統計的立場からみたビッテルリッヒ法

石　田　正　次

（1966年4月受付）

Some Statistical Remarks on the Bitterlich Method

Masatsugu ISIDA

The Bitterlich method is an unique techniqne for the total estimation of tree basal area. For the reason that this method is quite different from the usual area sampling and besides suggests the possibiliy to reduce the labor for tree mensulation, many foresters have shown keen interest about it.

But intending to apply this method in forest survey, we are confronted by many difficulties in the sense of sampling theory, mensulation error and estimation problem.

In this paper we describe the outline of the Bitterlich Method with its derivatives, and discuss the practical problems quoting the results of the simulation by Monte Carlo Method.

Insutitute of Statistical Mathematics

1.　ま　え　が　き

Winkelzählplobe（略して WZP という）の名で I. W. Bitterlich が 1948 年に発表したこの立木調査法は従来のものとかなり様子を異にしており，更に材積測定の手間を著しく軽減できる可能性を暗示するために，林学者はもとより実務にたずさわる多くの林業技術者の興味の対象となってきた．

サンプリング理論からみても，この方法は見逃すことのできない内容を蔵している．つまり抽出確率を調査の対象となる各個体の標識の値で巧みにおきかえて，間接的に推定を行うことがその中心問題である．

しかしこの方法を森林調査の実務に適用するとなると理論的な又現地の状態からの数々の制約をうけることになり，調査精度を適確に評価することは非常に困難になってくる．これらの問題に関しては今までに国の内外でいろいろと論議されてきたが，未だ誰もが納得のいく決論はでていない．

ここでは統計学者のためにこの Bitterlich の調査法の概略を紹介するとともに，今まで何回となく繰り返えし述べてきた問題点を統計的立場からまとめて論じてみたい．

2.　WZP の概略

直径が d の 1 本の円柱が地上の P 点に垂直に立っているとする．これを地上のある点（O）から水平方向に望み，その直径の視角 θ を測定すれば PO 間の距離 D は近似的に

$$D=\frac{d}{\theta}$$

で表わされる.

今別にある値 θ_0 を定めたとき

$$\theta>\theta_0$$

ならば測点 O は点 P を中心とした半径 d/θ_0 の円内にあることになる. これは円柱の直径 d が $1/\theta_0$ 倍になったと仮想したとき測点 O がこの円柱の中に含まれることと同義である. 逆に

$$\theta<\theta_0$$

ならば測点 O は直径 d/θ_0 の円柱には含まれない.

次に直径が

$$d_1, d_2, d_3, d_4, \cdots\cdots, d_N$$

の円柱が林立した平地を考える. この平地上の一点 O で各円柱を水平方向に望み, それぞれの直径の視角

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots\cdots, \theta_N,$$

を測定し

$$\theta_i>\theta_0$$

であるような θ の個数を n とするとこれは半径が

$$d_1/\theta_0, d_2/\theta_0, d_3/\theta_0, \cdots\cdots, d_N/\theta_0$$

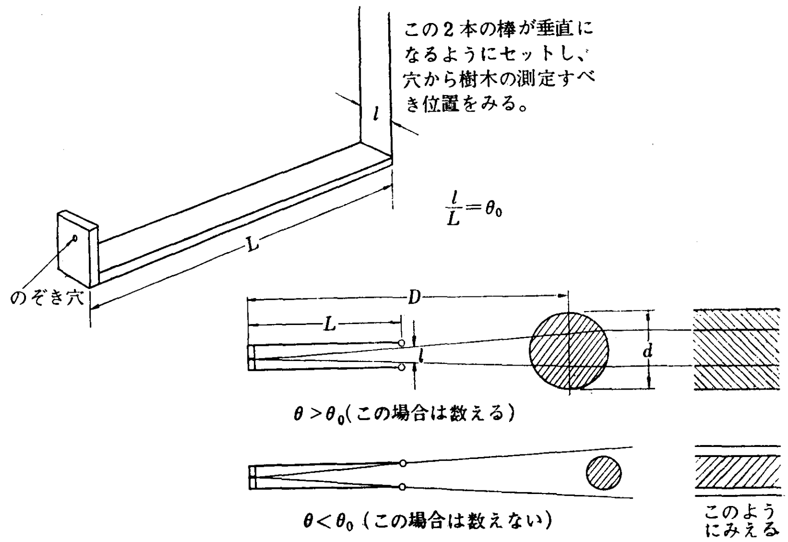
であるような円盤のうち測点 O 上で重なりあっているものの数を示すことになる.

