リレー計算機による線型計算について

多 賀 保 志

(1957 年 3 月受付)

On linear computations by the automatic relay computer of the I.S.M.

Y. TAGA

We have been engaged in studies of linear computations by using the automatic relay computer which was constructed last year in the Institute of Statistical Mathematics. It is suitable for almost all sorts of computations——solving algebraic equations, differential equations, computing of statistics and linear computations etc.

In this paper, the methods and main results of linear computations are stated briefly, and at the same time the routines used in computations are added as appendix.

In computation, We used numbers of eight digits of floating point system under the restriction of the mechanism of the computor, and payed much attentions to the influences of rounding-off errors to the results of computations. In inversion of matrices, for example, We evaluated the magnitude of difference between the correct inverse matrix A^{-1} and approximate inverse matrix $\overline{A^{-1}}$ obtained as the result of computation in the following manner.

We put

error matrix $C=\overline{A^{-1}}-A^{-1}$

residual matrix $R=A\overline{A^{-1}}-I$ (I: unit matrix),

then

$$C = A^{-1}R \fallingdotseq \overline{A^{-1}}R.$$

Introducing here $\rho(A)=\sqrt{\sum_{i,j}|a_{ij}|^2}$, the norm of a matrix A.

Thus, we can evaluate the norm of the error matrix C by using the property of the norm,

$$\rho(C) \leqq \rho(\overline{A^{-1}}) \cdot \rho(R).$$

By elimination method, we obtained the followimg result in the case of inversion of a Leontief matrix (9×9),

$$\rho(C) \leqq 9 \times 10^{-7}$$

And it took 30 minutes to compute it. By conjugate gradient method or successive approximation method, magnitudes of rounding-off errors were smaller, but it took several hours to compute.

In conclusion, if a given matrix A is not singular, the elimination method is generally more useful for computation of the inverse matrix A^{-1} or solving linear systems. If A is almost singular or one of diagonal elements does vansih in the elimination process, the other methods should be accepted, Especially, if all diagonal elements of a given matrix A is far larger than the other elements, then successive approximation methods are most effective.

On the computing methods of eigen-values of a given matrix or the linear programming, we are now preparing paper about them, and shall publish them in the near future.

Institute of Statistical Mathematics

§0. 序　論

統計数理研究所に，昨年設置されたリレー式万能自動計算機*を用いて，過去数ケ月の間に様々な計算を行つてきたが，その中から線型計算に関するものを拾い上げてみよう．ただし，計算機の最終的改造を行う前のものであるから，来年度以後に計算を行う場合と多少異つてくる点はあるが，十分役に立つデータを提供できることと思う．

まず，線型計算を大別すれば，

1) ベクトル算——ベクトル和，ベクトル内積．
2) 行 列 算——行列の和と積，行列の転置，逆行列の計算．
3) 聯立一次方程式解法——消去法，共軛勾配法，逐次近似法．
4) 行列式計算および行列の固有値計算
5) 線型計画に関する計算

となる．

我々は今までに1)～3）を扱つたので，以下それらについて述べることにするが，4）及び5）についても近いうちに補足するつもりである．1)～3）の計算は，統計量の計算においても頻繁

第 1 表　組込みルーティン一覧表（線型計算のみ）

計算の種類	計算式	ルーティン番号	計算の種類	計算式	ルーティン番号
ベクトル和	$\alpha A+\beta B$	13, 14	行列の和	$\alpha M_1+\beta M_2$	19
ベクトル内積 (1)	$A \cdot B$	15, 16	行列の積	M_1+M_2	71～74
ベクトル内積 (2)	$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$	17	マトリックスの転置	M'	69～70
行列とベクトルの積	$M \cdot$	17～18	聯立一次方程式（共軛勾配法）	$Ax=K$	41～55

（以上の組込みルーティンの内容や使用法については，文献［7］参照のこと）

* この機械は，富士通信機製造株式会社の製作になるもので，FACOM 128 とほぼ同型であるが，記憶装置や組込みルーティンが若干異る．詳しくは文献［8］参照．

に用いられるので，組込みルーティンとして，機械の中に内蔵されている（第1表参照）.

ベクトル算は，線型計算において，もつとも基本的な役割を果すものであるが，それについてはここで述べるまでもない．マトリックスの和は，本質的にベクトル和と同性質のものであるから，これについても省略する．そこで，以下次の4節にわけて述べることにする.

§1. 行列の積と転置

§2. 逆行列の計算

§3. 聯立一次方程式解法

§4. 結　　語

なお，プログラム作成に当つて，統計数理研究所の高倉節子・草野美恵子・中島綾子ならびに藤原長司の諸氏の御協力を戴いた．厚く感謝する次第です.

§1. 行列の積と転置

2つの行列 $A=(a_{ij})$ と $B=(b_{jk})$ との積 $A\cdot B$ を計算するには，まず次のような2本の数値テープを用意する.

A テープ (No. 192)	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\cdots\mathfrak{A}_m$	但し $\mathfrak{A}_i=(a_{i1},\ a_{i2}\cdots\cdots,\ a_{il})$ $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$
B テープ (No. 191)	$\mathfrak{B}'_1\mathfrak{B}'_2\cdots\cdots\mathfrak{B}'_n$	$\mathfrak{B}'_k=(b_{1k},\ b_{2k},\ \cdots\cdots b_{lk})$ $k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$

すなわち，A テープは $(m,\ l)$ 行列 A の行ベクトルを順番にテープに穿孔したものであり，B テープは $(l,\ n)$ 行列 B の列ベクトルを順番にテープに穿孔し，環状にしたものである．それら2本のテープを，それぞれ数値読取機 No. 192, 191 にかけて，附表1に掲げた2本のルーティン（現在はテープ，改造後は組込みとなる）を使用すれば，次のような順序で計算が進められる.

1° ベクトル $\mathfrak{A}_i$ のよみこみ

2° n 個のベクトル内積 $\mathfrak{A}_i\cdot\mathfrak{B}'_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ の計算

3° 以上の計算を m 回繰返し終ると，最後に操作台を呼出して機械は停止する.

この方法によれば，積 $A\cdot B$ の行ベクトルが，順番にテープに穿孔されることになる．若し列ベクトルを穿孔したければ，A テープを環状にして読取機 No.191 に，B テープを No. 192 にかけてやればよい．この計算において用いられる演算は，加算・乗算・転送（穿孔を含む）の3種類で，演算回数は次の通りである.

