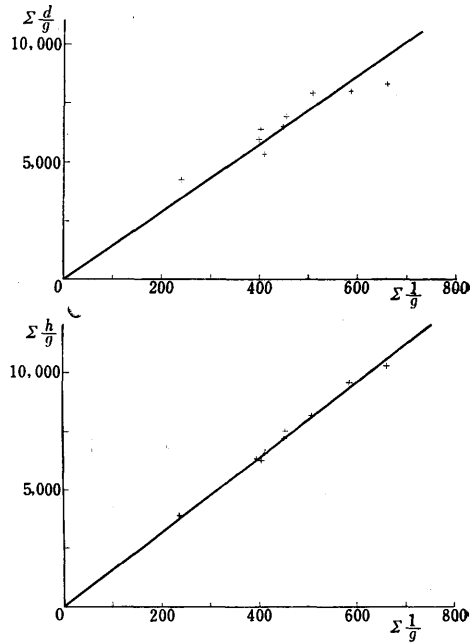
(直径 2 cm, 樹高 1 m 括約の表を計算してあるが紙数制限のため省略する).

直径や樹高については, 平均直径, 平均樹高を推定しなければならないが, これには次の 3 方法が考えられる. ha あたりの本数や総樹高, 総直径の推定が可能だから, まず普通の比推

定法と比率の推定法が考えられる。原点を通る回帰を考えれば、 y の分散が x に比例する場合は比推定法、 y の分散が x^2 に比例すれば比率の推定法がよく y の分散が x に対し、constantの場合は比を $\frac{\sum xy}{\sum x^2}$ の形で推定するのがよい。なお、われわれの場合は、 x, y は各点、各線ごとに計算される $\sum \frac{1}{a_i}, \sum \frac{x_i}{a_i}$ である。従って、上記の推定式を記せば次のようになる(分散の推定式はよく知られているから省略)。

$$\begin{aligned} \text{ア)} \quad \bar{x} &= \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{x_i}{a_i} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{1}{a_i} \right)_k} \\ \text{イ)} \quad \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{x_i}{a_i}}{\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{a_i}} \right)_k \\ \text{ウ)} \quad \bar{x} &= \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{a_i} \right)_k \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} x_i}{a_i} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{a_i} \right)_k^2} \end{aligned}$$

となる。 $\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{a_i}$ と $\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} x_i}{a_i}$ との関係を見るために1964年林業試験場高萩試験地のアカマツ35年生林分で9点をとり、Bitterlich法を行なって、平均樹高(\bar{h})、平均直径(\bar{d})を推定したが、上記を図示すると、第1図のようになり、 $\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} x_i}{a_i}$ の分散は $\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{a_i}$ に対し一定のように見える。しかし、その推定値は、次表に見る通り、推定値、分散の両者を共に見ると



第1図

	樹 高		直 径		信 頼 幅 (t分布仮定 95%水準)	
	\bar{h}	$\sigma_{\bar{h}}$	\bar{d}	$\sigma_{\bar{d}}$	$t\sigma_{\bar{h}}$	$t\sigma_{\bar{d}}$
真 値	m	m	cm	cm	m	cm
ア) 法	16.0	0.11	14.4	0.49	0.25	1.13
イ) "	16.0	0.10	15.2	0.50	0.22	1.16
ウ) "	16.0	0.11	14.2	0.47	0.24	1.06

きは優劣が定め難いが、偏りについては、ア)法では $1/n$ のオーダーだが、イ)法は固定バイアスがある点、ウ)法は計算が煩雑なことなどを考慮するときは、ア)法がよいように思われるが、この問題について、昨年調査した天城スギ58年生林分につき検討中である。

上述の基礎理論に基づき、従来の各種のプロットレスサンプリング及びそれに伴ういろいろの問題、新しい調査法などを次節以降に述べる。

3. 点 抽 出 法

点抽出法においては、Bitterlich法と平田法が考えられる。何れの方法でも前記の林分構成因子のすべてについて情報を得ようとすれば、カウント木の直径はその毎木につき調査し、樹高はその毎木につき調査するかまたはカウント木中より抽出調査しなければならない。