これらの N ケの円盤のすべてを含むような範囲で (その面積を A とする) 測点 O をランダムに撰んだとすれば

$$E(n)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\frac{d_i}{\theta_0}\right)^2=\frac{4}{A\theta_0^2}\sum_{i=1}^{N}\pi\left(\frac{d_i}{2}\right)^2$$

(N は林分内全立木数)

となることは明らかである. ここで θ_0 と A は既知であるから測点の数を $O_1, O_2, \cdots\cdots, O_m$ とふやして各測点でのカウント数 n_j の平均 $\bar{n}$ を求めれば



第1図 Bitterlich 法の測定機

$$\frac{1}{4}A\theta_0{}^2\bar{n}$$

は円柱の断面積合計の不偏推定量であり，

$$\frac{1}{4}\theta_0{}^2\bar{n}$$

は単位面積当りの断面積合計の不偏推定量となる．（ここでは円柱の中にも測点がとれると考える）

森林調査では円柱ではなく立木の胸高（地上高 1.2 m 附近）の視角を測定し，胸高断面積合計の推定を行う．又林地が傾斜している場合も第1図のような器具を使えば同様に測定が可能であり，実際にはより簡便な光学的測定機がいろいろと考えられている．

以上が Bitterlich 法の概略であるが，これでわかるように樹木の断面積合計を推定するのに樹木そのものとかあるいは土地ではなく地上の点を抽出単位としているので森林調査で多く使われる area-sampling に対比してこの方法は point-sampling とも呼ばれている．各立木からみればその抽出確率はその断面積に比例した値となり，重複をゆるした抽出が行われることになる．

3. WZP の変形

A） 樹高調査との組み合せによる蓄積の推定

胸高断面積の合計から林分材積を推定する方法はいろいろと考えられているが，後述するようにいずれも実用上問題が多い．そこで WZP と毎木調査とを組み合せて林分材積を推定する試みがなされている．

林業においては単木の材積の近似値として

$$V = khg$$

の式が用いられる．ここで

V： 単木材積
h： 樹高
g： 胸高断面積
k： h と g によって定まる常数で通常は約 0.5 程度（胸高形数と呼ぶ）

である．

一般に樹高 h と胸高直径 d との相関が高いので k は h のみによってもかなりの精度で決ってしまう．一方，胸高断面積が g_i である i 番目の立木がカウントされる（$\theta_i>\theta_0$ となる）確率は

$$4g_i/A\theta_0^2$$

であるから，ランダムに撰ばれた測点についてカウントされた立木の樹高 h を測り h から k を求めて，

$$v=\frac{\theta_0^2}{4}\sum kh$$

を作ればその待望値は

$$E(v)=\frac{\sum_{i=1}^{N}v_i}{A}\quad (N \text{ は林分全立木数})$$

つまり単位面積当りの蓄積となる．

B） 胸高断面積調査との組み合せによる本数の推定

ランダムに選ばれた測点で WZP を行ってカウントされた立木の胸高断面積 g を測り

$$\frac{\theta_0^2}{4}\sum\frac{1}{g}$$

をつくればその待望値は単位面積当りの立木本数となる．

C) 樹高についての WZP

胸高直径の視角を測る代りに樹高に対する仰角 φ をはかりその値が予め定められた値 φ_0 より大きい立木の本数 n を測れば（林地は水平とする）

$$E(n)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{N}\pi(h_i\cot\varphi_0)^2 \quad (N \text{ は林分全立木数})$$