〔加算〕 $m(nl+1)$ 回

〔乗算〕 mnl 回

〔転送〕 $m(l+3n)$ 回

以上の外に，ルーティン呼出し等のステップが若干含まれるが，加算と転送に毎回0.2秒，乗算0.5秒とみれば，大体の計算所要時間がわかる．実際の所要時間は，

（1） $m=30,\ l=n=8$ の場合に約30分

（2） $m=l=n=9$ の場合に約10分

で，推定所要時間とほぼ一致する.

場合によつては，行列 A の転置行列 A' を作る必要が起ることがある．たとえば，A^2 の計算をする場合，A の行ベクトル $\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2\cdots\cdots\mathfrak{A}_n$ を，順番に穿孔したテープを作成し，それを環状につないでおく．これを数値読取機 No. 191 にかけて，附表2のルーティンを使用すると，A の列

ベクトル $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, ……, $\mathfrak{A}_n'$ が，順番にテープに穿孔されて出てくる．これは，行列 A の表現をかえたものにすぎないともいえるが，一次元的なテープの上では，積（行）と縦（列）の区別は消滅してしまうから，A の転置行列 A' がえられたと考えた方が便利である．(すなわち，行列 A をテープ上に表現するときは，行ベクトルを順番に穿孔したものを正規の形と約束しておく)．テープ A と A' を用いて，行列の積を前と同様にして行えば，A^2 がえられることは説明するまでもない（ただし，A^2 の計算は $m=n$ の場合に限るが)．転置行列を作る過程に現われる演算は，転送 mn 回，テープ読取機のジャンプ $m(n^2-n+1)$ 回となる．転送およびジャンプとも，1 回につき 0.2 秒を要するものとして計算すれば，$m=n=10$ の場合で約 3 分 20 秒，$m=n=20$ の場合で約 27 分となる．

§2. 逆行列の計算

与えられた行列 A の逆行列 A^{-1} を求める計算は，消去法によつて行われることが多いが，手動計算機（あるいは卓上電動計算機）による場合，面倒で長たらしい計算を必要とする．したがつて，そのような方法で取扱いうる行列の次数は高々 20 次までであつた．それが *IBM* や *RR* 方式の計算穿孔機の普及につれて，20 次以上の高次行列をも扱いうるようになつた*．しかし，この方式によつても，労力と費用の点で問題があり，理論的には 100 次の行列でも扱えるのであるが，実際問題としては 30 次位までが限度であろう．しかるに，リレー計算機や電子計算機の実用化に伴い，高次逆行列の計算はかなり容易となり，記憶装置の容量を適当に増大させるならば，100 次位までの行列すらも取扱うことができるようになつた．

われわれは，9 次の Leontief 行列**の逆行列を，各種の方法によつて計算してみたが，その結果について紹介してみよう．その際，とくに注意すべきことは計算の速度および精度であろう***．とくに，高次の行列を扱う場合，消去法によると，かなり精度が落ちてしまうおそれがあるので，共軛勾配法も採用してみた．

まず，実際に使用した計算方法につき，簡単に述べてみよう．

［i］消去法

A を与えられた n 次の行列，I を単位行列として次のような $2n$ 次の複合行列を考える．

$$\begin{pmatrix} A & I \\ -I & O \end{pmatrix} \qquad (1)$$

（1）を逐次変形して，行列 A の対角線より下の要素を O となるようにすれば，

$$\begin{pmatrix} C & D \\ O & A^{-1} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

となつて，行列 A の逆行列 A^{-1} がえられることはよく知られている (Verzuh の方法****)．ただし，初めから $2n$ 次の行列（1）をテープに穿孔しておくことは，時間的にも経費の点からいつても得策でない．そこで次のような方法を採用した．

行列 A の要素を，第 1 行より順番に第 n 行までテープに穿孔する．すなわち

$$\boxed{\mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots\cdots,\ \mathfrak{A}_n}$$

ただし，　$\mathfrak{A}_i=(a_{i1}, a_{i2}\cdots\cdots,\ a_{in}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$

まず，第 1 行の第 1 要素 a_{11} の逆数 a_{11}^{-1} を作つて，適当な記憶装置に送り込み，第 2 要素以下はそのまま記憶装置に入れる．次にベクトル加算を用いて，$a_{11}^{-1}(a_{i2},\cdots\cdots,\ a_{in})+0\cdot(a_{i2}\cdots\cdots a_{in})$

---

* 文献〔7〕参照
** Leontief 行列については文献〔7〕をみよ．
*** 逆行列の精度については文献〔4〕にくわしい．
**** 文献〔3〕参照

を計算し，

$$a_{12}',\ a_{13}',\cdots\cdots,\ a_{1n}',\ a_{11}^{-1}\quad (a_{1j}'=a_{1j}\cdot a_{11}^{-1})$$

となるように要素を配列し，これをn次元ベクトル$\mathfrak{A}_1'$と考える．消去法によつて，第2行以下の行ベクトルの第1要素を0ならしめるように変形して行きたいのだが，それには次のような操作をすればよい．

第i行の行ベクトル$\mathfrak{A}_i$の第1要素a_{i1}の符号をかえて，適当な記憶装置(印刷記憶)に入れ，残りの$n-1$個の要素およびその最後に0を追加したベクトル$\mathfrak{A}^0{}_i$を，やはり記憶装置に送り込む．そして，先に述べたベクトル$\mathfrak{A}_1'$との間で，次のようなベクトル加算を行う（組込みルーティンによつて）．

$$\mathfrak{A}^0{}_i+(-a_{i1})\,\mathfrak{A}_1'\equiv\mathfrak{A}_i'(i=2,\ 3,\cdots\cdots,\ n)$$

その結果を，逐次穿孔機によつてテープに穿孔し，それらがすべて終つた後，同じテープの最後にベクトル$\mathfrak{A}_1'$をつけ加える．

以上の操作によつて，行列（1）の第2行以下の第1要素をすべて消し去つたことになり，その結果として，次のような行列をテープに打出したことになる．

$$\mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{A}_3',\cdots\cdots,\ \mathfrak{A}_n',\ \mathfrak{A}_1'$$

