追加された変数の正準相関係数に及ぼす影響

塩　谷　　実

(1957 年 4 月 受 付)

Effect of the additional Variates on the Canonical Correlation Coefficients

Minoru SIOTANI

In the present paper we discuss the effect on the canonical correlation coefficients by adding extra variates to one of the original two sets of variates. A necessary and sufficient condition that this effect of adding extra variates does not exist is also discussed with relation to some multivariate regression problem.

The Institut of Statistical Mathematics

§1. 記　号

変数の組を行ベクトルで表わす．$p+q$ 個の変数の組 x を p 個の組と q 個の組に分け，それぞれ

$$x_1 = [x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_p^{(1)}], \qquad x_2 = [x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots\cdots, x_q^{(2)}]$$

で表わし，$p \leqq q$ とする．従つて $x = [x_1 \vdots x_2]$ である．分散・共分散行列を

$$E(x_1'x_1) = \Lambda_{11},\ E(x_1'x_2) = \Lambda_{12},\ E(x_2'x_2) = \Lambda_{22}$$

$$E(x'x) = E\begin{bmatrix} x_1' \\ \cdots\cdots \\ x_2' \end{bmatrix}[x_1 \vdots x_2] = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}$$

と表わす．すると x_1 と x_2 の間の母集団に於ける正準相関係数は determinantal equation

$$|\lambda^2 \Lambda_{11} - \Lambda_{12}\Lambda_{22}^{-1}\Lambda_{21}| = 0 \qquad (1)$$

の根の平方根で定義される [3]．(1) の根を大さの順に並べて $\rho_1^2, \rho_2^2, \cdots\cdots, \rho_p^2$ とする．但し

$$1 \geqq \rho_1^2 \geqq \rho_2^2 \geqq \cdots\cdots \geqq \rho_p^2 \geqq 0$$

である．さて本稿で問題とする，x_1 か x_2 に追加される第3の変数の組を，r 個の変数として

$$x_3 = [x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \cdots\cdots, x_r^{(3)}]$$

で表わす．$E(x_1'x_2) = \Lambda_{13}$, $E(x_2'x_3) = \Lambda_{23}$, $E(x_3'x_3) = \Lambda_{33}$ とし，x_3 が x_1 か x_2 に追加された時の正準相関係数は，文字 ϕ を使つて示すことにする．また

$$x_1^* \equiv [x_1 \vdots x_3], \qquad x_2^* \equiv [x_2 \vdots x_3]$$

と書き表わす．以下 x_3 の追加の効果を解説的に述べてみよう．

§2. x_3 が x_2 に追加された場合

先づ最初に x_3 が x_2 の方に追加された場合を考える．$p \leqq q$ であるから x_1 と x_2^* の間の恒等的に 0 でない正準相関係数の個数には変化がない．$\sum_{12} \equiv [\Lambda_{12} \vdots \Lambda_{13}]$, $\sum_{22} \equiv \begin{bmatrix} \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}$ とすれば，上の正準相関係数は，方程式

$$|\phi^2 \Lambda_{11} - \textstyle\sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21}| = 0 \qquad (2)$$

の根の平方根として定義される．（2）の p 個の根を $1 \leqq \phi_1^2 \leqq \phi_2^2 \leqq \cdots\cdots \leqq \phi_p^2 \leqq 0$ とする．この時 P.G. Laha[1] は次の結果を得ている．

［定理 1.（Laha）］ 常に次の不等式が成立する．

$$\sum_{i=1}^{p} \phi_i^2 \geqq \sum_{i=1}^{p} \rho_i^2 \tag{3}$$

等号が成立するのは，$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ の時に限る．

しかし正準相関係数の自乗の和という形でなく $\prod_{i=1}^{p}(1-\phi_i^2)$，$\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2)$ についても同様のことを証明することができる．標本についてのこの形は Wilks の尤度比検定基準に関聯を持ち何かと便利であるように思われる．（3）及び次の（4）の不等式は意味を考えれば明らかであるが念のため証明をあたえておく．

［定理 2］ 常に不等式

$$\prod_{i=1}^{p}(1-\phi_i^2) \leqq \prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2) \tag{4}$$