であるから

$$\cot\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

つまり

$$\varphi_0 \fallingdotseq 60^\circ 34'$$

に定めれば

$$E(n)=\frac{1}{A}\sum_{i=1}^{N}h_i^2 \quad (N \text{ は林分全立木数})$$

となる．この値自体は測樹上直接の使いみちはない．樹高の変位係数を無視してこれから平均樹高の推定をしようとする試みがあるが，これは論外である．

D) Line Sampling

水平な林分内に一定方向，一定長 l の直線をランダムに決定する．この直線の垂線上にある立木について，その垂線の足から樹高に対する仰角 φ を測り，

$$\varphi>\varphi_0$$

なる樹木の胸高断面 g と胸高形数 k から

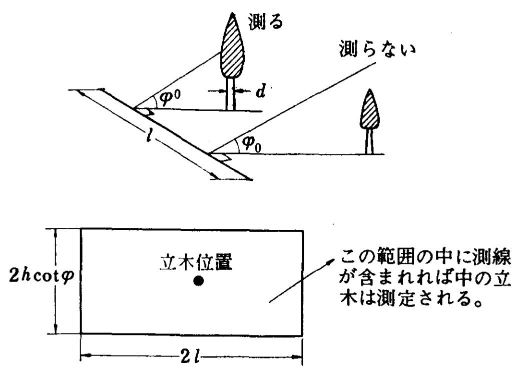
$$\sum kg \quad (\textstyle\sum \text{ は一つの測線で入る立木について加える})$$

を作れば

$$E(\sum kg)=\frac{2l\cot\varphi_0}{A}\sum_{i=1}^{N}k_ig_ih_i \quad (N \text{ は林分の全立木数})$$

$$=\frac{2l\cot\varphi_0}{A}\sum_{i=1}^{N}v_i$$

である．（第2図参照）



第2図 Line Sampling

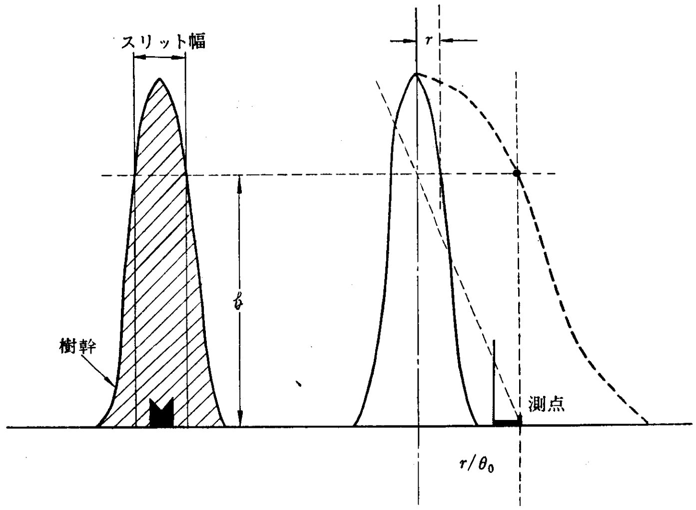
この方法では測点の代りに測線をとることによって単木の抽出確率を樹高 h に比例した値

$$\frac{2lh\cot\varphi_0}{A}$$

としているため胸高断面積 g と胸高形数のみから蓄積が求められる.

E) 一致高

水平な林分の地表から第1図に示す測定機を用いて立木を観たとき，視角 θ_0 を決めるための垂直な二本の棒と樹幹との交点を樹幹上で求め，その点の高さ $\mathfrak{H}$（一致高という）を測定する.（第3図参照）



第3図 一致度

高さ $\mathfrak{H}$ のところの立木の半径を r とすれば測点と樹木の中心との間の距離は近似的に

$$r/\theta_0$$

である. 今木の太さが一様に $1/\theta_0$ 倍になったと仮定すればこの測点はその樹幹の中に含まれ，更に測点における木の表面までの高さは丁度 $\mathfrak{H}$ に一致することになる.

