Greenstadt 法を利用した代数方程式の解法について

多　賀　保　志
駒　沢　　　勉

(1960 年 4 月 受 付)

Some Remarks on the Solutions of Algebraic Equations Based on the Method for Unitary Transformations of the Companion Matrices

Yasushi TAGA and Tutomu KOMAZAWA

Though N. S. Mendelsohn has proposed that the solutions of algebraic equations can be obtained by applying the suitably modified power method to the companion matrices of the given algebraic equations of real coefficients (see [1]), it seems to us that there may happen the cases in which successive solutions gained by his method will oscillate and converge very slowly (see [2]). Then, we have tried to solve algebraic equations (of real or complex coefficients) applying the method, proposed by J. Greenstadt (see [3]), to the computation of eigenvalues of the companion matrices by unitary transformations, on the relay computer FACOM 128A settled in our Institute.

As our program for this method is very simplified by separation of the real parts and the immaginary parts of the complex matrices, computational procedure can be performed as easily as in the case of orthogonal transformations appearing in the rotation method for the real symmetric matrices. Several algebraic equations of real coefficients of degree 3～6 have been solved by our method successfully, and the errors of the obtaind solutions for their true values are sufficiently small after 5～7 iterations, e. g. the maguitudes of the errors are about $10^{-6}\sim10^{-7}$ in the case of no multiple root and $10^{-3}\sim10^{-4}$ in the case of multiple (double) roots (numbers of eight decimal digits of floating point are employed in the computational process). Though there are some cases where our method can not be applicable, e. g. $x^n+1=0$ we have succeeded to treat such equations by suitable transformations, say $x=y+1$. Furthere, we succeeded in evaluating the errors of obtained solutions for the true values by taking the changes of roots of the equation into consideration which arise in changing the coefficients of the equations slighty.

Institute of Statistical Mathematics

§1. 序

実係数の代数方程式をとく（すべての根を求める）方法として，その方程式に対応するコンパニオン行列を作り，行列の固有値を求めればよいということが，Mendelsohn によって提案された

([1] 参照). しかし，次数の高い方程式について，Mendelsohn 法を適用してみたところ，振幅が大きくて中々収斂しそうもなかった ([2] 参照). そこで，任意の行列を適当な U 変換により三角化して固有値を求める方法 (Greenstadt 法—[3] 参照) をコンパニオン行列に適用してみたところ，非常に良い結果がえられた. 収斂条件について，理論的に明確な結論が出ていないので，若干疑問点は残されているが，次のような点ですぐれた点をもつ方法であるから，とりあえずわれわれの試みた結果を報告しておく.

1) すべての根が逐次的に，しかも同時的に求められる.
2) 従って，要求される精度まで根が求められ，そこで計算を打切ることができる.
3) 重複根がある場合でも，接近した根がある場合でも，全く同じ方法で根が求められる. ただし n 重根の場合，求められる根の精度は単根の A ケタに比して，約 A/n ケタに落る. 接近した根の場合も重複根と似たことが起る.
4) $x^n+1=0$ のような形の方程式に対しては，この方法を適用できないが，予め $x=y+1$ のような変換を行っておけばよい.
5) 複素係数の代数方程式をとくにも，この方法は有効である.

なお，われわれはリレー計算機 FACOM 128-A を利用して 3～6 次の代数方程式をといてみた.

§2. 方法の説明

代数方程式（係数は実数でも複素数でもよい）

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

が与えられたとき，そのコンパニオン行列 $(n\times n)$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$$

を作り，行列 A の対角線より下の部分を 0 にするよう U 変換を行う.

