20次の逆行列の計算誤差について

青山博次郎・田中貞子

(1957年3月受付)

On the propagation of the error to the inverse of a certain matrix of 20 degrees.

Hiroiiro AOYAMA and Sadako TANAKA.

In this paper we have treated the propagation of the error to the inverse of a correlation matrix of 20 degrees from the general point of view of evaluation. The method of the evaluation of the error comes from the paper [1] of the reference. For the maximum relative error 1.58 of the correlations it happened the maximum relative error of the elements of the inverse matrix was. 24.6

The distribution of the errors have been evaluated pretty good by our method.

Institute of Statistical Mathematics.

行列の各要素に誤差のあるとき，これが逆行列にどのような影響を与えるかについて，リレー計算機（有効数字8桁）を使用して得た結果を述べることにしよう．これは元来誤差計算を目的として考察したものではなく，偶々生じた誤差を知らずに計算して行つた結果を利用した副産物的のものであることを断つておきたい．

計算に用いた20次の行列は相関行列であつて，これらの相関係数 r_{ij} のうち48個のものに誤差 Δr_{ij} を生じた．その大きさについては第1表のようである．

これに対して得られた逆行列 (c_{ij}) ——但し $c_{ij}=R_{ij}/R$, R はもとの相関行列式, R_{ij} は r_{ij} の余因数——の誤差は第2表のようになつた．

第 1 表

	平　均	最大値	最小値
$\lvert\Delta r\rvert$	0.0165	0.323	0.000061
$\left\lvert\frac{\Delta r}{r}\right\rvert$	0.136	1.58	0.00113

第 2 表

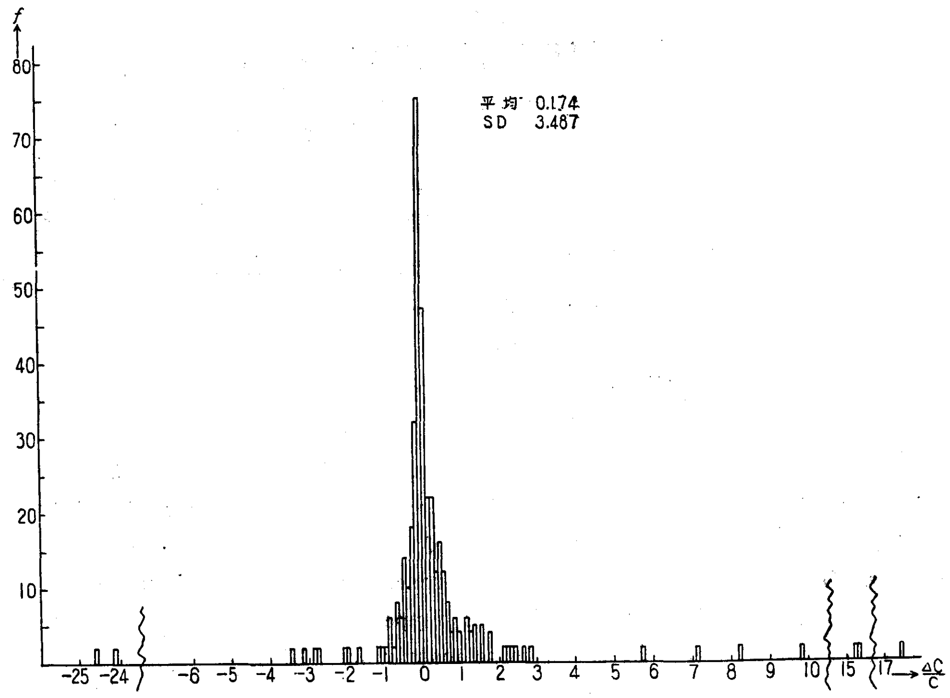
	平　均	最大値	最小値
$\lvert\Delta c\rvert$	0.0976	1.19	0.000110
$\left\lvert\frac{\Delta c}{c}\right\rvert$	0.682	24.6	0.00171

これによつてみると逆行列の各要素の相対誤差は平均では5倍，最大値では15.5倍となつている．相対誤差で24.6となるものは勿論 c_{ij} の値が小さいもの（ここでは -0.0486）であることはいうまでもない．