3.1 Bitterlich 法

この方法では $a_i = \frac{g_i}{\sin^2 \alpha/2}$ となる。ただし g_i は i -木の胸高断面積で単位は m^2 , α はレラスコープなどによりはられる角である。いわゆる断面積定数は $x_i = g_i$ としたときの

$$\frac{x_i}{a_i} = \frac{g_i \cdot \sin^2 \alpha/2}{g_i} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

に 10,000 をかけたものである。10,000 $\sin^2 \alpha/2 = c$ とすれば

G/ha の推定値 (\hat{G}): $\frac{c}{n} \times$ カウント木の総数

V/ha " (\hat{V}): $\frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} v_i}{g_i} \right)_k = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} f_i h_i \right)_k$

N/ha " (\hat{N}): $\frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{g_i} \right)_k$

\bar{h} " (\hat{h}): $\frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} h_i}{g_i} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{g_i} \right)_k}$

\bar{d} " (\hat{d}): $\frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} d_i}{g_i} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{g_i} \right)_k} = \frac{1.27 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{d_i} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{g_i} \right)_k}$

G, V, N は ha あたりの胸高断面積合計, 同材積, 同本数, \bar{h} は平均樹高, \bar{d} は平均直径, n は標本の大きさで以下この記号を用いる。 \bar{h}, \bar{d} の推定には断面積定数が必要でないことに注意されたい。

例 1. 高萩試験地アカマツ 35 年生林分 (1964) 9 点 (林縁効果の偏りは修正していない)

	真 値	推 定 値	推定値の標準 誤差の推定	信 頼 幅 (t -分布仮定 95%水準)	誤 差
N	1,902本	1,775	161	370.5	-6.7%
G	35.3m ²	32.4	1.82	4.2	-8.2%
V	286.4m ³	262.4	15.54	35.8	-8.3%
\bar{d}	14.9cm	14.4	0.49	1.13	-3.3%
\bar{h}	16.0m	16.0	0.11	0.25	0

例 2. 黒羽国有林, スギ, ヒノキ 48 年生林分 (1959) 面積 12.40 ha, (line-point 法により調査, 林縁効果の偏りは, 林内の a_i を計算し修正除去)

	本 数	断 面 積	点 数
真 値	1,217	39.1m ²	
sys-sys	1,184	39.7	78
ran-sys	1,095	36.5	84
ran-ran	1,144	38.0	84

3.2 平 田 法

平田は張る角 β が $68^\circ 15'$ のコノメーターを用い, 平均樹高を推定する方法を考案した。1点でのカウント数を z_k , その平均を \bar{z} とすると, \bar{h} は $100\sqrt{2\bar{z}/N} = \bar{h}_H$ により推定されると述べている。

この式の分散の推定値は、筆者の計算では、 $5,000 \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 / Nn(n-1)$ で近似される。平田の方法は、上記理論から $a_i = h_i^2 \pi \cot^2 \beta = h_i^2 \pi \cot^2(68^\circ 15') = h_i^2 / 2$ 故に $10,000/a_i = 20,000/h_i^2$ 、 $20,000$ を c とおけば、標本からの推定値は次のようになる。

$$\hat{N}: \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{h_i^2} \right)_k, \quad \hat{G}: \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} g_i}{h_i^2} \right)_k$$

$$\hat{V}: \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} v_i}{h_i^2} \right)_k = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} f_i g_i}{h_i} \right)_k$$

$$\hat{d}: \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} d_i}{h_i^2} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{h_i^2} \right)_k}, \quad \hat{h} = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_{ki}}{h_i} \right)_k}{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_{ki}}{h_i^2} \right)_k}$$

上記より平田の平均樹高

$$\bar{h}_H = \sqrt{\frac{20,000 \bar{x}}{N}} = \sqrt{\frac{20,000}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n z_k}{N}} = \sqrt{\frac{20,000}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} h_i^2}{h_i^2} \right)_k}{N}}$$

これは $(\bar{h}_H)^2 = \sum_{i=1}^N h_i^2 / N$ の推定値であることがわかる。すなわち平田樹高は、林木の樹高の自乗の平均の平方根であることがわかる。