が成立する．等号は $A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$ の時に限る．

この定理の証明には，よく知られた次の lemma を利用する[2]．

［Lemma］ A, B が対称行列で且つ B が正値定符号，$A-B$ が非負であるとする．しかる時

$$|A| \geqq |B| \tag{5}$$

［定理 2 の証明］

$$\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2) = |A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|\ |A_{11}|^{-1} \tag{6}$$

$$\prod_{i=1}^{p}(1-\phi_i^2) = |A_{11}-\textstyle\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}|\ |A_{11}|^{-1} \tag{7}$$

であるから

$$\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2)}{\prod_{i=1}^{p}(1-\phi_i^2)} = \frac{|A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|}{|A_{11}-\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{22}|} \geqq 1 \tag{8}$$

を証明すればよい．今

$$A \equiv A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \qquad B \equiv A_{11}-\textstyle\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21} \tag{9}$$

とおけば，A，B は明らかに対称行列である．また B が正値定符号行列であることも容易に示すことができる（A も同じく正値定符号）．即ち

$$B = [b_{ij}], \quad A_{11} = [c_{ij}], \quad i,j = 1,2,\cdots\cdots,p$$

$$\textstyle\sum_{12} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix}$$

で表わせば，（9）の B は

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11}-d_1\sum_{22}^{-1}d_1' \cdots\cdots c_{1p}-d_1\sum_{22}^{-1}d_p' \\ \cdot \qquad \cdots\cdots \qquad \cdot \\ c_{p1}-d_p\sum_{22}^{-1}d_1' \cdots\cdots c_{pp}-d_p\sum_{22}^{-1}d_p' \end{bmatrix} \tag{10}$$

と書ける．任意の $1 \leqq m \leqq p$ なる m に対して

$$\begin{vmatrix} b_{11} \cdots\cdots b_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{m1} \cdots\cdots b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11}-d_1\sum_{22}^{-1}d_1' \cdots\cdots c_{1m}-d_1\sum_{22}^{-1}d_m' \\ \cdot \qquad \cdots\cdots \qquad \cdot \\ c_{m1}-d_m\sum_{12}^{-1}d_1' \cdots\cdots c_{mm}-d_m\sum_{22}^{-1}d_m' \end{vmatrix}$$

$$= \left| \begin{bmatrix} c_{11} \cdots\cdots c_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} \cdots\cdots c_{mm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \textstyle\sum_{22}^{-1}[d_1' \cdots\cdots d_m'] \right| = \frac{1}{|\sum_{22}|} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \cdots\cdots c_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1} \cdots\cdots c_{mm} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{bmatrix} \\ [d_1' \cdots\cdots d_m'] & \sum_{22} \end{vmatrix}$$

しかるに最後の行列式は

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}\Sigma_{12}\\ \Sigma_{21}\Sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}A_{12}A_{13}\\ A_{21}A_{22}A_{23}\\ A_{31}A_{32}A_{33}\end{pmatrix} \tag{11}$$

の主対角小行列式で，A が正値定符号だから，正である．即ち $|\Sigma_{22}|$ は勿論正であるから

$$\begin{vmatrix}b_{11}\cdots\cdots b_{1m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{m1}\cdots\cdots b_{mm}\end{vmatrix}>0 \qquad m=1,2,\cdots\cdots,p$$

故に B は正値定符号行列である．

そこで $A-B=\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ が非負であることが示されれば lemma により われわれの定理2が成立する．しかるに定理1の証明における Laha の計算結果により

$$\begin{aligned}A-B&=\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\\ &=(A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23})Q^{-1}(A_{31}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{21})\end{aligned} \tag{12}$$

を得る．但し $Q=A_{33}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{23}$ である．

$$|Q|=|A_{33}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{23}|=\begin{vmatrix}A_{33}A_{32}\\ A_{23}A_{22}\end{vmatrix}\frac{1}{|A_{22}|}$$

で，(11) の A が正値定符号であることより Q の逆が存在しているのである．従つて $A-B$ が非負行列であることがわかり，われわれの定理2が結果する．特に等号が成立するのは $A-B=0$ 即ち $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}=A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ の時に限ることは明らかであろう．(終)

