6356

Hotelling の T^2 統計量の分布に就いて

塩　谷　　実

(1956 年 2 月受付)

On the Distribution of Hotelling's T^2

Minoru SIOTANI

Hotelling has considered the decomposition of the sum over all sample of the squares of the generalized Student ratio, T^2. Each component has the following form;

$$T^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} l^{ij} v_{ij},$$

where $(l^{ij})^{-1}$ is the covariance matrix estimated from the preliminary sample with (say) n degrees of freedom and (v_{ij}) is the matrix composing of the sum over the new sample of products of certain deviations from the least square regression values and v_{ij}/m is a unbiased estimate of the population covariance σ_{ij}, where m is the number of degrees of freedom of v_{ij}. Hotelling has obtained the exact sampling distribution of the above statistic T^2 when the number of the dimensions p of the population is 2.

In this paper the author will consider the sampling distribution of T^2 for general p with the aid of the methods of B. L. Welch and G. S. James, especially [8].

Institute of Statistical Mathematics

1. 緒　論　H. Hotelling ([2], [3], [4]) は，一般化された Student ratio の自乗である T^2 統計量を使用することに依つて，多次元解析の時にも普通の分散分析の場合に似た議論が出来ることを示した．それは母集団に於ける分散，共分散が未知の場合，予備標本より不偏推定しておき，この予備標本に関して独立な成分に分解されるのである．

$x_1, x_2, \cdots x_p$ を p 次元正規分布に従う確率変数とし，母集団平均は $\mathbf{0} = \{0, 0, \cdots, 0\}$，分散，共分散行列は

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\lambda_{ij})$$

とする．$\boldsymbol{\Lambda}$ の予備標本に依る不偏推定値を

$$\boldsymbol{L} = (l_{ij})$$

とし，推定に使われた自由度は n であるとしよう．然る時統計量は

$$T^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} l^{ij} x_i x_j \tag{1}$$

(l^{ij} は $\boldsymbol{L}$ の逆行列 $\boldsymbol{L}^{-1}$ の (i, j) 要素である.) はよく知られた如く $n > p-1$ に対して

$$\frac{1}{B\left(\dfrac{n-p+1}{2}, \dfrac{p}{2}\right)} \frac{\left(\dfrac{T^2}{n}\right)^{(p-2)/2}}{\left(1+\dfrac{T^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} d\left(\frac{T^2}{n}\right) \tag{2}$$

に従う．この T^2 を新らたな大さ N の標本を取つて観測した時，各観測毎に作られる T^2 の値の和

$$(3) \qquad T_0^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} T_\alpha^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} l^{ij}\left(\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}\, x_{j\alpha}\right)$$

を得る．Hotelling は $\sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}\, x_{j\alpha}$ を普通の分散分析の方式に倣つて，独立な成分に分解することを考えた．例えば最も簡単な時を考えると

$$(4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{N} x_{i\alpha}\, x_{j\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{N} (x_{i\alpha}-\bar{x}_i)(x_{j\alpha}-\bar{x}_j) + N\bar{x}_i\,\bar{x}_j$$

であるが，これに依り

$$(5) \qquad T_0^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} l^{ij}\left\{\sum_{\alpha=1}^{N}(x_{i\alpha}-\bar{x}_i)(x_{j\alpha}-\bar{x}_j)\right\} + N\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} l^{ij}\,\bar{x}_i\,\bar{x}_j$$

$$= T_1^2 + T_2^2$$

と分解される．実際の状況に応じては二つ以上の成分に分解することが可能である．分解された各成分及び T_0^2 は次のような形を持つ．

$$(6) \qquad T^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} l^{ij}\, v_{ij} = m\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} l^{ij}\, s_{ij}$$