一方、Bitterlich 法の場合はカウント木の樹高を平均すると断面積を重みとした平均樹高(いわゆる Lorey の樹高)だということがわかる。

4. 線抽出法

この方法は林内にランダムに設定された一定長 l m の直線上を歩きながら、各林木の直径や樹高について、線上の林木との最短距離の点から、一定角のコノメーター、レラスコープなどで、検視し、角度よりはみだす木をカウントする方法である。この方法では直線の両側の木につき検視する場合と片側の木のみ検視する場合の2方法がある。両側検視の場合は、使用する倍数(定数)を $1/2$ すればよいから、ここでは、片側検視の場合のみを述べる。この方法の最初の考案者はノルウェイの L. Strand であるので、まず彼の方法を述べ、ついで著者の考案した2方法を述べる。

4.1 Strand 法

Strand 法では線長 l は 5π m = 15.7 m である。断面積定数1でカウントされた i 番目の木は $a_i = 5\pi \times 0.5 d_{ri} (\text{m}^2)$ 、垂直角 $\beta = 63^\circ 30'$ のコノメーターでは、 $a_k = 5\pi \times 0.5 h_k (\text{m}^2)$ である。

基礎理論から、林分の ha あたり胸高断面積合計は $x_i = g_i = \frac{\pi d_{ri}^2}{4 \times 100^2}$ だから

$$\frac{x_i}{a_i} \times 10,000 = \frac{\frac{\pi d_{ri}^2}{4 \times 100^2} \times 10,000}{5\pi \times 0.5 d_{ri}} = \frac{d_{ri}}{10}$$

従って、 $G/ha \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} d_{ri}}{10} \right)_k$ となり、Strand の推定は不偏であることがわかる。

一方、 ha 当りの $g \times h$ の合計 $\sum_{i=1}^N g_i h_i / ha$ は次のようにして推定される。この場合はコノメーターでカウントされた木の直径を d_{ci} 、樹高を h_i とすると、 $a_i = 5\pi \times 0.5 h_i (\text{m}^2)$ $x_i = g_i h_i = \frac{\pi d_{ci}^2 h_i}{4 \times 100^2} (\text{m}^3)$

$$\frac{x_i}{a_i} \times 10,000 = \frac{\pi d_{ci}^2 h_i}{4 \times 10,000} \times 10,000 = \frac{d_{ci}^2}{10}$$

したがって

$$\sum_{i=1}^N g_i h_i / ha \leftarrow \frac{1}{10n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} d_{ci}^2 \right)_k$$

Strand は林木平均高は

$$\hat{h}_s = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} d_{ci}^2 \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \delta_{kj} d_{rj} \right)_k}$$

として計算しているが、分子の不偏推定値は $\sum_{j=1}^N g_j h_j / ha$ 、分母のそれは $\sum_{i=1}^N g_i / ha$ となるから、 \hat{h}_s は Lorey の平均樹高になることがわかる。 \hat{h}_s の分散の推定値は近似的に次のようになることは当然理解されよう。

$$v(\hat{h}_s) = \frac{n \cdot \left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} d_{ci}^2 \right)_k - 2\hat{h}_s \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} d_{ci}^2 \right)_k \left(\sum_{j=1}^N \delta_{kj} d_{rj} \right)_k + \hat{h}_s^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \delta_{kj} d_{rj} \right)_k^2 \right]}{(n-1) \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \delta_{kj} d_{rj} \right)_k \right\}^2}$$

Strand は更に形数 f を $\sum gh$ の推定値にかけて、 ha あたり材積の推定を行なっているが、単木材積を $v_i = f_i g_i h_i$ とするとき、 ha あたり材積は $\sum v_i = \sum f_i g_i h_i$ だから、 f_i がすべて等しくない限り $\sum v_i = \sum f_i g_i h_i = f \sum g_i h_i$ とはならない。しかし、大よその材積の見当をつけるには、彼の方法は有効であろう。

筆者は Strand の線抽出法から、次の 01 法、02 法を考えて、2、3 年前から実験して見たので、これらについて次に述べる。

4.2 01 法

線長として、両側検視のときは 10 m、片側検視のときは 20 m をとり、垂直角 $\beta = 63^\circ 30'$ のコノメーターを用いると、実行も計算も便利である。

$\beta = 63^\circ 30'$ のときは $\tan \beta = 1/2$ となるので、検視の際、一々器械を使用しないで、樹高の半分の距離を目測できめられるので、せいぜい 2~3 本の木に対して、器械を使用するだけで済み功程が高まる利点がある。カウント木については、求める林分構成要素によって、直径や樹高を測る。