一般に，行列 $A=(A_{ij})$ が与えられたとき，要素 $A_{mk}(k<m)$ を 0 ならしめる U 変換行列 $S_{(km)}$ は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} s_{kk} & s_{km} \\ s_{mk} & s_{mm} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & a \end{pmatrix},$$

その他の s_{ij} については

$$s_{ii}=1(i\neq k,\ m),\qquad s_{ij}=0(i,\ j\neq k,\ m)$$

ただし，$a=(1+|\mu|^2)^{-\frac{1}{2}}$，$c=\mu a$

μ は $A_{km}\mu^2-(A_{mm}-A_{kk})\mu-A_{mk}=0$ をみたす根のうち絶対値の小なるもの

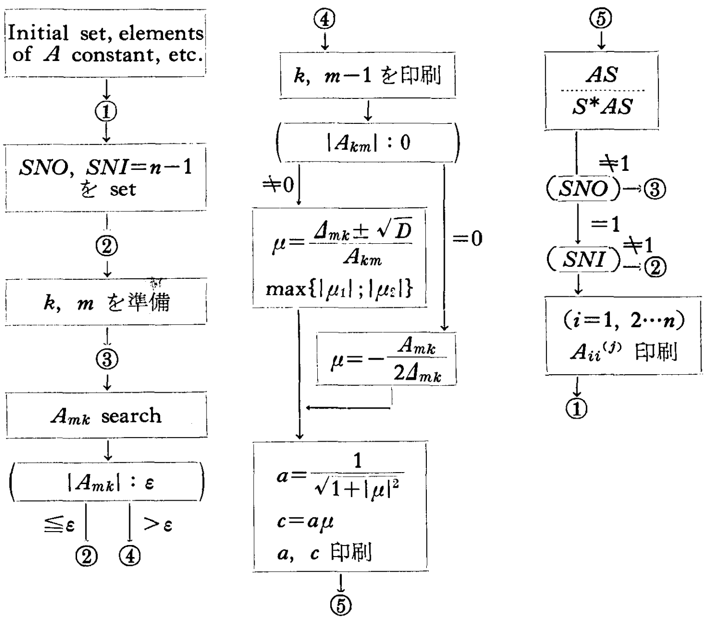
そのような $S_{(km)}$ を作って，

$$A^{(1)}=S^*_{(km)}A\ S_{(km)}$$

なる U 変換を行うと，$A^{(1)}$ の mk 要素 $A_{mk}{}^{(1)}$ は 0 となる. (一般に $A^{(l)}=S^*_{(km)}A^{(l-1)}S_{(km)}$ とする) このような U 変換を，A の対角線より下のすべての要素について行ったとき，1 反復 (iteration) とよぶ. われわれの経験によると，有効数字 7 桁まで収斂させるには $n=3$ の時 4 反復，$n=6$ の時 7 反復が必要であった.

次に，計算過程を示す流れ図 (flow-chart) を掲げておく.

［流　れ　図］



§3　解の精度

A に対して，次々に U 変換を行ってゆき，最後にえられた行列 $A^{(L)}$ の対角要素 λ_1', λ_2', …, , λ_n' が，元の行列 A の近似固有値となっている（すなわち元の代数方程式 $f(x)=0$ の根 λ_1, λ_2, …, λ_n の近似値である）．$|\lambda_i'-\lambda_i|$ が解の精度を表わすから，これを評価する方法を考えよう．まず

$$g(x)\equiv(x-\lambda_1')(x-\lambda_2')\cdots\cdots(x-\lambda_n')$$
$$=x^n+a_1'x^{n-1}+a_2'x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n'$$

を作れば，$g(x)=0$ の根は正確に λ_1', λ_2', …, λ_n' であり，$g(x)=0$ の係数 a_i' を $\varDelta a_i\equiv a_i-a_i'$ だけ変化させた時の根の変化 $\varDelta\lambda_i$ をみれば，元の方程式 $f(x)=0$ の根に対する近似度が評価される．$\varDelta a_i$ が十分小ならば

$$\varDelta\lambda_i=-\frac{1}{f'(\lambda_i)}\sum_{i=1}^{n}(\varDelta a_i)X^{n-i},\quad \text{if } f'(\lambda_i)\neq 0$$

$$(\varDelta\lambda_i)^2=-\frac{2}{f''(\lambda_i)}\sum_{i=1}^{n}(\varDelta a_i)X^{n-i},\quad \text{if } f'(\lambda_i)=0 \text{ and } f''(\lambda_i)\neq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(\varDelta\lambda_i)^k=-\frac{k!}{f^{(k)}(\lambda_i)}\sum_{i=1}^{n}(\varDelta a_i)X^{n-i},\quad \text{if } f'(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(k-1)}(\lambda_i)=0 \text{ and } f^{(k)}(\lambda_i)\neq 0$$