玆に v_{ij} は $x_{i\alpha}$ と $x_{j\alpha}$ の，共通な独立変数の組に対する夫々の回帰からの偏差の積和で，その自由度は m であるとした．且つ s_{ij} は v_{ij}/m で母集団共分散 σ_{ij} の不偏推定量である．若し $m>p-1$ を充たす時，v_{ij} 或いは s_{ij} は自由度 m の p 次元 Wishart 分布に従う．さて吾々の分解に於いて，各成分は何れも予備標本に depend しているので独立ではないが，それらの予備標本をとめた時の条件附きの分布は独立である．各成分及び T_0^2 の標本分布を求めることは重要であり，Hotelling は $p=2$ の時に正確な標本分布を求めている．自由度 $m=1$ の時は（(5) の T_2^2 がこの場合である．）勿論 (2) と同じ分布に従う．$p\geqq 3$ の時，(6) の標本分布を求めることは一般に困難である．且つ Hotelling の方法では v_{ij} の Wishart 分布を仮定するので，自由度 m が $p-1\geqq m>1$ の時が除外されて了う．併し B. L. Welch ([5], [6]) 及び G. S. James ([7], [8]) が，母集団に於ける分散比が未知の場合に於ける，幾つかの母平均の比較，及びその他で用いた方法を吾々の場合に適用すれば，(6) の任意の確率に対する臨界点を一般の m と，p の値に対して求めることが出来る．以下これを示そう．

2. 準　備

記述を簡単にするために，次のように行列表示を行う．

$$\boldsymbol{L} = (l_{ij}), \quad \boldsymbol{V} = (v_{ij}), \quad \boldsymbol{S} = (s_{ij})$$

とおけば，(6) の T^2 統計量は

$$(7) \qquad T^2 = tr\,\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{V} = m\cdot tr\,\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{S}$$

と書ける．此処に

$$tr\,\boldsymbol{A} = tr\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1p} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{p1}\cdots a_{pp}\end{bmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{pp}$$

若し $\boldsymbol{\Lambda}$ が既知であるとした場合には T^2 の代りに

$$(8) \qquad \chi^2 = tr\,\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V} = m\cdot tr\,\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{S}$$

を考える．

〔予備定理〕 上に定義した χ^2 は自由度 mp の χ^2–分布に従う．

〔証明〕 $\boldsymbol{V}$ の各要素は自由度が m で，先に述べたように $x_{i\alpha}$ と $x_{j\alpha}$ の回帰値からの偏差の積

和であり，且つ $m\sigma_{ij}$ の不偏推定量であるから $x_{i\alpha}(\alpha=1,\cdots,N)$ の適当な一次変換に依つて V を次のように書くことが出来る．$y_\alpha,(\alpha=1,\cdots,m)$，を列ベクトル $\{y_{1\alpha},y_{2\alpha},\cdots,y_{p\alpha}\}$ とし且つ y_β $(\alpha\neq\beta)$ とは互に独立に平均 0，共分散行列 Λ をもつて p 次元正規分布に従つて分布するものとすれば

$$V=\left(\textstyle\sum_{\alpha=1}^{m} y_{i\alpha}\,y_{j\alpha}\right)=\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha\, y_\alpha' \tag{9}$$

と書くことが出来る．（例えば [9] の pp. 39–41 を参照せよ）y_α' は y_α の転置ベクトル即ち行ベクトルにしたものである．故に

$$\begin{aligned}\chi^2 &= tr\,\Lambda^{-1}\left(\textstyle\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha y_\alpha'\right) = \textstyle\sum_{\alpha=1}^{m} tr\,\Lambda^{-1}(y_\alpha y'_\alpha)\\ &= \textstyle\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha'\Lambda^{-1}y_\alpha\end{aligned} \tag{10}$$

となる．$y_\alpha'\Lambda^{-1}y_\alpha$ はよく知られているように自由度 p の χ^2 分布に従い且つ α に就いて独立であるから，よく知られた χ^2 の加法性に依り吾々の χ^2 統計量 (8) は自由度 mp の χ^2–分布に従うことがわかるのである．