もちろん、樹高はカウント木より抽出調査して、二重抽出法を利用してよい。

とくに材積を算出するとき fg が必要だがスギなどは fg はほとんど直径だけに関係するので、樹高測定を省略してもよからう。

線長を l 、垂直角を β とすると、 $a_i = l h_i \cot \beta$ となる。 $\frac{\tan \beta \times 10,000}{l} = c$ としてこの定数の値を次表に示す。

$\beta \backslash l$	10m	12.5m	13.4m	16.7m	20m
$63^\circ 30'$	2,000		1,500		1,000
$68^\circ 15'$	2,500	2,000		1,500	

各因子の推定値

$$\hat{G} = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} g_i}{h_i} \right)_k, \quad \hat{V} = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} v_i}{h_i} \right)_k = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} f_i g_i \right)_k$$

h_i 樹高階本数: $N_j = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \frac{m_{jk}}{h_j} = \frac{c}{n} \cdot \frac{m_j}{h_j}$ (ただし m_{jk} は k 線での h_j 階のカウント本数)

$$\hat{N} = \sum N_i, \hat{d} = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{d_i}{h_i} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \frac{1}{h_i} \right)_k}$$

$$\hat{h} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\sum_{i=1}^M \frac{m_i}{k_i}} = \frac{\text{カウント木の総本数}}{\text{カウント木の } \frac{1}{h} \text{ の総和}}$$

(スギ, ヒノキ, アカマツ, 広葉樹の fg 表は東京営林局, 前橋営林局管内の分については, 林業試験場で作成してある.)

4.3 02 法

この方法は前の方法のコノメーターの代わりにレラスコープなどの断面積測定器を用いるだけである。この場合, $a_i = \left\{ \frac{d_i \cdot l}{200} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \right\} \text{m}^2$ となる。 α と断面積定数 (BAF) との関係は次表のようになる。

BAF	1	2	4
$\sin \frac{\alpha}{2}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{70.7}$	$\frac{1}{50}$

$\frac{200 \cdot 10,000}{l \cdot \operatorname{cosec} \alpha/2} = c$ とすれば, c は次表のようになる。

$l_m \backslash$ BAF	1	2	4
10	2,000	$2,000\sqrt{2}$	4,000
15	$\frac{4,000}{3}$	$\frac{4,000\sqrt{2}}{3}$	$\frac{8,000}{3}$
$5\pi=15.7$	$\frac{4,000}{\pi}$	$\frac{4,000\sqrt{2}}{\pi}$	$\frac{8,000}{\pi}$

n 線を抽出し, カウント木について, d, h を測定するときは, 各因子の ha あたり推定値は次のようになる。

$$\hat{G} = \frac{c}{n} \cdot \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} d_i \right)_k, \hat{V} = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki} v_i}{d_i} \right)_k$$

$$d_j \text{ 直径階の本数: } \hat{N}_j = \frac{c}{n} \frac{1}{d_j} \sum_{k=1}^n m_{kj} = \frac{c}{n} \frac{m_j}{d_j}$$

$$\hat{N} = N_j \text{ の合計} = \frac{c}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{d_i} \right)_k$$

$$\hat{d} = \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \delta_{ki} \right)_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{d_i} \right)_k} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^N \frac{\delta_{ki}}{d_i} \right)_k}, \hat{h} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_{ki} h_i}{d_i} \right)_k}{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_{ki}}{d_i} \right)_k}$$

3節, 4節においては sampling error の計算について, 特別のものを除きふれなかったが, これは基礎理論から, 簡単に分散の推定法がわかるので省略した。

4.4 線抽出法の実例

01 法については、1964 年に発見して、1964 年、1965 年に林業講習所の実習の際に、天城の保護林（面積約 5.5 ha）において、生徒に研修させた 2 例、1964 年に行なった収穫表調査の数例、1965 年の天城 162 に小班の写真材積表調査の例などがあるが、紙数の関係上、高萩試験地で 1964 年行なった例をあげる。

林分はアカマツの約 35 年生の林分で、線長は 10 m で両側検視とした。面積が 0.25 ha なので当然林縁効果による偏りを修正しなければならないがわざと修正しない数値をあげる。