くわしくかけば，

$$\left(\begin{array}{ccccc:c|c}
1 & a_{12}' & a_{13}' & \cdots\cdots & a_{1n}' & a_{11}^{-1} & \overbrace{0\ 0\cdots\cdots 0}^{n-1} \\
0 & a_{22}' & a_{22}' & \cdots\cdots & a_{2n}' & a_2',{}_{n+1} & 1\ 0\cdots\cdots 0 \\
0 & a_{32}' & a_{33}' & \cdots\cdots & a_{3n}' & a_3',{}_{n+1} & 0\ 1\cdots\cdots 0 \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
0 & a_{n2}' & a_{n3}' & \cdots\cdots & a_{nn}' & a_n',{}_{n+1} & 0\ 0\cdots\cdots 1 \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
0 & a_{12}' & a_{13}' & \cdots\cdots & a_{1n}' & a_{11}^{-1} & 0\ 0\cdots\cdots 0 \\
0 & -1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\ 0\cdots\cdots 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0\ 0\cdots\cdots 0 \\
\cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -1 & 0 & 0\ 0\cdots\cdots 0
\end{array}\right) \qquad (3)$$

なる複合行列の中で，$\boxed{}$枠で囲んだ部分をテープに穿孔したことになる．かくして，第2段階として，行列（3）の第2列の要素（対角線より下のみ）を消去することになるのであるが，これは第1段の計算によつてテープに打出されている行列

$$\mathfrak{A}_2',\ \mathfrak{A}_3',\ \cdots\cdots,\ \mathfrak{A}_n',\ \mathfrak{A}_1'$$

を用いて，全く同じ操作を繰返せばよい．

以下第3列，第4列．‥‥，第n列の消去を行うことによつて，行列（2），従つて逆行列A^{-1}が，テープに穿孔された形で，えられることになる．その詳細な過程は，〔附表3〕に掲げたルーティンを参照されたい．

[ii]　分 割 法

与えられたn次の正方行列Aを，次のような4つの小行列に分割する，

$$A=\left(\begin{array}{c:c}A_{11} & A_{12}\\ \hdashline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)\qquad (4)$$

ここに，小行列A_{ij}はそれぞれ(n_in_j)行列とするすると，逆行A^{-1}列は次のような手順で求められることはよく知られている，

1°　A_{11}^{-1}の計算（これは上述の消去法に従つてやる）

2°　$X = A_{11}{}^{-1}A_{12},\ \ Y = A_{21}A_{11}{}^{-1},\ \ \theta = A_{22} - YA_{12}$

3°　$B_{12} = -X\theta^{-1},\ \ B_{11} = A_{11}{}^{-1} + X\theta^{-1}Y$

4°　$B_{22} = \theta^{-1},\ \ B_{21} = -\theta^{-1}Y$

これで逆行列 A^{-1} は，次のような形で求められたことになる：

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c:c} A^{-1}{}_{11} + X\theta^{-1}Y & -X\theta^{-1} \\ \hdashline -\theta^{-1}Y & \theta^{-1} \end{array}\right) \tag{5}$$

方法的には，[i] で述べた消去法による行列の逆転を基本とし，それに行列の加減算・乗算を加味したものであるから，本質的には [i] と同じものである．ただ，元の行列を分割して計算するから，時間的にはかなり短縮される，しかし，その一方においては，計算の途中でテープを掛けかえる操作が必要となるので，その点がかなりわずらわしく，操作上のミスを誘発し易いことが欠点であろう．これについてのルーティンは省略する．

[iii]　共軛勾配法

聯立方程式

$$AX = K \tag{6}$$

但し　$A = (a_{ij}),\ i,\ j = 1,\ 2, \cdots\cdots,\ n$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$$

が与えられたとき，一種の逐次近似によつてこれをとく方法である．それをリレー計算機にのせるには，次のようなルーティンを作ればよい（ただし，A は対称でかつ正値定符号とする）．

$$p_0 = r_0 = K - AX_0 \quad (X_0 \text{ は任意}) \tag{7}$$

$$a_i = \frac{|r_i|^2}{(p_i,\ Ap_i)} \tag{8}$$

$$X_{i+1} = X_i + a_i p_i \tag{9}$$

$$r_{i+1} = r_i - a_i A p_i \tag{10}$$

$$b_i = \frac{|r_{i+1}|^2}{|r_i|_2} \tag{11}$$

$$p_{i+1} = r_{i+1} + b_i p_i \tag{12}$$

ただし，$i = 1,\ 2. \cdots\cdots,\ m\ (\leqq n)$

この中，(7) は (8)～(12) に対する初期条件を与えるものであり，$X_0 = 0$ としてもよい．p_i は第 i 近似解 X_i に加うべき方向ベクトル，r_i は X_i に対する残差ベクトル $K - AX_i$ を表わす．実際には，(7)～(12) に対応する操作を，3 種類の線型演算

1°　ベクトル内積

2°　ベクトル和（差）

3°　マトリックスとベクトルの積

に分解して，テープ・ルーティンにしてもよい．この場合に要する記憶装置の個数は，$4n+5$ である．

A が非対称で，かつ特異でなければ，方程式を次のように変形する：

$$A^*AX = A^*K \tag{6}$$

但し A^* は A の転置行列とする．

そうした上で，上の (7)，(8)，(11)，(12) 式を次のようにかえておく：

$$p_0 = A^* r_0,\ \ r_0 = K - AX_0 \tag{7'}$$

$$a_i = \frac{|A^* r_i|^2}{|Ap_i|^2} \tag{8'}$$

$$b_i = \frac{|A^* r_{i+1}|^2}{|A^* r_i|^2} \tag{11'}$$

$$p_{i+1} = A^* r_{i+1} + b_i p_i \tag{12'}$$

なお (7′)~(12′) に対応するルーティンの詳細については，附表4を参照されたい．

対称行列 A の逆行列 A^{-1} を求めるには，

$$A^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{p_{ij}\, p_{ik}}{(p_i, Ap_i)} \right) \tag{13}$$

で容易であるが，非対称の場合はやや複雑となり，

$$A^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(Ap_i)_j}{|Ap_i|^2} p_i \right) \tag{13'}$$

ただし，
$$(Ap_i)_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ik}$$

として求められる．実際の計算においては，上の (13)，(13′) は次のような行列算として行うのがよい：

〔対称の場合〕
$$A^{-1} = P'P \tag{14}$$

ただし
$$P = \left(\frac{p_{ij}}{\sqrt{(p_i, Ap_i)}} \right)$$

P' は P の転置行列

〔非対称の場合〕
$$A^{-1} = (AP', P)' \tag{15}$$

ただし
$$P = \left(\frac{p_{ij}}{|Ap_i|} \right)$$

p' は p の転置行列

として求められる.*

[iv] 逐次近似法 (1)