上の予備定理に依つて Λ が既知の場合には

$$P_r\{tr\,\Lambda^{-1}V\leqq 2\xi\}\,G_\rho(\xi) \tag{11}$$

と書ける．但し 2ξ は任意に定められた確率に対する χ^2 表の値であり，又

$$\rho = mp/2 \tag{12}$$

$$G_\rho(\xi) = [\Gamma(\rho)]^{-1}\int_0^{\xi} t^{\rho-1}e^{-t}dt \tag{13}$$

である．

併し実際には母集団分布に於ける Λ は未知であるのが常であり，吾々の場合には予備標本に基いて推定されるのである．若し予備標本の大さが充分大きく，Λ が大きな自由度で推定されるならば，統計量 T^2 は漸近的に χ^2 分布するであろう．このことより吾々は

$$P_r\{tr\,L^{-1}V\leqq 2h(l)\} = G_\rho(\xi) \tag{14}$$

となるような ξ と l_{ij} の函数 $h(l)$ を見出すことに努める．これを Welch,, James の方法に依つて求めよう．

$$\partial=\left(\frac{1}{2}(1+\delta_{rs})\frac{\partial}{\partial\lambda_{rs}}\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\lambda_{11}} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{12}} & \cdots\cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{1p}}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{21}} & \frac{\partial}{\partial\lambda_{22}} & \cdots\cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{2p}}\\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot\\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{p1}} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\lambda_{p2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial}{\partial\lambda_{pp}}\end{pmatrix} \tag{15}$$

なる微分作用素を要素とする行列を定義し，且つ

$$\Theta = \int \exp\{tr(L-\Lambda)\theta\}P_r[dl] \tag{16}$$

とおく．$P_r[dl]$ は自由度 n の Wishart 分布の確率要素である．しかる時は (14) 次のように変形される．

$$G_\rho(\xi) = \int P_r\{tr\,L^{-1}V\leqq 2h(l)\,|\,l\}Pr[dl] \tag{17}$$

$$= \int \exp\{tr(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{V})\partial\}\cdot P_r\{tr\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V} \leqq 2h(\lambda)\}$$

$$= \boldsymbol{\theta}\cdot P_r\{tr\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V} \leqq 2h(\lambda)\}.$$

$\boldsymbol{\theta}$ は更に次のように書くことが出来る.

$$\boldsymbol{\theta} = \exp\{-tr\boldsymbol{V}\,\partial\}\int \exp\{tr\boldsymbol{L}\,\partial\}\,P_r[dl] \tag{18}$$

$$= \exp\{-tr\boldsymbol{\Lambda}\,\partial\}\left|\boldsymbol{I}_p - \frac{2}{n}\boldsymbol{\Lambda}\,\partial\right|^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \exp\left\{-tr\boldsymbol{\Lambda}\,\partial - \frac{n}{2}\log\left|\boldsymbol{I}_p - \frac{2}{n}\boldsymbol{\Lambda}\,\partial\right|\right\}$$

これに

$$-\log|\boldsymbol{I}_p-\boldsymbol{Y}| = tr\boldsymbol{Y} + \frac{1}{2}tr\boldsymbol{Y}^2 + \frac{1}{3}tr\boldsymbol{Y}^3 + \cdots\cdot \tag{19}$$

なる展開式（$\boldsymbol{Y}$ のすべての固有値が1より小さければ収斂する．[8] の (5.15) 式）を利用して

$$\boldsymbol{\theta} = \exp\left\{\frac{1}{n}tr(\boldsymbol{\Lambda}\partial)^2 + \frac{4}{3n^2}tr(\boldsymbol{\Lambda}\partial)^3 + \cdots\cdot\right\} \tag{20}$$

$$= 1 + \frac{1}{n}tr(\boldsymbol{\Lambda}\partial)^2 + \frac{1}{n^2}\left\{\frac{4}{3}tr(\boldsymbol{\Lambda}\partial)^3 + \frac{1}{2}(tr(\boldsymbol{\Lambda}\partial)^2)^2\right\} + 0(n^{-3})$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\sum_{rstu}\lambda_{ur}\lambda_{st}\partial_{rs}\partial_{tu}$$