	真 値	推 定 値				標 準 偏 差			信 頼 区 間			誤 差		
		B	S	01	02	B	01	02	B	01	02	B	01	02
N	1,902本	1,775		1,832	1,753	482	459	309	371	570	384	-6.7	-3.7	-7.8
\bar{d}	14.9 cm	14.4		15.0	15.3	1.5	0.5	0.5	1.2	1.4	1.5	-3.3	+0.7	+2.7
\bar{h}	16.0 m	16.0	16.5	15.9	15.8	0.3	0.8	0.1	0.2	0.5	0.4	0	-0.6	-1.3
G	35.3 m ²	32.4	43.4	34.0	34.1	5.5	4.5	4.9	4.2	5.4	6.1	-8.2	-3.7	-3.7
V	286.4 m ³	262.4	311.9	276.4	273.2	46.6	37.4	40.2	35.8	40.2	46.4	-8.3	-3.5	-4.6

ここで B は Bitterlich 法、S は Strand 法の略。なお点は 9 点、線は 5 線、信頼区間の設定は一応 t -分布を仮定して、95 % の信頼係数を用いた。

5. 林縁効果による偏りの修正

4.4 の事例にもみられるように、 \bar{h}, \bar{d} のような平均値を除き、ha あたりの値はすべて過小推定になっている。この原因は林縁木の確率は小さいにもかかわらず、この点を考慮しないで計算したため、一方平均値の場合は分母、分子が同じ条件下にあるため、大よそ消しあい割合よい推定値を与えるのであろう。従って、小面積や境界が複雑な林地で、各木の対応する領域が林外にとび出していること多い林では林縁効果による偏りの修正が問題となってくる。この問題については増山氏が 1953 年修正を要しない抽出法を提案しているが、これは現地では実行不可能に近い。1958 年の U.S.A. の Grosenbaugh の提案や 1964 年の Barret の提案は不偏性の条件にかなうが、ともに実行がやや煩雑である（日本の国有林では林縁附近に点を落ちないようにして実行しているようだが、これは偏りを生ずる）。筆者は、これらの方法以外に Bitterlich 法につき次の 2 方法を考案して実験してみた。

ア) 法 標本点と木との距離が、木と最も近い境界との距離より近いときのみカウントする。この方法は木と最も近い境界との距離が l_i m の場合は、 $a_i = \pi l_i^2$ とする方法で、この a_i を用いて、 $x_i \cdot 10,000 / a_i$ を計算する方法である。

イ) 法 林縁木でカウントされた木の領域の面積を、ドットグリッドやプランメーターで求め、これを a_i とし、上のような計算を進めるものである。

両法とも、不編であることは基礎理論よりわかる。

例 1. 天城国有林 146 にへ小班（面積 1 ha、スギ約 60 年生林分）で、10 点をランダムに落して、Bitterlich 法による断面積推定を行なった。下表に見るように、真値に最も近いも

真値=59.3m ²	推 定 値	標 準 誤 差	信 頼 幅 (95%水準)	誤 差		備 考
				量	百 分 率	
ア) 法	61.4m ²	7.25m ²	16.4m ²	2.1m ²	3.5%	信頼幅に真値は入らない
イ) 法	54.1	4.02	9.1	-5.2	-8.8	
偏りを修正しない場合	49.4	4.13	9.3	-9.9	-16.7	

のはア)法で誤差は+3.5%にすぎない。イ)法は-8.8%だが、信頼幅は最もよい値を示している。林縁効果の修正を行わないときは、極端な過小推定となっている。(ただしBAF=4)

例 2. 1959年黒羽国有林スギ、ヒノキ林分48年生林分でBAF=4を用い、全面積12.40haに対し、78点を抽出してBitterlich法を行なった。この場合は、イ)法により偏りを修正した。その結果、左表のような推定値を得た。過去における実験の結果より考察すると、イ)法は内業での面積計算に労力を要するので、ア)法の方が実用上便利であろう。

	本数	断面積
真値	1,217本	39.1m ²
推定値	1,184	39.6

林縁効果の偏りは小林分ではかなり大きいので、1ha内外の林でBitterlich法を行なうことは、極めて不利で、このような場合は、全林毎木とか、他のプロットあるいは単木単位のサンプリングを行なう方が賢明であろう。