ランダムに撰ばれた一つの測点から得られるすべての一致高について

$$\theta_0 \sum \mathfrak{H}$$

を作れば

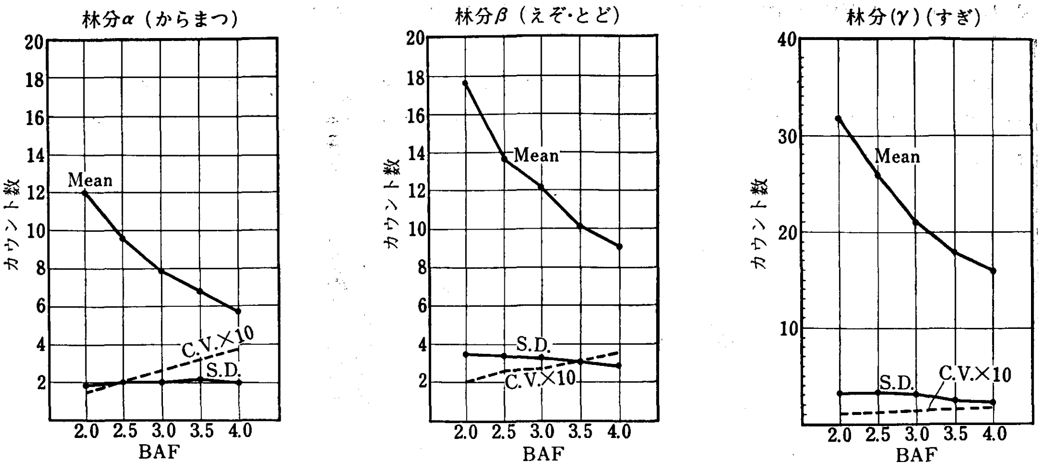
$$E(\theta_0 \sum \mathfrak{H}) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{N} v_i$$

となる. この方法は現場への適用の困難性はあるが，樹幹曲線とか胸高形数を用いずに蓄積が推定できる点が面白い.

4. 標本理論からみた WZP の問題点

通常の森林調査では一つの林分内にある立木を測定するのであるから調査単位の数は有限個であり，サンプリングを適用するとしても抽出単位が area であれ単木であれ本質的には有限母集団である. しかし WZP では林分内の点又は線を抽出するために常に無限母集団となる.

第4図は三つの森林の立木位置図（実測）をもとにしたモンテンカルロ法（TSK III を使用，サンプル数 1000）による WZP の調査結果であるが，これでみると BAF（$\theta_0 \times 10^4$）が 2から4の範囲では変位係数（C. V.）が 0.1 から 0.35 程度までのひらきがあることがわかる. C.V. として 0.15 から 0.3 程度と考えれば胸高直径合計を誤差5パーセントで推定するための標本点の数は 36 から 144 となる. 一般には事前に変位係数の値を十分正しく知ることは困難であるから最小の標本数としてまず 50 点以上場合によっては 100 点以上が必要である.



$\bar{d}=0.36170$ (m)
$\sigma_d{}^2=0.00240$
$\sum g/\mathrm{ha}=24.20118$ (m²)
$n/\mathrm{ha}=231$ (本)

$\bar{d}=0.31337$ (m)
$\sigma_d{}^2=0.04001$
$\sum g/\mathrm{ha}=38.36656$ (m²)
$n/\mathrm{ha}=353$ (本)

$\bar{d}=0.21669$ (m)
$\sigma_d{}^2=0.00177$
$\sum g/\mathrm{ha}=64.83559$ (m²)
$n/\mathrm{ha}=1694$ (本)

第4図 モンテカルロ法による WZP (1000 Sample)

この標本数は林分の大きさには無関係であるから，WZP は小面積林分の調査では非常に不利である．

WZP では林分内のいずれかの立木がカウントされ得るすべての範囲に標本点を落さなければならないから，その範囲を事前に確定するとともに，推定にはその面積をも測らなければならない．これは林縁にある幅をもたせた新たな調査のための林分を作ることになりなり，もとの林分のほかにこれについても周囲測量，図化，面積計算を行うことを意味する．林縁に設ける領域の幅 Δ は林縁附近の立木の太さ（又は高さ）と位置によって決るが，安全めをみてこれを大きくとればそれだけ測量と測定の手間が増すばかりではなく測定値の中に0又はこれに近い値が多くなってくるのでその変位係数が急増してくる．これは調査精度の低下をもたらすことになるから，これを補うためには標本数をその分だけ余計にしておかなければならない．