$$+ \frac{1}{n^2}\left\{\frac{4}{3}\sum_{rstuvw}\lambda_{wr}\lambda_{st}\lambda_{uv}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw} + \frac{1}{2}\sum_{rstuvwxy}\lambda_{ur}\lambda_{st}\lambda_{yv}\lambda_{wx}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}\partial_{xy}\right\}$$

$$+ 0(n^{-3})$$

となる．

ところで $h(l)$ は n が大きくなれば ξ に近づくことから，$h(l)$ を n^{-1} の級数に展開して

$$h(l) = \xi + h_+(l) \tag{21}$$

$$= \xi + h_1(l) + h_2(l) + \cdots\cdot$$

とする．但し $h_\nu(l)$ は $n^{-\nu}$ の order の函数である．これ等 $h_1(l)$, $h_2(l)$, $\cdots\cdot$ を決定して問題を解くのが方針である．(17) より

$$G_p(\xi) = \boldsymbol{\theta}\exp[h_+(\lambda)D]\,P_r\{tr\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V} \leqq 2\xi\} \tag{22}$$

$$= \boldsymbol{\theta}\,[1+h_1(\lambda)D+\{h_2(\lambda)D+\frac{1}{2}h_1^2(\lambda)D^2\}+\cdots\cdot]P_r\{tr\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V} \leqq 2\xi\}$$

を得るがこれの両辺を比較して

$$\{h_1(\lambda)D + \frac{1}{n}\sum_{rstu}\lambda_{us}\lambda_{st}\partial_{rs}\partial_{tu}\}\,P_r\{tr\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{V} \leqq 2\xi\} = 0 \tag{23}$$

$$\{h_2(\lambda)D + \frac{1}{2}h_1^2(\lambda)D^2 + \frac{1}{n}\sum_{rstu}\lambda_{ur}\lambda_{st}(h_1^{\,rs,tu}(\lambda)D + 2h_1^{(rs)}(\lambda)\partial_{tu}D + h_1(\lambda)\partial_{rs}\partial_{tu}D) \tag{24}$$

$$+ \frac{4}{3}\frac{1}{n^2}\sum\lambda_{wr}\lambda_{st}\lambda_{uv}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\sum \lambda_{ur}\lambda_{st}\lambda_{yv}\lambda_{wx}\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}\partial_{xy}\} P_r\{tr\Lambda^{-1}V \leqq 2\xi\} = 0$$

等を得る．玆に D は $\frac{\partial}{\partial\xi}$ を表わし

(25) $$h_1^{(rs)}(\lambda) \equiv \partial_{rs}h_1(\lambda) = \frac{1}{2}(1+\delta_{rs})\,\partial h_1(\lambda)/\partial\lambda_{rs}$$

等である．$h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$ 等は $h_1(l)$, $h_2(l)$ 等の l を λ でおきかえたものであるから，(23), (24) より $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$ がわかれば，n^{-2} の order までの $h(l)$ を求めることが出来る．そのため (23), (24) に於ける微分を計算しよう．

3. 微分係数の計算

今 λ_{ij} に微小の increment ε_{ij} を与えて

(26) $$J = P_r\{tr(\Lambda+\varepsilon)^{-1}V \leqq 2\xi\}$$

を考える．但し ε は対称行列で $(\Lambda+\varepsilon)$ が正値定符号行列であることをくずさないものとする．先づ

(27) $$J = [1 + \sum_{rs}\varepsilon_{rs}\partial_{rs} + \frac{1}{2}\sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\partial_{rs}\partial_{tu} + \cdots\cdots]\,P_r\{tr\Lambda^{-1}V \leqq 2\xi\}$$

と書くことが出来る．又一方 (10), (11) に示したことから

(28) $$J = (2\pi)^{-p}|\Lambda|^{-\frac{m}{2}}\int_R \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha'\Lambda^{-1}y_\alpha\right\}\Pi\, dy_{i\alpha}$$