として，$\varDelta\lambda_i$ が非常に正確に求められる．

§ 4. 計算例

［例 1］ 重複根のない場合

$$z^4-3z^3-3.9753z^2+8.65995z+15.38750746=0 \tag{4.1}$$

［第 1 表］

反復回数＼根	z_1		z_2		z_3		z_4	
	実 部	虚 部	実 部	虚 部	実 部	虚 部	実 部	虚 部
4	2.7478870	0.4901382	2.7518812	−0.4891199	−1.2513605	0.6392407	−1.2484081	−0.6402591
5	2.7500271	0.4900197	2.7499861	−0.4900292	−1.2499930	0.6400268	−1.2500207	−0.6400176
6	2.7500001	0.4900001	2.7499996	−0.4900001	−1.2500003	0.6399999	−1.2500001	−0.6400000
7	2.7500001	0.4900001	2.7499999	−0.4900001	−1.2500005	0.6399999	−1.2500000	−0.6400000
真解	2.75	0.49	2.75	−0.49	−1.25	0.64	−1.25	−0.64
誤差	10^{-7}	10^{-7}	-10^{-7}	10^{-7}	5×10^{-7}	-10^{-7}	0×10^{-7}	0×10^{-7}
誤差*	0.0000271	0.0000197	−0.0000139	−0.0000292	0.0000070	0.0000268	−0.0000207	−0.0000176

* は5回の iteration で得られた近似解の誤差を表わし，この場合の誤差評価を行うと，次のようになる．

$z=2.7500270\pm0.4900197\,i$ or $-1.2500207\pm0.6400292\,i$ なる根をもつ4次方程式は

$$z^4-3.0000126z^3-3.9754058z^2+8.6600962z+15.38853357=0 \tag{4.2}$$

となり

$$\varDelta a_1=0.0^4126 \quad \varDelta a_2=0.0^31058 \quad \varDelta a_3=-0.0^31462 \quad \varDelta a_4=-0.0010261$$

なる係数の“ずれ”に対する根の変動

$$\varDelta z=-\frac{1}{f'(z)}\sum_{i=1}^{4}\varDelta a_i z^{4-i}$$

を求めると

$$\varDelta z=-0.0^4270\mp0.0^4197\,i \text{ 或は } +0.0^4207\mp0.0^4292\,i$$

となり係数 $\varDelta a_i$ のずれに対して根が $\varDelta z$ だけ変動したことが解る．(4.1) の根に $\varDelta z$ の補正を行うと (4.2) の正確な根が得られ，その結果は，全く一致した値が得られることがわかる．

［例 2］ 特殊な形をした方程式

$$x^4+1=0 \tag{4.3}$$

なる形の方程式に，上の方法を適用しても行列要素の置換が行われるだけで，根は求められない．そこで

$$x=z+1 \tag{4.4}$$

とおきかえ (4.4) を (4.3) に代入し

$$z^4+4z^3+6z^2+4z+2=0 \tag{4.5}$$

なる方程式を得，これに上の方法を用いると7回の反復の結果は，第2表のようになる．

[第 2 表]

根	z_1		z_2		z_3		z_4	
	実　部	虚　部	実　部	虚　部	実　部	虚　部	実　部	虚　部
z の近似根	−0.2928932	−0.7071068	−0.2928933	0.7071068	−1.7071071	0.7071070	−1.7071064	−0.7071071
x の近似根	0.7071068	−0.7071068	0.7071067	0.7071068	−0.7071071	0.7071070	−0.7071064	−0.7071071
x の真の根	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
誤　差	0.0^72	-0.0^72	-0.0^78	0.0^72	-0.0^623	0.0^622	-0.0^638	-0.0^623

$\left[注：\dfrac{\sqrt{2}}{2} \div \dfrac{1.41421356}{2} = 0.70710678\right]$

[例 3]　重複根をもつ場合

$$(z-1)(z^2+1)^2=0 \tag{4.5}$$

[第 3 表]