6. Bitterlich法における諸問題

Bitterlich法における諸問題は基礎理論によって、ほとんど解決されることは既にふれているが、実例により、その若干を次に示す。

6.1 BAFの変化に伴う推定値の分散の変化

既述のようにBAFが大きくなる程、母分散は大となる(ただし、他の因子は固定しておく)。オーストリアのPflugbeilは約90年生のストロブ松の18haの林分で、9点でBitterlich法、Spurrのangle-summation法、3アールの円形サンプリングを行ない、その際BAFの変化と標準偏差などの変化の関係を見ている。その結果は次の通りである。抽出変動を考慮すれば、ほとんど理論が実証されている。次に筆者は(2)式の母分散の計算式を利用して、天城

		BAF							0.03 ha 円形
		1	2	4	6.25	9	16	25	
平均	ビッターリッヒ法	42.6m ²	45.1	44.8	48.6	44.1	47.1	41.8	45.0m ²
	スパ一法	46.8m ²	48.2	49.1	49.7	50.2	50.3	48.1	
標準 誤差	ビッテルリッヒ法	2.2m ²	2.0	2.8	4.0	4.1	4.7	8.4	2.0m ²
	スパ一法	2.2m ²	2.8	3.9	4.8	5.5	7.5	10.0	
変動 係数	ビッテルリッヒ法	14.8%	14.4	18.2	24.7	33.1	28.9	59.8	13.5%
	スパ一法	14.0%	18.1	24.0	28.8	32.6	44.6	62.2	

国有林のスギ林の例によりしらべてみた。資料は4本の木であり、木の間隔その他は実際の値をとったが、面積だけは実際より広く、BAF=1のときの拡大円がすべて林地内に含まれるような地域2,940m²をとった。データは次の通りである。

木番号	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
直径 cm	46.2	49.4	45.2	36.1
樹高 m	24.0	22.0	20.0	20.0

	樹間距離 m		
	No. 1	No. 2	No. 3
No. 2	8.32		
No. 3	7.12	9.05	
No. 4	9.16	4.73	6.63

BAFの変化による母分散の変化は次のようになる。

<i>BAF</i>	1	4	16	32
分散	2.35	18.11	50.62	133.84

実面積に近い 400 m² を用い、林縁効果の偏りを修正すると次のようになる。

<i>BAF</i>	1	4	16	32	
分散	ア) 法	161.61	161.61	188.39	774.68
	イ) 法	0.00	27.09	188.39	774.68

Pflugbeil はさらに、両対数方眼紙の *x* 軸に *BAF* をとり、縦軸に変動係数をとると +0.5 の傾斜をなす直線となると述べ、このことは Boon も熱帯林の調査で同様なことを認めている。即ち $\log(cv) = a' + 0.5 \log(BAF)$ が成立し、また Prodan のような、 $(cv)_i^2 \cdot (BAF)_j = (cv)_j^2 \cdot (BAF)_i$ の関係があることを一応認めている。彼はさらに、直径階別本数、材積についても比較しているが、その結果によれば、*BAF*=1 と 0.03 ha 円形プロットとはよく類似しているが、2, 4, … と *BAF* が大になるにつれ、次第に差が大きくなり、小径木が少なく、大中径木が大きくなっている。

<i>BAF</i>	分散		
	もとの距離	1/3 だけ近づけた場合	2/3 だけ近づけた場合
1	2.35	2.67	2.91
4	18.11	20.34	23.82
16	50.62	72.17	92.56
32	133.84	159.27	264.69

<i>BAF</i>	面積		
	2,940m ²	400m ²	100m ²
1	0.5247	0.00002	0
4	4.0436	0.1120	0.0053
6	11.3047	0.7798	0.1231
32	29.8904	3.2025	0.3127

分散は大になる。(BAF については既述を参照されたい)。

6.2 群度に対する分散の変化

6.1 の実際の資料を用い、林地面積、本数、その他の条件が一定としたとき、木間の距離を 1/3, 2/3 だけ縮めたとき、すなわち群度が大になるにつれて分散がどのように変化するかをみると次表のように、群度が大になるにつれて分散が大になることがわかる。