なお，$\Delta c/c$ の分布は第1図の如く，この平均は0.174，標準偏差は3.487である．

そこでこれらの誤差を一般的に取扱うためには次のように考えることができよう．

r_{ij} の誤差は各独立に生じたものと考え，その誤差分散を共通の σ^2 とおく．この値は我々の具



第 1 図 $\frac{\Delta c}{c}$ の 分 布

体例ではただ1つのサンプルしかないので，48 個の Δr_{ij} の分散 σ^2 で代用し大きく見積ることにする．そうすると

$$\sigma^2 = 0.005977, \qquad \sigma = 0.0773$$

が得られたが，計算の便宜上更に大きい値をとり

$$\sigma = 0.08 \tag{1}$$

とおくことにする．

文献［1］により，k 次の行列式 A の各要素が独立に誤差分散 σ^2 をもつとき，A の要素の最大値を M，最小値を m とおくと A の誤差分散 $D^2(A)$ について

$$\max D^2(A) = k!\left[\sigma^{2k} + k\sigma^{2(k-1)}M^2 + \frac{k!}{2}\left\{\frac{\sigma^{2(k-2)}}{(k-2)!}(M^4 - m^4) + \frac{\sigma^{2(k-3)}}{(k-3)!}(M^6 - m^6) + \cdots\cdots + \sigma^2(M^{2(k-1)} - m^{2(k-1)})\right\}\right] \tag{2}$$

が成立つ．

ここで相関行列式 R については $k = 20$, $M = 1$, $m = 0$ と考え，$\{\ \}$ 内は4項までとることにすれば十分である．また余因数 R_{ij} の評価についても $k = 19$ とするだけで同様の評価ができる．

$k = 19$, 20 について計算すると，(1)，(2) より

$$\max D^2(R_{ij}) \fallingdotseq 1.642 \times 10^{-8} \tag{3}$$

$$\max D^2(R) \fallingdotseq 2.801 \times 10^{-9} \tag{4}$$

一方

$$D^2(c_{ij}) = \frac{1}{R^2}\{D^2(R_{ij}) + c_{ij}{}^2 D^2(R) - 2c_{ij}\,\mathrm{cov}(R_{ij}, R)\}$$

$$\leqq \left\{\frac{1}{R}(D(R_{ij}) + c_{ij}D(R))\right\}^2 \tag{5}$$

であるから，実際の値 $R=1.96\times10^{-3}$ を用いて

$$\frac{\max D(c_{ij})}{|c_{ij}|}=\left(\frac{6.54}{c_{ij}}+2.70\right)\times10^{-2} \tag{6}$$

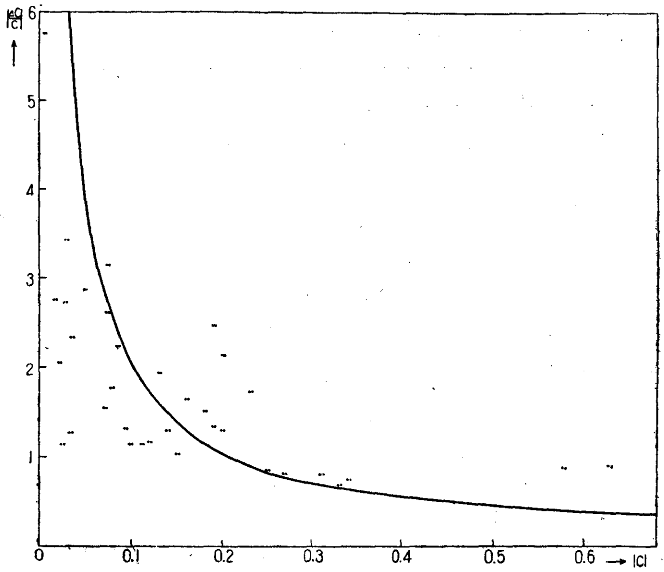
となる．

この左辺は大体前述の $|\varDelta c/c|$ に見合うものであつて，逆行列の要素 c_{ij} の絶対値が小なるほど相対誤差が大きくなることを説明するものである．

幾つかの数字を入れてみると第3表のようになり，双曲線的に相対誤差は減少している．実際のデータについて 400 個の c_{ij} のうち $3\max D(c_{ij})/|c_{ij}|$ より大きくなつたものは 45 個（11.3 %）でほぼチェビシェフの不等式による限界に対応している．

第 3 表

$\lvert c_{ij}\rvert$	0.00259(最小値)	0.01	0.02	0.03	0.05	0.1	0.2	2.6（最大値）
$\max D(c_{ij})/\lvert c_{ij}\rvert$	25.25	6.57	3.30	2.21	1.34	0.68	0.35	0.05



第 2 図

第2図では $|\varDelta c/c|\geqq1$ のものと，$3\max D(c_{ij})/|c_{ij}|$ より大きくなつたもののみ図示してある．ただし図示してないもので限界をこえたものは次の 13 個である．

第 4 表

$\lvert c\rvert$	0.019	0.022	0.041	0.049	1.11	1.31	1.99	2.15
$\lvert\varDelta c/c\rvert$	15.20	15.32	17.48	24.55	0.59	0.34	0.24	0.37
度　数	2	2	2	2	2	1	1	1

統 計 数 理 研 究 所

参 考 文 献

[1] H. Aoyama: On the evaluation of the sampling error of a certain determinant, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, vol. VIII, No. 1, 1956.