(12) 式より容易にわかるように次の系が成立する．

[定理2の系] $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}=A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ と $A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}=0$ は同等な条件である．

Laha は $\sum_{i=1}^{p}\phi_i^2=\sum_{i=1}^{p}\rho_i^2$ が成立するための必要，充分条件として，“x_3 と x_1 との，x_2 の影響を除いた時の偏正準相関係数，即ち $x_3-x_2B_{32}$ と $x_1-x_2B_{12}$ (B_{32}, B_{12} は回帰係数)，の間の正準相関係数が全部0である” を得ている．偏正準相関係数の自乗は，$p\leqq r$ として，行列方程式

$$\begin{aligned}&|(A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23})(A_{33}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{23})^{-1}(A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23})'\\ &\quad-\Psi^2(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})|=0\end{aligned}$$

即ち (12) より

$$|(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}-A_{12}A^{-1}{}_{22}A_{21})-\Psi^2(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})|=0 \tag{13}$$

の根である．即ちわれわれは仮設 H: $\sum_{i=1}^{p}\phi_i^2=\sum_{i=1}^{p}\rho_i^2$ の検定を x_1 と x_3 の，x_2 の影響を除いた偏正準相関係数を調べることにより行うことができる．

$\sum_{i=1}^{p}\phi_i^2=\sum_{i=1}^{p}\rho_i^2$ が成立する条件と $\prod_{i=1}^{p}(1-\phi_i^2)=\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2)$ の成立する条件とは同じく $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}=A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ であるから，後者についても同じ議論ができる．定理2の系により条件を $A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}=0$ とする時には次のようになる．

[定理 3] $\prod_{i=1}^{p}(1-\phi_i^2)=\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2)$ が成立するための必要，充分条件は，x_1 から x_2 の影響を除いたものと x_3 との間の正準相関係数が全部0であることである．

[証明] $y_1=x_1-x_2B^*_{12}$ とおく．B^*_{12} は x_1 の x_2 えの回帰における係数で $B^*_{12}=A_{22}^{-1}A_{21}$ である．y_1 と x_3 の間の正準相関係数の自乗は，$r\leqq p$ の場合

$$|\Sigma_{31}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{13}-\theta^2A_{33}|=0 \tag{14}$$

の根である．但し $\Sigma_{11}\equiv E(y_1'y_1)$ であり

$$\sum_{13} = E(y_1'x_3) = E[(x_1 - x_2B^*_{12})'x_3]$$
$$= A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}$$

であるから (14) は

$$|(A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23})'\sum_{11}^{-1}(A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) - \theta^2 A_{33}| = 0 \tag{15}$$

となる．これより (15) のすべての根が 0 であるのは，$A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} = 0$ の時に限ることがわかる．故に定理 2 及びその系より定理 3 を得る．

$r > p$ の場合には (14) は

$$|\sum_{13}A_{33}^{-1}\sum_{31} - \theta^2\sum_{11}| = 0 \tag{16}$$

となるが議論は全く同じである．(終)

併しながら定理 3 における正準相関係は "x_3 の効果が無い" という帰無仮説の下では Laha のものより計算が楽であるが，実際的ではない．何故ならば実際問題に於いては，帰無仮説の検定よりも x_3 の効果の程度を知ることの方がより重要であるからである．

$H = \sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ と $G = A_{13} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}$ とは $H = 0$, $G = 0$ の場合以外 x_3 の効果を測る時の条件として同等ではない．そして (9) と lemma より H は x_3 の効果をみるのに適当な行列であることがわかるであろう．事実 §4 で示すように H を使つた偏正準相関係数の自乗の満す方程式 (13) は回帰論と密接な関係を持つている．

§3. x_3 が x_1 に追加された場合

x_3 が x_1 に追加された場合には正準相関係数の個数が変る．$p + r \leqq q$ の場合には $p + r$ 個，$p + r \geqq q$ の場合には q 個である．x_1^* と x_2 の間の正準相関係数は

$$\sum_{21} \equiv [A_{21} \vdots A_{23}], \qquad \sum_{11} \equiv \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix}$$