林縁に設ける帯の幅を一定の値 Δ にとるとすれば Δ は林縁の最大木胸高直径 $d_{\max}$ の $1/\theta_0$ 倍より大きくとらなければならない．つまり

$$\Delta \geq \frac{d_{\max}}{\theta_0}$$

である．今

$$d_{\max} = 0.3\,\mathrm{m}$$

$$\mathrm{BAF} = 1{\sim}4$$

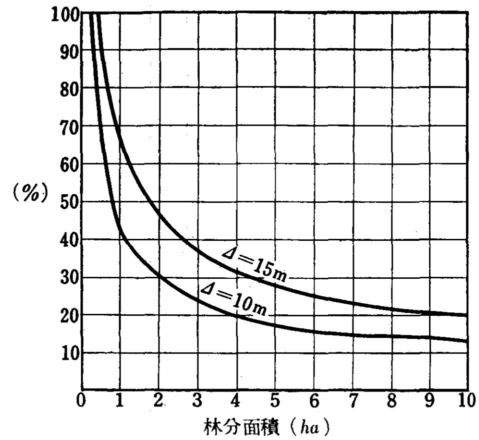
$$\text{但し}\quad \mathrm{BAF} = \frac{\theta_0{}^2}{4} \times 10^4$$

とすれば Δ としては 10 m から 15 m 程度になろう．

林分の周囲が凸であるならばその周の長さを S としたとき林縁に作った幅 Δ の帯の面積 A_1 は

$$A_1 = \Delta S + \pi \Delta^2$$

となる．第5図は林分が正方形の場合の林分面積 A_0 と A_1 との比を示すものであって，これでみても 1 ha の林分で実際の調査面積 A はその 40 % 増し，10 ha でもまだ 13 % 増しになる．一般に林分の形は矩形に近いから調査面積の比率はこれよりも大きな値となる．この点



第5図　A_1/A_0（帯/林分）

からみても WZP は小面積林分の調査には不適当といえる．

WZP では標本点を立木の中にも落さなければ正しい推定を行うことができない．しかし実際には立木の中は勿論その附近に於ても測定を行うことは不可能であるから，これらの部分を除けば当然調査結果に歪みを生ずる．この歪みの程度をモンテカルロ法によって調べた結果が第1表で立木の中にも測点を落した場合の平均カウント数と，立木及びその回り 50 cm のところを除いたときの平均カウント数を比較して何%程度狂うかが示されている．これは，サンプル 1000 で唯1回のモンテカルロ法の結果であるからはっきりしたことは言えないが，大体次のような傾向があるようにも思われる．

第1表　立木附近の測点を除いたための狂い

林分	樹　　種	毎町本数	BAF（断面積乗数）				
			2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
α	からまつ	231	−0.1%	−0.2%	−0.4%	−0.4%	−0.6%
β	えぞ，とど	353	−0.1%	−0.3%	−0.2%	−0.3%	−0.8%
γ	す　　ぎ	1,694	−1.3%	0　%	−0.7%	−0.7%	−0.5%

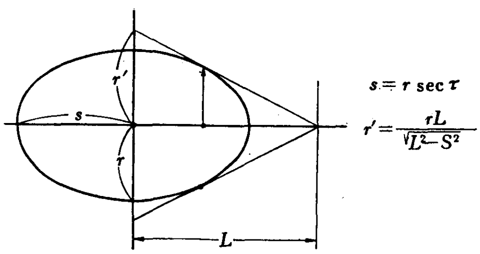
1)　歪みは過少推定の方向に生ずるらしい．
2)　BAF が大くなるに従って歪みも増大するらしい．
3)　立木密度にも歪みは関係があるらしい．

この点に関しては計算例を増して吟味しなければならないが，歪みの大いさは1%前後，高々2%以下で過少推定の方向と考えて大きな間違いはないであろう．

5.　測定誤差について

i)　みかけの直径

第6図に示す通り，立木の直径の視角を測ろうとすれば実際に測られるものは測点から立木に引いた接線のなす角であって，これは真の直径の視角よりは常にいくらか大きくなってしまう．