根 / 反復回数	z_1		z_2		z_3		z_4		z_5	
	実　部	虚　部	実　部	虚　部	実　部	虚　部	実　部	虚　部	実　部	虚　部
1	0	0	0.6402580	1.0941428	0	0	0	0	0.3597418	−0.9414280
2	1.0468604	0.1367066	−0.0392936	1.2228942	0.1187955	0.6434644	−0.0567443	−1.0188087	−0.0691804	−0.9842565
3	0.9919196	−0.0042866	−0.1505924	1.0601062	0.1640083	0.9456687	0.0523644	−1.0505495	−0.0576999	−0.9509387
4	0.9991570	0.0015398	−0.0311831	1.0339853	0.0329833	0.9641695	0.0205338	−1.0297797	−0.0214909	−0.9699148
5	1.0001069	−0.0003706	−0.0188557	1.0033976	0.0191375	0.9969754	0.0070485	−1.0114635	−0.0074371	−0.9885388
6	1.0000049	−0.0000147	−0.0045612	0.9986939	0.0045593	1.0013271	0.0019091	−0.9995520	−0.0019120	−1.0004541
7	1.0000001	−0.0000001	−0.0002224	0.9996108	0.0002224	1.0003890	0.0000745	−0.9996050	−0.0000745	−1.0003945
8	1.0000001	-0.0^761	−0.0001960	0.9998438	0.0001961	1.0001561	−0.0000845	−0.9999050	0.0000845	−1.0000945
真値	1	0	0	1	0	1	0	−1	0	−1
誤差	10^{-7}	-0.0^761	−0.000196	−0.0001562	0.0001961	0.0001561	−0.0000845	0.0000950	0.0000845	−0.0000945
誤差*	10^{-7}	-0.0^616	−0.0002224	−0.0003992	0.0002224	0.0003890	0.0000745	0.0003950	−0.0000745	−0.0003945

* は7回の iteration で得られた近似解の誤差を表わし，この場合の誤差評価を上の方法で行うと次のようになる．

$$z=1 \text{ 或は } \pm 0.0^32224+1.0^33890\, i \text{ 或は } \pm 0.0^4745-1.0^4945\, i$$

なる根をもつ5次方程式は

$$z^5-(1-0.00001\,i)z^4+(2.00156626-0.00001\,i)z^3-(2.00154626-0.00000992\,i)z^2 \\ +(1.00156626-0.00000992\,i)z-0.00156696=0 \tag{4.6}$$

となり

$$\varDelta a_1=0.0^41\,i,\quad \varDelta a_2=0.0^2156626-0.0^41\,i,\quad \varDelta a^3=-0.0^2156626+1.0^5992\,i,$$
$$\varDelta a_4=0.0^2156696-0.0^5992\,i,\quad \varDelta a_5=-0.0^2156696$$

なる係数の“ずれ”に対する根の変動を上の方法で計算すると

$$\varDelta z_1=0 \text{ or } \varDelta z_2=-0.0^32223-0.0^33891\,i$$
$$\varDelta z_3=0.0^32223-0.0^33886\,i$$

となり係数 $\varDelta a_i$ のずれに対して根が $\varDelta z$ だけ変動したことが例1と同じくわかり (4.6) の根に $\varDelta z$ の補正を行うと (4.5) の正確な根に近い根が得られることがわかる ($\varDelta z_4$, $\varDelta z_5$ の計算は省略した).

統計数理研究所

References

1) N. S. Mendelsohn, The computation of complex proper values and vectors of a real matrix with application to polynomials, MTAC, 11, April, 91～94, (1957).
2) 多賀保志, 統計解析における線型計算, 統計数理研究所彙報, 第7巻, 第1号, 109～123, (1959).
3) J. Greenstadt, A method for finding roots of arbitrary matrices, MTAC, 9, April, 47～52, (1955).
4) R. T. Gregory, Computing eigenvalues and eigenvectors of a symmetric matrix on the ILLIAC, MTAC, 7, 237～239, (1953).
5) Bodewig, A practical refutation of the iteration method for the algebraic eigenproblem, MTAC, 8, October, 237～239, (1954).