と書ける．但し R は

(29) $$R:\ \sum_{\alpha=1}^{m} y_\alpha'(\Lambda+\varepsilon)^{-1}y_\alpha \leqq 2\xi$$

である．さて適当な正則一次変換

$$y_\alpha = Tz_\alpha \qquad \alpha = 1, 2, \cdots\cdots, m$$

に依つて

(30) $$\frac{1}{2}T'(\Lambda+\varepsilon)^{-1}T = I_p$$

(31) $$\frac{1}{2}T'\Lambda^{-1}T = I_p - \eta$$

$$\eta = \mathrm{diag}\,(\eta_1, \eta_2, \cdots\cdots, \eta_p)$$

とすることが出来る．この変換に依つて (28) は

(32) $$J = \pi^{-p}|I_p-\eta|^{\frac{m}{2}}\int_{\sum_\alpha z_\alpha' z_\alpha \leqq \xi} \exp\{-\sum_{\alpha=1}^{m} z_\alpha'(I_p-\eta)z_\alpha\}\,\Pi\, dz_{i\alpha}$$

となる．(32) の積分を James に従つて計算すれば

(33) $$J = \left(\frac{|I_p-\eta E|}{|I_p-\eta|}\right)^{-\frac{m}{2}} G_p(\xi)$$

となる．但し

$$E^{\tau}G_p(\xi) = G_{p+\tau}(\xi)$$

なる作用素であり

$$\Delta = E - 1$$

とおく. さて (30), (31) より

$$\frac{|I_p-\eta E|}{|I_p-\eta|} = \frac{|I_p-\eta-\eta\Delta|}{|I_p-\eta|} = \frac{|\Lambda^{-1}-[(\Lambda+\varepsilon)^{-1}-\Lambda^{-1}]\Delta|}{|\Lambda^{-1}|}$$
$$= |I_p - [(\Lambda+\varepsilon)^{-1}\Lambda - I_p]\Delta|$$

故に $X = (\Lambda+\varepsilon)^{-1}\Lambda - I_p$ とおけば

$$J = \{|I_p - X\Delta|\}^{-\frac{m}{2}} G_p(\xi)$$
$$= \exp\left\{-\frac{m}{2}\log|I_p - X\Delta|\right\} G_p(\xi)$$
$$= \left\{1 + \frac{m}{2} tr X\Delta + \frac{m}{4}\left[tr(X\Delta)^2 + \frac{m}{2}(trX\Delta)^2\right]\right.$$

(34)
$$+ \frac{m}{6}\left[tr(X\Delta)^3 + \frac{3m}{4}(trX\Delta)(tr(X\Delta)^2) + \frac{m^2}{8}(trX\Delta)^3\right]$$
$$+ \frac{m}{8}\left[tr(X\Delta)^4 + \frac{2m}{3}(trX\Delta)(tr(X\Delta)^3) + \frac{m^2}{4}(trX\Delta)^2(tr(X\Delta)^2)\right.$$
$$\left. + \frac{m^3}{48}(trX\Delta)^4 + \frac{m}{4}(tr(X\Delta)^2)^2\right]$$
$$\left. + \cdots\cdots\right\} G_p(\xi)$$

となる. ところで

$$X = (\Lambda + \varepsilon)^{-1}\Lambda - I_p = (\Lambda + \sum \varepsilon_{rs}\Lambda_{rs})^{-1}\Lambda - I_p$$
$$= (I_p + \sum \varepsilon_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{rs})^{-1} - I_p$$

(35)
$$= -\sum \varepsilon_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{rs} + \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\Lambda^{-1}\Lambda_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{tu}$$
$$- \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}\Lambda^{-1}\Lambda_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{tu}\Lambda^{-1}V_{vw} + \cdots\cdot$$

である. 但し

(36)
$$\Lambda_{rs} = \partial_{rs}\Lambda = \frac{1}{2}(1 + \delta_{rs})\frac{\partial}{\partial\lambda_{rs}}\Lambda$$

即ち Λ_{rs} は $r \neq s$ ならば (r行, s列) 及び (s行, r列) の要素が $\frac{1}{2}$ で他は0なる行列であり, $r = s$ の時にはr行r列の要素が1で他は悉く0なる行列である. 吾々は (34) 式を計算しなければならないから, 今次のような記法を用いる.