6.3 林地面積の変化に対する相対分散の変化

樹間距離や林木の大きさなどの条件を一定にした場合、林地面積や *BAF* が変るとき、相対分散はどうなるかを前記資料に基き、次表に示すと、基礎理論で述べたように面積が大きくなるに従い、相対分散は大になる。(BAF については既述を参照されたい)。

6.4 Bitterlich 法で立木断面内に抽出点がおちた場合、無視するときの偏り

この問題については日林誌 (1966) No. 1 に南雲が証明し、又一例ではあるが高田のシュミレーションによる解決によるように問題とならない。林内に 1 点をおとすとき、立木断面におちる確率は、 $\frac{\sum_{i=1}^N g_i}{A}$ で、 $\sum_{i=1}^N g_i$ が ha あたり 70~80 m² ある林は極めて稀だから 0.007~0.008 が最大確率となるから、常識的にも判断できる。

今、このような調査不能点を省くとすると比較的均質な林分では、平均的には ha あたり断面面積の偏りは $\frac{G^2}{A^2} \times 10,000 \text{ m}^2$ となろう。従ってたとえ、1 ha 100 m² の胸高断面積合計の林があったとしても $\frac{(100)^2 \times 10,000}{(10,000)^2} \text{ m}^2 = 1 \text{ m}^2$ すなわち 1 m² の過小な偏りがあることになり、問題にならないであろう。

7. 点抽出法と円形プロットサンプリング

Bitterlich 法と円形標本地調査法についての比較研究は、前記の Pflugbeil の例を始めとし、極めて多い。筆者らの行なった1959年の黒羽国有林の例では(10 m)円形プロット法も Bitterlich 法 ($BAF=4$) も殆んど精度の点では差はなかった。

しかし、カナダの Kirby の1965 (Dec.) の発表では、異令天然針広混交林での実験例では1/5 エーカー標本地法に対し、 $BAF=10$ の Bitterlich 法は変動係数は10%ほど多かったし、直径3.6吋以上の木についてプロット法は5割位精度がよかったと発表している。

Grosenbaugh と Stover も1954年にこの比較を行なっているが、plot面積は1/4 エーカーで、point sample よりも、plot sample の方が精度は20%ほどよかったが、推定値がほとんど変わらないこと、調査時間、労力の面から点抽出法の方がよいと発表している。

1957年発表の Kendall と Wittgenstein の Pettawa の天然林の調査結果でも1/5 エーカープロット法の標準偏差は、point sample よりも小さかったが、推定値はほとんど異ならない。これは Grosenbaugh らの調査結果とほとんど一致している。

上記の各研究者の発表から、一がい何れの方法がよいか決定することは困難で、対象林分の地林況に相当関係するものと思われる。

一方また、筆者の基礎理論から、すべての a_i が同じものとすれば、(形は円形でも、長方形でもよい) この理論が plot sampling にも使える。例えば $a_i = \pi r^2$ とすれば円形プロット法になり、しかもこの円形プロットは互に重なる部分があってもよい。一般に円形プロットでは平面を隙間なくおおうことができないので、むしろ却ってこの方がよいかも知れない。この場合の分散の式(2)は

$$\frac{1}{A} \left[\frac{1}{a} \sum_{i=1}^N x_i^2 + \frac{2}{a^2} \sum_{i>j}^N a_{ij} x_i x_j - \frac{(\sum X)^2}{A} \right]$$

ただし、

$$a_{ij} = \frac{2a}{\pi} \cos^{-1} \frac{d\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} - \frac{d}{2} \sqrt{\frac{4a}{\pi} - a^2} = \frac{2a}{\pi} \cos^{-1} \frac{d\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} - \frac{d\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - \left(\frac{d\sqrt{\pi}}{2a}\right)^2}$$

となる。

8. 結 び

従来、定角測定法と称される Bitterlich 法、平田法、Strand 法については各人により色々な面から、証明されていたが、その分散の計算については Palley と Horwitz が材積について論じている外には、ほとんど論じられず、論じられても、無限母集団か有限母集団かの議論が日本では盛んであった。筆者は、上記のすべての方法について一貫した基礎理論より、各因子の推定値の求め方、母分散の計算公式やその分散の推定値の計算方法を述べた。平均樹高、平均直径の3種の推定法についても検討を加えた。