とおけば

$$p + r \geqq q \text{ の時,} \qquad |\phi^2 A_{22} - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}| = 0 \tag{17}$$
$$p + r \leqq q \text{ の時,} \qquad |\phi^2 \sum_{11} - \sum_{12}A_{22}^{-1}\sum_{21}| = 0 \tag{18}$$

の根の平方根として定義される．先づ $p + r \leqq q$ の場合についてみると

$$\prod_{i=1}^{q}(1-\phi_i^2) = |A_{22}|^{-1}|A_{22} - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}|$$

$$\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2) = |A_{11}|^{-1}|A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$$
$$= |A_{11}|^{-1}|A_{22}|^{-1}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}$$

一方

$$= |A_{22}|^{-1}|A_{11}|^{-1}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{vmatrix}$$
$$= |A_{22}|^{-1}|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

であるから

$$\frac{\prod_{i=1}^{p}(1-\rho_i^2)}{\prod_{i=1}^{q}(1-\phi_i^2)} = \frac{|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|}{|A_{22} - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}|} \tag{19}$$

について前節と同様の議論ができる．

$p + r \leqq q$ の時には

$$\prod_{1=1}^{p+r}(1-\phi_i^2) = |\sum_{11}|^{-1}|\sum_{11} - \sum_{12}A_{22}^{-1}\sum_{22}|$$
$$= |A_{22}|^{-1}|A_{22} - \sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}|$$

となるから，矢張り §2 と同様のことが云える．

§4. 回帰論との関係

従属変数ベクトルを $x_1=[x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots\cdots, x_p^{(1)}]$，独立変数ベクトルを $x_2^*=[x_2 \vdots x_3]$，$x_2=[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots\cdots, x_q^{(2)}]$，$x_3=[x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \cdots\cdots, x_r^{(3)}]$ とする．従つて以下 $A_{22}=x_2'x_2$ 等と解すべきである．且つ母集団に於いて

$$E(x_1)=x_2B_{12}+x_3B_{13} \tag{21}$$

で分散・共分散行列は V であるとする．此処で x_3 が新らたに加えられた独立変数である場合には，その効果の有無を尋ねることが問題である．帰無仮設 $H; B_{13}=0$ の検定は普通，尤度比検定基準 $U=|S|/|S^*|$ を用いてなされる[3]．但し $\dfrac{1}{n}S^*$ は，標本における，仮設 H の下における V の推定行列 $\dfrac{1}{n}S$ はこの制限のない場合のものである．

さて (21) の B_{12}, B_{13} の表示を具体的に書いてみよう．

$$B=\begin{bmatrix}B_{12}\\B_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{22}&A_{23}\\A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A_{21}\\A_{31}\end{bmatrix} \tag{22}$$

であるから $\begin{bmatrix}A_{22}&A_{23}\\A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}^{-1}\equiv\begin{bmatrix}C&D\\D'&F\end{bmatrix}$ とおき

$$\begin{bmatrix}C&D\\D'&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{22}&A_{23}\\A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&O\\O&I\end{bmatrix}$$

により，C, D, F を求めて，(22) により B_{12}, B_{13} を書くと

$$B_{12}=A_{22}^{-1}A_{21}-A_{22}^{-1}A_{23}Q^{-1}(A_{31}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{21}) \tag{23}$$

$$B_{13}=Q^{-1}(A_{31}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{21}) \tag{24}$$

但し $\quad Q=A_{33}-A_{32}A^{-1}{}_{22}A_{23}$

しかるに (13) において

$$\begin{aligned}H&=\textstyle\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\\&=(A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23})Q^{-1}(A_{31}-A_{32}A_{22}^{-1}A_{21})\\&=B_{13}'QB_{13}\end{aligned}$$

なる関係を持つ．故に B_{13} が 0 であるかどうかは，x_1 と x_3 の x_2 の影響を除いた時の偏正準相関係数によつて調べることができる．斯くして (13) は

$$|B_{13}'QB_{13}-\Psi^2(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})|=0 \tag{25}$$