$\lambda^{rs} = (rs)$ と書いて

(37) $[rs] \equiv tr\Lambda^{-1}\Lambda_{rs} = (rs)$

(38) $[rs|tu] \equiv tr\Lambda^{-1}\Lambda_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{tu} = \frac{1}{2}\{(ur)(st) + (us)(rt)\}$

(39) $[rs|tu|vw] \equiv tr\Lambda^{-1}\Lambda_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{tu}\Lambda^{-1}\Lambda_{vw}$

$$= \frac{1}{8}\left\{(wr)(st)(uv) + (wr)(su)(tv) + (ws)(rt)(uv)\right.$$
$$+ (ws)(ru)(tv) + (vr)(st)(uw) + (vr)(su)(tw)$$
$$\left. + (vs)(rt)(uw) + (vs)(ru)(tw)\right\}$$

$$(40)\qquad [rs|tu|vw|xy] \equiv tr\Lambda^{-1}\Lambda_{rs}\Lambda^{-1}\Lambda_{tu}\Lambda^{-1}\Lambda_{vw}\Lambda^{-1}\Lambda_{xy}$$

$$= \frac{1}{16}\Big\{(yr)(st)(uv)(wx) + (yr)(st)(uw)(vx) + (yr)(su)(tv)(wx)$$
$$+ (yr)(su)(tw)(vx) + (ys)(rt)(uv)(wx) + (ys)(rt)(uw)(vx)$$
$$+ (ys)(ru)(tv)(wx) + (ys)(ru)(tw)(vx) + (xr)(st)(uv)(wy)$$
$$+ (xr)(st)(uw)(vy) + (xr)(su)(tv)(wy) + (xr)(su)(tw)(vy)$$
$$+ (xs)(rt)(uv)(wy) + (xs)(rt)(uw)(vy) + (xs)(ru)(tv)(wy)$$
$$+ (xs)(ru)(tw)(vy)\Big\}$$

と等おけば

$$(41)\qquad tr\,X = -\sum \varepsilon_{rs}[rs] + \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}[rs|tu] - \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}[rs|tu|vw]$$
$$+ \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}\varepsilon_{xy}[rs|tu|vw|xy] - \cdots\cdot$$

$$(42)\qquad tr\,X^2 = \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}[rs|tu] - 2\sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}[rs|tu|vw]$$
$$+ 3\sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}\varepsilon_{xy}[rs|tu|vw|xy] - \cdots\cdot$$

$$(43)\qquad (trX)^2 = \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}[rs][tu] - 2\sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}[rs][tu|vw]$$
$$+ \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}\varepsilon_{xy}\{[rs|tu][vw|xy] + 2[rs][tu|vw|xy]\} - \cdots\cdot$$

等と計算されるから，これ等を (34) に代入すれば

$$(44)\qquad J = \{1 - \sum \varepsilon_{rs}(1) + \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}(2) - \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}(3)$$
$$+ \sum \varepsilon_{rs}\varepsilon_{tu}\varepsilon_{vw}(4) - \cdots\cdot\}\,G_r(\xi)$$

となる．玆に

$$(1) = \frac{m}{2}[rs]\Delta,$$

$$(2) = \frac{m}{2}[rs|tu]\left(\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2\right) + \frac{m^2}{8}[rs][tu]\Delta^2,$$

$$(3) = \frac{m}{2}[rs|tu|vw]\left(\Delta + \Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3\right) + \frac{m^2}{4}[rs][tu|vw]\left(\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta^3\right)$$
$$+ \frac{m^3}{48}[rs][tu][vw]\Delta^3$$