これは A まずの近似逆行列 C_0 が何等かの方法でえられたならば，それを出発点として，逐次

---

* 〔共軛勾配法についての註〕

n 次元空間において，与えられたベクトル p_0, p_1, p_2, ････が対称かつ非特異な行列 A に関して，次のような性質をもつとき，これらのベクトルは互に共軛 (mutually conjngate) であるという：

$$(p_i,\ Ap_j) = 0,\ (i \neq j).$$

さて，m 個のベクトル $p_0 p_1 \cdots\cdots p_{m-1}$ が互に共軛とすれば，それらは互に線型独立であることは容易に証明されるから，方程式 $Ax=K$ の解ベクトル h は次のようにして表わされる：

誤差ベクトル $y_0=k-x_0$ が，はじめて p_0, p_1, ……p_m によって張られる部分空間の中に入ったとすると，$m \leqq n$ である (y_0 は n 次元ベクトルで，かつ p_0, p_1, ……, p_m は互に線型独立だから)．すなわち，

$$y_0 = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \cdots\cdots + \alpha_{m-1} p_{m-1}$$

とかける．さらに

$$\begin{aligned} r_0 &= K - Ax_0 \\ &= A(h - x_0) \\ &= \alpha_0 Ap_0 + \alpha_1 Ap_1 + \cdots\cdots + \alpha_{m-1} Ap_{m-1} \end{aligned}$$

とかけるから，p_{i1}, ……p_{m-1} が互に共軛であることを利用すると，

$(p_i,\ r_0) = \alpha_i(p_i,\ Ap_i)$ 即ち $\alpha_i \dfrac{(p_i, r_0)}{(p_i,\ Ap_i)} \equiv a_i$ となる．したがつて，

$$h = x_0 + a_0 p_0 + a_1 p_1 + \cdots\cdots + a_{m-1} p_{m-1} \equiv x_m$$

として，解ベクトルが求められることがわかる．さらに，共軛勾配法においては．

$$(p_i,\ r_0) = (p_i,\ r_i) = |r_i|^2$$

なることが証明されるから，

$$a_i = \frac{|r_i|^2}{(p_i,\ Ap_i)}$$

であることがわかる．よって，(8)，(9) 式がえられたことになる．(10) 式は (9) 式より導かれる．詳細は，文献 [5] を参照されたい．

A の逆行列に近似させてゆく方法である：

$$I-AC_i=D_i \tag{15}$$

$$C_{i+1}=C_i+C_iD_i \tag{16}$$

この (15), (16) 式に対応するルーティンは，極めて簡単であるが，実際には1段階毎にハンドの操作が入りしたがつてかなり計算時間を必要とする．

しかし，対角線上の要素が，他の要素に比してかなり大きい場合，

$$C_0=(a_{ij}{}^{-1}\delta_{ij}) \tag{17}$$

(ただし，δ_{ij} はクロネッカーの記号）として，第0近似が求められるから，比較的利用し易い．これについてのルーティンは省略しておく．収斂に必要な回数は4回であつた．

[v] 逐次近似法 (2)

これはレオンチェフ行列の逆転によく用いられる方法であるが，やはり対角線の要素が他の要素に比してかなり大きいとき，極めて有効であろう．レオンチェフ行列では，Aの各要素がすべて正で，しかも対角線上の要素は1に近く，その他の要素は1にくらべて極めて小さい場合が多い．その時，$I-A$ の逆行列 $(I-A)^{-1}$ を求めるわけであるが，よく知られているように，

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3\cdots\cdots+A^n+\cdots\cdot \tag{18}$$

または

$$(I-A)^{-1}=(I+A)\,(I+A^2)\,(I+A^4)\cdots(I+A^{2m})\cdots\cdot \tag{19}$$

のような形に展開される．(18), (19) とも同じ結果がえられるが，(19) の方が収斂が早いことは明かである．われわれは，(19) に従つて計算したが，$m=4$ で実用には差支えない精度をもつ結果がえられ，$m=8$ として十分精密な結果がえられた．なお，この計算も今まで述べたものと本質的に異なるものは含まないので，ルーティンは省略しておく．(A^{16} まで計算すると，各要素の絶対値は 10^{-8} より小さくなつた)．

以上述べた5種類の方法によつて，第2表に掲げた9次のレオンチェフ行列の逆行列を求めた．どの方法による結果も似たものだから，[i]消去法によつて求めた逆行列を第3表にのせておく．

次に，このようにして求めた逆行列の精度について考えてみよう．与えられた行列Aの逆行列を A^{-1}（理論的に正確なもの）で表わし，実際に計算して求められた近似逆行列を $\overline{A^{-1}}$ で表わしておく．この両者の差 $C=\overline{A^{-1}}-A^{-1}$ が，誤差行列を表わすことになる．両辺にAをかけると，

$$AC=A\overline{A^{-1}}-AA^{-1}=A\overline{A^{-1}}-I$$

となり，右辺の $A\overline{A^{-1}}-I$ が，いわゆる residual (残差) 行列となるから，これを R で表わすことにする（このRは実際に計算して求められる）．

すると，$AC=R$ であるから，これをCについてとくと，

$$C=A^{-1}R$$

となる．しかし，A^{-1} は一般に正確に求められないから，$A^{-1}=\overline{A^{-1}}-C$ なる関係を用いて，

$$\begin{aligned}C&=(\overline{A^{-1}}-C)R\\&=\overline{A^{-1}}R-CR\end{aligned}$$