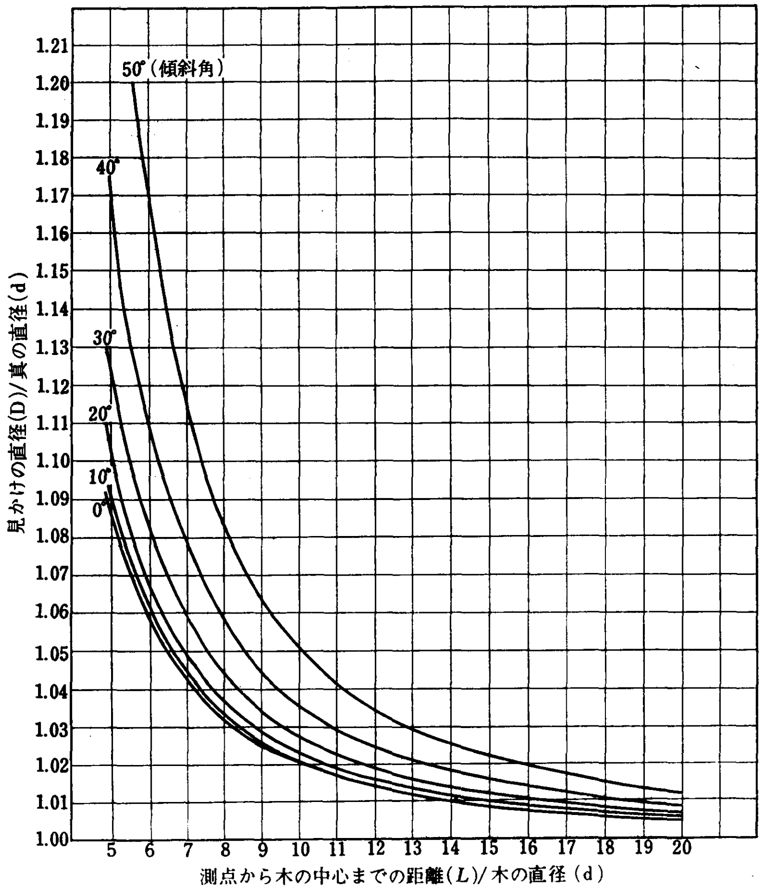


第6図　見かけの直径

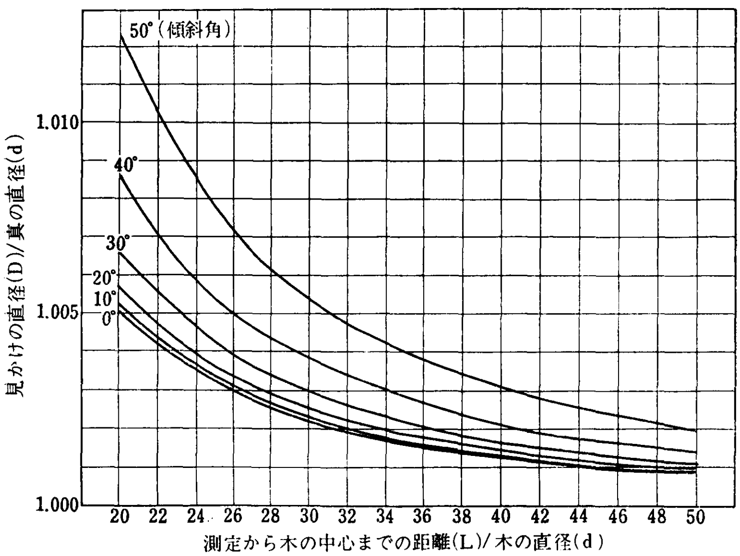
目の位置と立木の測定しようとする中心の位置との間の距離を L，その傾斜角を τ とすれば真の半径 r とみかけの半径 r' の比は

$$\frac{r'}{r}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{r^2}{L^2}\sec\tau}}$$

となり，第7図，第8図はこれをグラフにしたものである．この誤差は測点と立木の間の距離が近いとき，又は傾斜が急なときに大きく影響してくるが，通常用いられる断面積乗数は1から4程度であるので，実際問題になる立木までの距離と立木直径との比は 20 から 50 程度と



第7図 みかけの直径(その1)



第8図 見かけの直径(その2)