さらに現在 U.S.A. で問題となっている林縁効果について偏りのない2方法を提案し、断面積定数が大になるに従い、分散が大になること、他の条件を一定にした場合は、群度が大になるにつれ分散も大になり、林地面積も大になるにつれ、相対分散 (rel-variance) が大になることを示し、日本で問題になった木の断面内に標本点がおちた場合に無視することによる偏りは negligible small であることを述べた。また、円形や長方形の標本地調査法は、木の対応する domain がすべて一定の形状、面積を与えた特別な場合の点抽出法、線抽出法と考えられたことを示し、plot sampling と plotless sampling の若干の実例を引用したが、この優劣は林相調査目的や項目、労力、費用などの問題が関連しているので一概に何れがよいかはきめられない

い。やはり、その調査に応じてきめるべきものであろう。(小林分の場合は全林毎木調査のよいことは当然であろう)

この論文をまとめるにあたり、実例の計算については主として樋渡みよ子氏に担当して頂き、また葉袋次郎氏、神戸喜久氏、金豊太郎氏らの御援助を得た。なお上智大学教授斎藤金一郎博士には論文を通読され、とくに各種の推定式の正しいことを認めて頂き有益な御助言を賜わった。以上の諸氏に対しては、衷心より感謝の意を表する次第である。(林業試験場)

(昭和 41 年 3 月)

Literature Cited

- Barret, J. P. 1964. Correction for edge effect bias in point-sampling. *Forest Sci.* 10 (10): 52-65.
- Bitterlich, W. 1947. Die Winkelzählmessung. *Allgem. Forst-und Holzw. Ztg.* 58 (11/12): 94-96.
- . 1948. Die Winkelzählprobe. *Allgem. Forst-und Holzw. Ztg.* 59 (1/2): 4-5.
- Essed, F. E. 1957. Estimation of standing timber. H. Veenman & zonen, Wageningen. 60 pp.
- Grosenbaugh, L. R. 1952. Plotless timber estimates-new, fast, easy. *Jour. Forestry.* 50 (1): 32-37.
- . and Stover, W. S. 1957. Point-sampling compared with plot-sampling in southeast Texas. *Forest Sci.* 3 (1): 2-14.
- . 1958. Point-sampling and line-sampling: Probability theory, geometric implications, synthesis. U. S. Forest Serv. South. Forest Expt. Sta. Occas. Paper 160, 34 pp.
- Haga, T. and Maezawa, K. 1959. Bias due to edge effect in using the Bitterlich method. *Forest Sci.* 5 (4): 370-376.
- Hirata, T. 1955. Height estimation through Bitterlich's method-vertical angle-count sampling. *Jour. of the Japanese Forestry Society* 37 (11): 479-480.
- . 1962. Studies on the methods for the estimation of the volume and increment of a forest by angle count sampling. *Bulletin of the Tokyo Univ. Forests* 56, 1-76.
- Masuyama, M. 1953. A rapid method of estimating basal area in timber survey. *Sankhyā* 12 (3): 291-302.
- Nagumo, H. 1966. Bias due to uncountable area in WZP. (in Japanese)—*Jour. of the Japanese Forestry Society.* 48 (1): 36.
- Ohtomo, E. 1960. On the Bitterlich's method (1) (in Japanese). *Bull. of the Government For. Expt. Sta.* 122: 145-153.
- Palley, M. N. and Horwitz, L. G. 1961. Properties of some random and systematic point sampling estimators. *Forest Sci.* 7 (1): 52-65.
- Pflugbeil, E. 1964. Versuch über die verwendung verschiedener Zählerfaktoren zur Ermittlung der relativen Bestandeskreisfläche nach dem Verfahren der Winkelzählprobe von Bitterlich. *Cbl. ges. Forstwesen* 81 (1): 24-40.
- Strand, L. 1957. "Relaskopisk" hoyde-og kubikkmassebestemmelse. *Norske Skogbruk* Nr. 20.

[付言] 3~4 頁の式 (1), (2) の別証明は上智大学斎藤教授が J. Cornfield の方法を利用して得られ、(3) 式もヘロンの公式を利用すると筆者の計算より簡便に求められることを示された。もちろん、その結果はすべて筆者の得た結果と一致している。