となる．CおよびRの各要素の絶対値は，一般に小さいから，CR の各要素は高次の無限小と考えられる．したがつて，その項を省略すると，

$$C\fallingdotseq\overline{A^{-1}}R$$

なる近似式がえられる，そこで，行列Aのノルム $\rho(A)$ を適当に定義しておくと，一般に，2つの行列 A, B の積 AB のノルム $\rho(AB)$について次の不等式が成立つことはよく知られている：

$$\rho(AB)\leqq\rho(A)\cdot\rho(B)$$

第 2 表　行 列 A

0.90597740	−0.027705346	−0.017663818	−0.10363565	$-0.0^{2}40084885$	$-0.0^{2}6485926$	0	$-0.0^{2}60887513$	−0.079834111
$-0.0^{3}6439904$	0.98109518	−0.041405508	−0.033511164	$-0.0^{3}4715869$	−0.041769361	−0.31299860	$-0.0^{2}16511868$	$-0.0^{2}10368066$
$-0.0^{2}53861015$	$-0.0^{2}52151239$	0.99468186	$-0.0^{2}52558783$	$-0.0^{2}90780476$	−0.017511999	−0.037058153	−0.013725490	0
−0.084772554	−0.12157758	−0.39240266	0.60403082	−0.033246876	−0.13270204	−0.027936146	−0.063880289	−0.014515293
−0.030794450	−0.018252934	−0.040835708	−0.041750642	0.99292620	−0.011544948	−0.014253136	−0.010526316	−0.017107310
−0.018265910	−0.046936115	−0.060778727	−0.035289469	−0.023579345	0.98274744	−0.064994299	−0.014654283	−0.22161742
$-0.0^{3}64399040$	−0.029986962	$-0.0^{3}5698006$	−0.017051966	−0.010374912	$-0.0^{2}89505772$	0.98745724	−0.011867905	−0.012441680
−0.019495346	−0.019556715	−0.011206078	−0.014048607	−0.026644659	−0.072772085	−0.024515393	0.93415893	−0.11612234
$-0.0^{2}21076049$	−0.12809648	−0.039126306	−0.018059672	$-0.0^{2}53053525$	−0.023349332	−0.11858609	−0.076883385	1

* $0.0^{2}5$ は 0.005 を示す．他の表に就ても同様．

第 3 表　逆 行 列 $\overline{A^{-1}}$（消去法）

1.1262259	0.076401544	0.11259103	0.20723444	0.015491804	0.039638180	0.050768672	0.033513625	0.10657139
0.010457044	0.10462304	0.078899078	0.075490683	$0.0^{2}93702897$	0.061009651	0.34399794	0.015546864	0.022781689
$0.0^{2}87244746$	0.011684811	1.0143440	0.015037686	0.011354931	0.022680436	0.045348983	0.017791778	$0.0^{2}287777746$
0.17937651	0.26443549	0.72800190	1.7416489	0.079109295	0.27619648	0.19811868	0.14923277	0.12223256
0.044016888	0.038143775	0.080630496	0.084623448	1.0127515	0.029163048	0.038400985	0.022286782	0.031636192
0.032873841	0.10009096	0.11492685	0.087900543	0.033029373	1.0466433	0.13831457	0.046693193	0.24366654
$0.0^{2}54420552$	0.040283159	0.019000204	0.035450028	0.013202537	0.018203261	1.0314455	0.018008648	0.020174936
0.031900289	0.056334452	0.047846744	0.049010785	0.035333385	0.095323118	0.073210547	1.0902229	0.15255637
0.011393049	0.15105988	0.072222019	0.052622209	0.013532321	0.047854641	0.18090127	0.092617451	1.0256726

この関係を利用すると，

$$\rho(C) \fallingdotseq \rho(\overline{A^{-1}}R) \leqq \rho(\overline{A^{-1}}) \cdot \rho(R)$$

となり，右辺は実際に計算して求められるから，誤差行列Cのノルムの上限が押えられることになる．したがつて，これをもつて逆行列計算の精度の目安とすることにする．

さて，行列 $A=(a_{ij})$ のノルムの定義にはいろいろな方法があるが，ここでは一応次の３つをとりあげておく．

$$\rho_1(A) = \max_{1\leqq i\leqq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\rho_2(A) = \max_{1\leqq j\leqq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\rho_3(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

正方行列（$m=n$）の場合，上の３者はほぼ同じような意味をもつ．以上述べたノルムを用いて，逆行列の精度を求めて一覧表にまとめてみると第４表のようになる．なお，参考のため，20 次の相関行列の逆を計算したときのデータもつけ加えておく（相関行列の逆行列が求められれば，重相関係数・偏相関係数および回帰方程式は容易に出る）．

第 4 表　逆行列の精度と計算所要時間

	計　算　方	Rの要素の最大絶対値	$\rho(R)$			$\rho(\overline{A^{-1}})\cdot\rho(R)$			所要時間
			ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3	
9次のレオンチェフ行列	[i] 消去法	$0.0^{7}50$	$0.0^{6}22$	$0.0^{6}21$	$0.0^{6}26$	$0.0^{6}82$	$0.0^{6}50$	$0.0^{6}92$	35 分
	[ii] 法分割法	$0.0^{7}44$	$0.0^{6}15$	$0.0^{6}17$	$0.0^{6}19$	$0.0^{6}56$	$0.0^{6}40$	$0.0^{6}69$	20 分
	[iii] 共軛勾配法	$0.0^{7}41$	$0.0^{6}19$	$0.0^{6}19$	$0.0^{6}29$	$0.0^{6}72$	$0.0^{6}45$	$0.0^{5}10$	44×9＝360分
	[iv] 逐次近似法（1）	$0.0^{6}20$	$0.0^{6}24$	$0.0^{6}23$	$0.0^{6}25$	$0.0^{6}91$	$0.0^{6}55$	$0.0^{6}89$	60×4＝240分
	[v] 逐次近似法（2）	$0.0^{6}52$	$0.0^{6}78$	$0.0^{6}54$	$0.0^{6}62$	$0.0^{5}29$	$0.0^{6}13$	$0.0^{5}23$	240 分
20 次の相関行列（消去法）		$0.0^{6}49$	$0.0^{1}36$	$0.0^{4}36$	$0.0^{5}44$	$0.0^{2}11$	$0.0^{2}11$	$0.0^{8}10$	340 分

さて，９次のレオンチェフ行列を，５種類の方法でといた結果を比較してみると，精度の点ではどの方法も似たり寄つたりである．しかし，もつと性質の違う行列を扱う場合には，事情が異つてくることも考えられる（たとえば，元の行列が特異に近いときとか，消去の途中で対角線上に０に近い要素が現われるときなど）．そういう場合，[iii] の共軛勾配法や [iv]の逐次近似法（1）が有効であろう．しかし，精度の点については，理論的にそれらの長短を割り切ることは難しいから，各種のケースに当つてみて，帰納的に結論を出すのが適当であろう（消去法は広い意味で一種の共軛勾配法に含まれることを注意しておく）．

次に，所要時間（準備の時間を除く計算機の実働時間）と計算過程に必要な手間（たとえばテープのかけかえなど）をを考えてみる．所要時間からみると，分割法が 20 分で最短であり，消去法の 35 分がこれに次ぎ，他はいずれも数時間かかつている．しかし，分割法は計算途中でテープをかけかえる手間が入り，操作ミスを誘発し易い．したがつて，一般には消去法を採用するのが望ましく，記憶装置が不足するような場合に，分割法を用いるのがよい．また，共軛勾配法は計算精度を確かめる必要のある場合に用いるとよく，組込ルーティンを使用すれば，所要時間も半分近くに短縮される見込みであるから，十分利用価値はあると思う．逐次近似法（1），（2）は時間も手間もかかるから，それほど実用価値はあるまい．ただ，対角要素がその他の要素に比して十分大きいときは，収斂が比較的早くなるから，使いものになる（近似の回数が 3～5 回位のとき）．

§3. 聯立一次方程式解法

逆行列の計算の場合と同じく，次の3種類の方法が考えられる.