なり，その誤差は1パーセント前後あるいはそれ以下と考えてよいであろう．

第2章E）で述べた一致高の場合は近距離高角度の測定が必要となってくるのでこの誤差は大きい．

ii）視角の測定誤差

WZP の誤差のうち一番注意しなければならないのが視角の測定誤差であろう．この種の誤差はその大いさの評価が困難であるばかりでなく場合によっては致命的影響を及ぼすこともあり得る．

WZP では視角 θ について

$$\theta<\theta_0 \quad か \quad \theta\geqq\theta_0$$

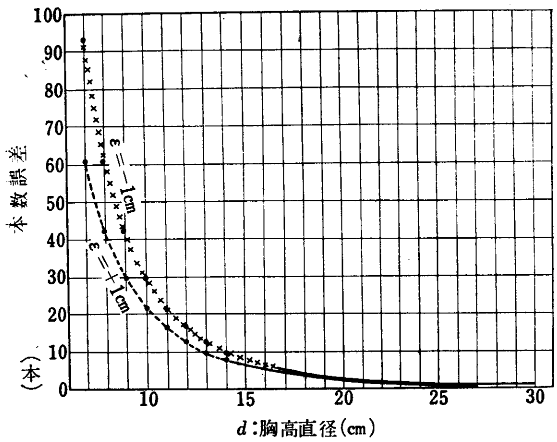
を判定するのであるから，誤差としては θ_0 附近についてだけ吟味すればよい．

一般に θ_0 が小さくなるに従って

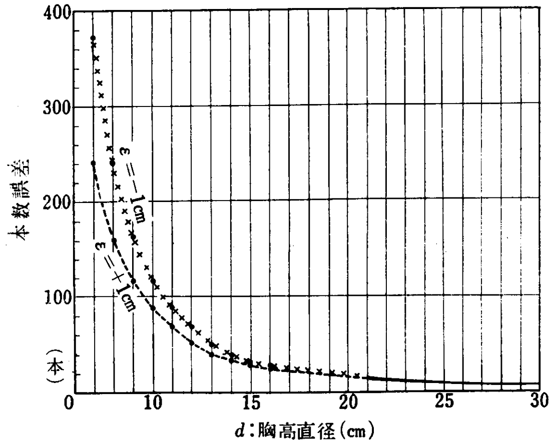
a）視角 θ の判定誤差は大きくなり，

b）カウント本数が増加するので立木の見逃し，重なりも増加し，

c）遠くの立木まで問題になるので胸高位置の狂いも大きくなる．



第9図　d の誤差 1 cm のときの ha 当り本数誤差（BAF：1）



第10図　d の誤差 1 cm のときの ha 当り本数誤差（BAF：4）

故に単に測定誤差だけを小さくするのであれば θ_0 はできるだけ大きくとった方がよいが，各測点におけるカウント数の変位係数は θ_0 とともに増加するので，どのへんに θ_0 を選ぶべきかは測定誤差の精密な分析をまたなければならない．

iii）本数の推定

第2章の B）で述べた WZP による本数の推定では胸高断面積の逆数の和を求めているが，この方法では立木の直径が小さくなると測定誤差が大幅に影響してくる．第9図及び第10図は直径の測定誤差 1 cm 当りの本数推定誤差を示したものである．一般に直径の測定はそれほど精密に行うことはできず，1 cm や 2 cm の誤差はめずらしくないので，この法による本数推定がいかに困難であるかがわかる．特に注意しなければならないことは直径と推定本数との間の関係がリニヤーでないということである．これは直径の誤差がアンバイアスであったとしても推定本数の誤差には必ずバイアスを生ずることを意味する．つまり真の直径を d，測定直径を $d(1+\varepsilon)$ とすれば ha 当りの本数 N の推定値 n は

$$K\sum\frac{1}{d_i^2(1+\varepsilon_i)^2}\quad K\text{: 常数}$$

である．更に ε はすべての d について平均 0 の対称な同じ形の分布をもつとすれば

$$\frac{E(n)}{v}=1+3\mu_2+5\mu_4+7\mu_6+\cdots\cdot$$

$$\text{但し}\quad E(\varepsilon^i)=\mu_i$$

となり平均的な意味で過大推定を行うことになる．

6. WZP による蓄積推定

森林調査のうち最も重要度の高いものは林分の蓄積測定であって，WZP もその目的で考案されたものであろう．しかし WZP 本来の方法では胸高断面積の合計が推定されるだけで直接には林分蓄積は求めることができない．前にも記したように単木の材積では近似的に