と書ける．

今 $B_{13}=0$ とした時の x_1 の分散・共分散行列を V^* とすれば

$$\left.\begin{aligned}V^*&=E\{(x_1-x_2B_{12})'(x_1-x_2B_{12})\}\\&=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\\B_{12}&=A_{22}^{-1}A_{21}\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

また $B_{13}\neq 0$ なる時の x_1 の分散・共分散行列 V に対しては，(23)，(24) により

$$\begin{aligned}V&=E\{(x_1-x_2B_{12}-x_3B_{13})'(x_1-x_2B_{12}-x_3B_{13})\}\\&=A_{11}-A_{12}B_{12}-A_{13}B_{13}\\&=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}+A_{12}A_{22}^{-1}A_{23}B_{13}-A_{13}B_{13}\\&=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}-(A_{13}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{23})B_{13}\\&=V^*-B_{13}'QB_{13}\end{aligned}$$

即ち

$$V=V^*-B_{13}'QB_{13} \quad \text{or} \quad V^*=V+B_{13}'QB_{13} \tag{27}$$

を得る．依つて (25) は更に

$$|B_{13}'QB_{13}-\Psi^2V^*|=0 \tag{28}$$

or

$$\left|B_{13}'QB_{13}-\frac{\Psi^2}{1-\Psi^2}V\right|=0 \tag{29}$$

となる．また V と V^* で表わせば

$$|V-(1-\Psi^2)V^*|=0 \tag{30}$$

である．故に

$$\frac{|V|}{|V^*|}=(1-\Psi_1^2)(1-\Psi_2^2)\cdots\cdots(1-\Psi_p^2) \tag{31}$$

$$tr\{V^{-1}B'_{13}QB'_{13}\}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\Psi_i^2}{1-\Psi_i^2} \tag{32}$$

なる関係を得る．以上は $p\leqq r$ の時であるが，$r\leqq p$ の時に於いても (31)，(32) の関係は成立する．但しこの場合には $p-r$ 個の Ψ_i は0である．斯くして B_{13} の即ち x_3 の x_1 に対する効果を x_1 と x_3 の x_2 の影響を取り除いた時の偏正準相関係数によつて測れることがわかるのである．

標本については，偏正準相関係数を $\theta_1^2\leqq\theta_1^2\leqq\cdots\cdots\leqq\theta_p^2$ とすれば，(31)，(32) に対応して

$$U=\frac{|S|}{|S^*|}=(1-\theta_1^2)(1-\theta_2^2)\cdots\cdots(1-\theta_p^2) \tag{33}$$

$$W=tr\{S^{-1}\hat{B}_{13}'\hat{Q}\hat{B}_{13}\}=\sum_{i=1}^{p}\frac{\theta_i^2}{1-\theta_i^2} \tag{34}$$

を得る．S,S^* は前に述べたもので U なる尤度比検定基準が偏正準相関係数 θ_i^2 を使つて (33) の如く表わされる．$\hat{B}_{13}$ は B_{13} の標本推定値で，標本の大きさを n とすれば $\hat{Q}$ は

$$\hat{Q}=\sum_{\alpha=1}^{n}x'_{3\alpha}x_{3\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{n}x'_{3\alpha}x_{2\alpha}\left(\sum_{\alpha=1}^{n}x'_{3\alpha}x_{2\alpha}\right)^{-1}\sum_{\alpha=1}^{n}x'_{2\alpha}x_{3\alpha}$$

である．$B_{13}=0$ なる null case に於ける U,W の標本分布についてはよく調べられているが，non-null case 即ち x_3 の実際の効果を評価する時の議論は未だ不充分のようである．(33)，(34) は偏正準相関係数による研究方向を示すものである．

参考文献

1) Laha, R.G., "On some problems in canonical correlations" Sankhyā, Vol. 14 (1954), pp. 61～66.
2) Rao, C. R., *Advanced Statistical methods in Biometric Research*, page 26, John Wiley and Sons, New York, (1952).
3) Wilks, S.S., *Mathematicol Statistics*, Princeton University Press. (1943).

統計数理研究所