［i］消去法

［ii］共軛勾配法

［iii］逐次近似法

共軛勾配法については，前節でふれたからここでは述べない．消去法は，逆行列の計算を多少かえてやればよい．つまり，係数行列 A，単位行列 I，常数ベクトル K を用いて，次のような複合行列を作り，前と同様に変形してゆけば，解ベクトル H がえられる：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{n} & \overbrace{}^{i} \end{array} \\ \begin{array}{c} n\{ \\ n\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} A & K \\ \hdashline -I & 0 \end{array}\right) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{c:c} C & D \\ \hdashline 0 & H \end{array}\right)$$

これに対応するルーティンも，ほぼ前と同様でよいが，各段階毎にえられる行列の行数は一定（n）であるが，列数が1列づつ減つてゆき，最終段階で1列だけとなり，これが解ベクトル H となるわけである．したがつて，その点に注意さえすれば，プログラミングは容易であろう．

逐次近似法は，対角要素が他に比べて十分大きいときしか利用できないが*，一応そのルーティンを〔附表5〕に掲げておく．

計算の精度については，ほぼ逆行列の場合と同じと考えて差支えなかろう．計算所要時間は，［i］～［iii］のどの方法によつても，20 元の場合約3時間であつた．

§4. 結　語

線型計算は，各種の統計計算に頻繁にあらわれるものであり，物理学・工学等の分野でも応用範囲は広く，その意味で今後もこの種の計算法の研究を続けてゆくつもりである．とくに，産業聯関にもとづく投入産出分析においては，30 次以上のレオンチェフ行列の逆を求める計算が必要となる．これを消去法でとくとして，計算に必要な時間・勞力・費用をできる限り小さく押え，一方計算の精度をなるべくよく保つような工夫が大切であろう．たとえば，20 次の逆行列が約 6 時間で計算できるのだから，50 次の場合にはその 6～8 倍かかるものとして，約50時間となる．このように，時間的にみれば，60 次までの逆行列（または60元までの聯立一次方程式の解）を求めることはできることになるが（記憶装置が 120 個に増加した場合），結果としてえられる逆行列または聯立方程式の解の精度について，はつきりした見通しを立てることは難しい**．与えられた行列の性質によつて，計算の精度は大きく左右される可能性が強いからである．したがつて，行列の種類をその性質によつて分類し，その種類に応じた精度の評価方法を考えることも必要であろう．また8桁で計算していたものを，場合によつては，16 桁にして計算してみることも考えられる．ただし，与えられたデータが非常に精密なものでなければ意味はないが．その外，消去法によらない，有力な計算法の研究も考える必要もあろう．

近い将来，行列の特有根や線型計画法等について，この稿の続篇を発表する予定である．

なお，付表 1～5 のルーティンのプログラミング担当者は，次の通りである．

〔付表 1〕 行列の積用ルーティン……………………多賀保志

〔付表 2〕 行列転置用ルーティン……………………藤原長司

〔付表 3〕 逆行列計算用ルーティン(消去法)…………高倉節子

〔付表 4〕 逆行列
連立一次方程式 ｝用ルーティン(共軛勾配法)‥多賀保志

---

* $\sum_{j\neq i}|a_{ij}|<a_{ii}$ が収斂の十分条件である．

** 文献［4］によれば，数学的に精度を論ずることはできる．

〔付表 5〕 聯立方程式用ルーティン(逐次近似法)・・・・・・・・多賀保志

付表としては掲げなかつたが，逆行列の計算用ルーティンが3つある：

逆行列用ルーティン
- [ii] 分割法・・・・・・・・・中島綾子
- [iv] 逐次近似法(1)・・・・草野美恵子
- [v] 逐次近似法(2)・・・・藤原長司

〔参　考　文　献〕

[1] P. S. Dweyer, "Linear Compntations", Wiley, 1951.

[2] E. V. Hankam, "Linear equations and matrix inversion," IBM Technical Newsletter, No. 3, Dec.

[3] F. M. Verznh, "The solution of simultaneons linear equations with the aid of the 602 calculating punch," Tables and Other Aids to Computation, vol. 3, No. 27, July 1949.

[4] J. Von Neumann and Goldstein, "Numerical inverting of matrices of high order," Bulletin of the American mathematical Society, vol. 53, 1947, pp. 1021–1099.

[5] M. R. Hestenes and E. Stiefel, "method of conjugate gradients for solving linear systems," NBS Report 1659, March 10, 1952.

[6] 森口繁一, "Leontief" 行列の逆転について,,, P.C. 資料 No. 17, 1955.

[7] 鴨志田　清, "602A 計算穿孔機による行列算", 第2回 p.c. セミナーテキスト，1956.

[8] "Fuji――電気計算機特集号", vol. 6, No.4, 1955, 富士通信機製造株式会社.