$$khg$$

でもとめられる．ここで

k： 胸高形数

h： 樹高

g： 胸高断面積

である．林分蓄積

$$V=\sum_{i=1}^{N}k_ih_ig_i$$

を求めるために胸高断面積合計

$$G=\sum_{i=1}g_i$$

を利用しようとすれば，k と h の平均，k,h,g の標準偏差，及びそれらの間の相関係数を何等かの方法で推定した上で

$$V\doteqdot\bar{k}\bar{h}G\left(1+\gamma_{kh}\frac{\sigma_k}{\bar{k}}\frac{\sigma_h}{\bar{h}}+\gamma_{kg}\frac{\sigma_k}{\bar{h}}\frac{\sigma_g}{\bar{g}}+\gamma_{hg}\frac{\sigma_h}{\bar{h}}\frac{\sigma_g}{\bar{g}}\right)$$

（但し　γ,σ はそれぞれの相関係数及び標準偏差）

の関係式を用いなければならない．この方法を正しく行うには毎木調査が必要であるから WZP の本来の意味はなくなってしまう．又必要な数字を「メノコ」で作ることもよく行われているがこれでは調査の客観性は保てない．

WZP と毎木調査の結果から

$$V=\alpha+\beta G,$$
$$V=\alpha\bar{h}G,$$
$$\log V=\alpha+\beta\log\bar{h}+\gamma\log G$$

などのパラメーターを予め推定しておいて，それぞれの式を利用することも考えられるがその精度はあまり期待できない．但しここで多くの林分の合計蓄積を測定する場合，全林分についての WZP，標本林分（少くも 50 くらい）についての毎木調査について回帰推定を行うことは意味がある．

一般に胸高直径の測定よりも樹高の測定の方が手間がかかる．故に第2章の A)，つまり WZP と樹高測定の組み合せよりは D）の Line Sampling の方が実用的に歩がありそうである．E）の一致高は測定が面倒なばかりでなく測定誤差が多くて実用的意味は薄い．

7. WZP の問題解決のための吟味調査

林分蓄積の簡易調査法として WZP が充分実用になるという報告は数多くあるが，その精度

評価に関する研究は未だあまり見当らない．毎木調査と規準のちがった WZP の対比の繰り返えしは医学でいう一例報告の積み重ねと同じで，そこから科学的結論を求めることは困難である．WZP の有効な利用を望むのであるならば科学的に企画された綜合的な吟味調査を何回か行わなければなるまい．

この機運もようやく熟してきつつあることは大変喜ばしいことであるが，吟味調査として最後に次のようなものを提案したい．

A）実測立木位置図をもとにしたモンテカルロ法による調査のシュミレーション

これは目下新潟大学，統計推理研究所協同で小規模な実験が進められているが，実測立木位置図の不足，計算機のスピード及びメモリーの限界に研究が阻まれているのは残念なことである．この研究を進めれば次のような問題を解決することができる．

i） 標本点の効率よい選び方

ii） 周辺効果の吟味

iii） 標本誤差の評価

B）実験計画法に基づいた測定誤差の調査

実際の林分に入って調査を行う前に，視角の判定や樹高測定の誤差をいろいろな条件のもとで調べておかなければならない．測定者，測定器，明暗，林地の傾斜，立木の傾斜，などが考えられなければならない主な条件である．

C）林 分 調 査

ここでは最低次の作業を行うことが必要である．

i） 同一調査規準で一つの林分の調査を少くも5回程度繰り返えす．

ii） 同一標本点で測定者，測定器を変えて2回以上の測定を行う．

iii） 立木位置図を作りモンテカルロ法の結果と実測との対比を行う．

iv） 各工程の時間を測定する．

v） 測定結果をもとにしていろいろの推定を行いその精度を吟味する．

（統計数理研究所）