(統計数理研究所)

〔附表 1〕 行列の積用ルーティン

計算式　$A(m, n) \cdot B(n, l) = C(m, l)$

初期条件
- \# 0 : 0.0000 $\boxed{m+1}$ × 17^7
- \# 183 : 0.0000 $\boxed{l+1}$ × 10^7
- \# 180 : 0.0000 $\boxed{n}$ × 10^7
- \# 195 : n
- $Q_1 = Q_2 = Q_3 = -1$

input
- 191 $\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \cdots\cdots \mathfrak{A}_m$
- 192 $\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2' \cdots\cdots \mathfrak{B}_l'$

output
- 191 $C_1'\ C_2' \cdots\cdots C_l'$

R-1(endless)

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 3	D 3	備考
1	180	0	188	0	0	0	0	0	0	
2	195	0	196	0	0	0	0	0	0	
3	195	221	197	8	0	1	0	0	0	
4	1	92	0	13	1	2	1	1	1	$\mathfrak{B}_j'$ のよみこみ
5	183	221	183	11	0	0	0	0	0	
6	0	0	0	17	1	1	1	2	0	R-92 or R-0 呼出し
7	180	0	188	0	0	0	0	0	0	
8	0	0	189	0	0	0	0	0	0	
9	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
10	1	17	2	13	1	2	1	1	1	
11	0	0	0	14	1	1	1	0	0	R_{17} 呼出し

R-17

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 3	D 3	備考
1	210	0	191	0	0	0	0	0	0	$\mathfrak{A}_i\mathfrak{B}_j'$ のパンチ
2	195	0	196	0	0	0	0	0	0	
3	180	0	188	0	0	0	0	0	0	
4	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
5	95	0	0	14	0	2	0	0	0	R_{95} 呼出し

〔附表 2〕 行列の転置用ルーティン

初期条件

※ 175 : 0
※ 177 : 2
※ 183 : 0.0000 $\boxed{m}$ × 10^7
※ 184 : 0.0000 $\boxed{n}$ × 10^7
※ 188 : m
※ 184 : n

input

191 $\boxed{\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \cdots\cdots \mathfrak{A}_m}$

output

191 $\boxed{\mathfrak{A}_1'\ \mathfrak{A}_2' \cdots\cdots \mathfrak{A}_n'}$

R-1 (endless)

ステップ	*A*	*B*	*C*	*O* 1	*O* 2	*O* 3	*D* 1	*D* 2	*D* 3	備考
1	191	0	192	0	0	0	0	0	0	
2	184	221	190	9	0	1	0	0	0	
3	0	0	0	24	1	1	0	0	0	
4	1	96	0	15	0	1	0	0	0	

R−2 (endless)

ステップ	*A*	*B*	*C*	*O* 1	*O* 2	*O* 3	*D* 1	*D* 2	*D* 3	備考
1	0	0	1	24	0	1	0	0	0	
2	183	0	188	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	14	1	2	1	0	0	

〔附表 3〕 逆行列計算用ルーティン (消去法)

初期条件

※ 183 : 0.0000 $\boxed{n-1}$ × 10^7
※ 0 : 0.0000 $\boxed{l}$ × 10^7
$Q_1 = Q_2 = Q_3 = -1$

input

191 $\boxed{\mathfrak{A}_1\ \mathfrak{A}_2 \cdots\cdots \mathfrak{A}_n}$

R−1 (endless)

ステップ	*A*	*B*	*C*	*O* 1	*O* 2	*O* 3	*D* 1	*D* 2	*D* 3	備考
1	221	191	181	4	0	0	0	0	0	
2	220	0	182	0	0	0	0	0	0	
3	183	0	188	0	0	0	0	0	0	$\mathfrak{A}_1^\circ$ の送りこみ
4	183	0	197	0	0	0	0	0	0	
5	91	0	0	14	0	0	0	0	0	
6	183	0	188	0	0	0	0	0	0	$\mathfrak{A}_1'$ の計算
7	183	0	195	0	0	0	0	0	0	
8	183	0	196	0	0	0	0	0	0	
9	183	0	197	0	0	0	0	0	0	
10	14	0	0	14	0	0	0	0	0	
11	183	221	0	8	1	1	0	0	0	
12	181	0	119	0	0	0	0	0	0	

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 2	D 3	
13	183	221	195	8	0	1	0	0	0	
14	183	0	188	0	0	0	0	0	0	$\mathfrak{A}_1'$ のパンチ
15	90	0	0	14	0	0	0	0	0	
16	119	0	191	0	0	0	0	0	0	
17	0	0	190	0	0	0	0	0	0	穿孔機 (191) の l 回空ステップ
18	0	0	0	25	1	1	0	0	0	
19	0	0	190	0	0	0	0	0	0	読取機 (191) の l 回空ステップ
20	0	0	0	24	1	1	0	0	0	

$R-2$ (endless)

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 2	D 3	備考
1	221	0	181	0	0	0	0	0	0	
2	191	0	182	0	0	1	0	0	0	
3	183	183	127	8	0	1	0	0	0	
4	183	0	188	0	0	0	0	0	0	$\mathfrak{A}_i^\circ$ の送り込み
5	91	0	0	14	0	0	0	0	0	
6	183	0	195	0	0	0	0	0	0	
7	183	0	197	0	0	0	0	0	0	
8	183	183	196	8	0	1	0	0	0	$\mathfrak{A}_i'=\mathfrak{A}_i^\circ-a_{i1}\,\mathfrak{A}_1'$ の計算
9	183	0	188	0	0	0	0	0	0	
10	14	0	0	14	0	0	0	0	0	
11	183	183	196	8	0	1	0	0	0	
12	196	221	195	8	0	1	0	0	0	
13	183	0	188	0	0	0	0	0	0	$\mathfrak{A}_i'$ のパンチ
14	90	0	0	14	0	0	0	0	0	
15	119	182	191	3	0	0	0	0	0	
16	210	221	0	9	1	1	0	0	0	
17	210	0	188	0	0	0	0	0	0	
18	2	1	0	15	0	0	0	0	0	

〔附表 4〕 逆行列 / 連立一次方程式 用ルーティン (共軛勾配法)

計算式

$$p_0=A^*r_0,\qquad r_0=K-AX_0$$

$$X_{i+1}=X_i+a_ip_i \qquad a_i=\frac{|A^*r_i|^2}{|Ap_i|^3}$$

$$r_{i+1}=r_i-a_iAp_i$$

$$p_{i+1}=A^*r_{i+1}b_ip_i \qquad b_i=\frac{A^*r_{i+1}|^2}{|A^*r_i|^2}$$

input

191	A^*	A
192	$0\cdots\cdots0\ k_1k_2\cdots k_n$	

$R-0$ (操作台)

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 2	D 3	備考
1	199	0	0	0	0	0	0	0	0	$0.00000\boxed{n}\times10^9\to$ # 0

ステップ	A	B	C	O			D			備考
				1	2	3	1	2	3	
2	0	0	188	0	0	0	0	0	8	
3	0	0	9	13	1	0	0	0	1	x_0 の送り込み
4	92	0	0	14	0	0	0	0	0	
5	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
6	0	0	18	13	1	0	0	0	1	K の送り込み
7	92	0	0	14	0	0	0	0	0	
8	18	18	72	13	1	0	1	1	1	
9	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
10	0	221	189	8	0	1	0	0	0	
11	188	0	180	0	0	0	0	0	0	$p_0 = A^*r_0$ の計算
12	0	0	0	21	1	1	1	1	1	
13	0	17	18	13	1	2	0	1	1	
14	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
15	0	0	0	14	1	0	1	0	0	
16	27	27	0	13	1	0	1	1	0	
17	0	0	188	0	0	0	0	0	0	$\|A^* r_0\|^2$ の計算
18	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
19	16	0	0	14	0	0	0	0	0	
20	210	0	37	0	0	0	0	0	0	
21	1	0	0	14	0	0	0	0	0	$R-1$ の呼出し

〔註〕 $R-2$ は計算結果のプリントを行のためのもので，必要に応じてかえた方がよいからここでは省略した．

$R-1$ (endless)

ステップ	A	B	C	O			D			備考
				1	2	3	1	2	3	
1	27	27	36	13	1	0	1	1	1	
2	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
3	0	221	189	8	0	1	0	0	0	
4	188	0	180	0	0	0	0	0	0	Ap_i の計算
5	0	17	18	13	1	2	0	0	1	
6	220	220	0	1	1	0	0	1	0	
7	0	0	0	14	1	0	1	0	0	
8	2	0	0	14	0	0	0	0	0	$R-2$ の呼出し
9	36	36	0	13	1	0	1	0	0	
10	0	0	188	0	0	0	0	1	0	
11	220	220	0	1	1	0	0	0	0	$\|Ap_i\|^3$ の計算
12	16	0	0	14	0	0	0	0	0	
13	210	0	38	0	0	0	0	0	0	$a_i = \dfrac{\|A^*r_i\|^2}{\|Ap_i\|^2}$ の計算
14	37	38	39	4	0	0	0	0	0	
15	221	0	181	0	0	0	0	0	0	
16	39	0	182	0	0	1	0	0	0	
17	18	36	18	13	1	0	1	1	1	$r_{i+1} = r_i - a_iAp_i$ の計算
18	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
19	14	0	0	14	0	0	0	0	0	
20	18	18	36	13	1	0	1	1	1	

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 2	D 3	備考
21	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
22	0	221	189	8	0	1	0	0	0	
23	188	0	180	0	0	0	0	0	0	$\lvert A^*r_{i+1}\rvert$ の計算
24	0	17	18	13	1	2	0	1	1	
25	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
26	0	0	0	14	1	0	1	0	0	
27	36	36	0	13	1	0	1	1	0	
28	0	0	188	0	0	0	0	0	0	$\lvert A^*r_{i+1}\rvert^2$ の計算
29	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
30	16	0	0	14	0	0	0	0	0	
31	37	0	183	0	0	0	0	0	0	
32	210	0	37	0	0	0	0	0	0	
33	37	183	182	4	0	0	0	0	0	$(a_i, b_i, \lvert A^*r_i\rvert^2)$ の print
34	39	0	181	0	0	0	0	0	0	
35	0	0	0	26	1	1	1	1	0	
36	0	0	1	26	0	0	0	0	0	印刷機1回空ステップ
37	182	0	183	0	0	0	0	0	0	
38	221	0	182	0	0	0	0	0	0	
39	27	9	9	13	1	0	1	1	1	$x_{i+1}=x_i+a_ip_i$ の計算
40	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
41	14	0	0	14	0	0	0	0	0	
42	183	0	181	0	0	0	0	0	0	
43	27	36	27	13	1	0	1	1	1	$p_{i+1}=A^*r_{i+1}+b_ip_i$ の計算
44	0	0	188	0	0	0	0	0	0	
45	14	0	0	14	0	0	0	0	0	

〔附表 5〕 聯立方程式用ルーティン（逐次近似法）

計算式 $x^{(0)}=(0,0\cdots\cdots,0)$,

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left\{b_i-(a_{i1}x_1^{(k+1)}+\cdots\cdots+a_{i,\,i-1}x_{i-1}^{(k+1)}+a_{i,\,i+1}x_{i+1}^{(k)}+\cdots\cdots+a_{in}x_n^{(k)}\right\}$$

初期条件 # 199 : 0.0000 $\boxed{n}$ $\times 10^7$

input

192 $\underbrace{\boxed{00\cdots\cdots\cdots\cdots 0}}_{n\text{ ケ}}$

$R-0$ （操作台）

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 2	D 3	備考
1	199	0	183	0	0	0	0	0	0	
2	183	0	188	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	0	21	1	1	1	1	1	$x^{(0)}$ のよみこみ
4	183	221	197	8	0	1	0	0	0	
5	92	0	0	14	0	0	0	0	0	
6	183	183	189	8	0	1	0	0	0	
7	183	0	195	0	0	0	0	0	0	
8	183	0	197	0	0	0	0	0	0	
9	1	0	0	14	0	0	0	0	0	$R-1$ の呼出し

計算式

input

191 $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\cdots\cdots\cdots\mathfrak{A}_n$

192 $b_1a_{11}b_2a_{22}\cdots b_na_{nn}$

191, 192 とも endless にしておく.

$R-1$ (endless)

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O 3	D 1	D 2	D 3	備考
1	220	0	1	0	0	0	0	0	1	
2	183	0	188	0	0	0	0	0	0	
3	183	0	196	0	0	0	0	0	0	
4	220	220	0	1	1	0	0	0	0	
5	17	0	0	14	0	2	0	0	0	$R-17$ の呼出し
6	210	192	0	2	1	0	0	0	0	
7	210	192	0	4	1	0	0	0	0	
8	211	0	181	0	0	1	0	0	0	$x^{(k+1)} \rightarrow$ # 181
9	0	0	0	26	1	1	0	0	0	$x^{(k+1)}$ の印刷
10	181	0	1	0	0	0	0	0	2	$R-1$ 又は $R-2$ の呼出し
11	1	2	0	16	0	2	0	0	0	($SN1$ による)

$R-2$ (endless)

ステップ	A	B	C	O 1	O 2	O D	D 1	D 2	D 3	備考
1	183	0	195	0	0	0	0	0	0	
2	183	0	197	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	1	26	0	1	0	0	0	
4	183	183	189	8	0	1	0	0	0	
5	1	0	0	14	0	0	0	0	0	