$$(4) = \frac{m}{2}[rs|tu|vw|xy]\left(\Delta + \frac{3}{2}\Delta^2 + \Delta^3 + \frac{1}{4}\Delta^4\right) + \frac{m^2}{4}[rs][tu|vw|xy]\left(\Delta^2 + \Delta^3 + \frac{1}{3}\Delta^4\right)$$
$$+ \frac{m^2}{8}[rs|tu][vw|xy]\left(\Delta^2 + \Delta^3 + \frac{1}{4}\Delta^4\right) + \frac{m^3}{16}[rs][tu][vw|xy]\left(\Delta^3 + \frac{1}{2}\Delta^4\right)$$
$$+ \frac{m^4}{384}[rs][tu][vw][xy]\Delta^4$$

である．斯くして (27) と (44) を比較して (23), (24) に於ける各微分係数を求めるのであるが，この時，ε_{rs}, ε_{tu}, $\cdots$ の係数が rs, tu 等に関して対称性を充すように注意しておかねばならない．結果は

$$(45)\qquad \partial_{rs}P_r\{tr\Lambda^{-1}A \leqq 2\xi\} = -\frac{m}{2}[rs]\Delta G(\xi) = \frac{m}{2}[rs]Eg_0(\xi),$$

$$\partial_{rs}\partial_{tu}P_r\{\cdots\} = -\frac{m}{2}\left\{[rs|tu](E^2+E)+\frac{m}{2}[rs][tu](E^2-E)\right\}g_\rho(\xi), \tag{46}$$

$$\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}P_r\{\cdots\} = m\left\{[rs|tu|vw](E^3+E^2+E)+\frac{3m}{4}[rs][tu|vw](E^3-E)\right.$$
$$\left.+\frac{m^2}{8}[rs][tu][vw](E^3-2E^2+E)\right\}g_\rho(\xi) \tag{47}$$

$$\partial_{rs}\partial_{tu}\partial_{vw}\partial_{xy}P_r\{\cdots\} = -m\left\{(2[rs|tu|vw|xy]+[rs|vw|tu|xy])(E^4+E^3+E^2+E)\right.$$
$$+2m[rs][tu|vw|xy](E^4-E)$$
$$+\frac{m}{4}([rs|tu][vw|xy]+2[rs|vw][tu|xy])(E^4+E^3-E^2-E)$$
$$+\frac{m^2}{4}([rs][tu][vw|xy]+2[rs][vw][tu|xy])(E^4-E^3-E^2+E)$$
$$\left.+\frac{m^3}{16}[rs][tu][vw][xy](E^4-3E^3+3E^2-E)\right\}g_\rho(\xi) \tag{48}$$

を得る．但し

$$g_\rho(\xi) = G_\rho'(\xi) = [\Gamma(\rho)]^{-1}\xi^{\rho-1}e^{-\xi}$$
$$E\,g_\rho(\xi) = g_{\rho+1}(\xi)$$

と表わした．

4. 結 果 (46) を (23) に代入すれば，$h_1(\lambda)$ を求めることが出来て

$$h_1(\lambda) = \frac{m}{4n}\sum\lambda_{ur}\lambda_{st}\left\{2[rs|tu]\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)+m[rs][tu]\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right\} \tag{49}$$
$$= \frac{m}{4n}\left\{p(p+1)\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)+mp\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right\}$$

となる．但し

$$\rho^{(s)} = \rho(\rho+1)\cdots\cdot(\rho+s-1) \tag{50}$$

とおいた．これより $h_1(\lambda)$ は λ に無関係に求められたので，進んで $h_2(\lambda)$ を求める時には $h_2^{(rs)}(\lambda)$ 等は0になるので計算が簡単になる．(24) に (46), (47), (48), (49) を代入して $h_2(\lambda)$ を求めると

$$h_2(\lambda) = \frac{1}{32}\frac{m^2}{n^2}\left(1-\frac{\rho^{(1)}-1}{\xi}\right)\left[p(p+1)\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)+mp\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right]^2 \tag{51}$$
$$-\frac{m^2}{16n^2}\left[p(p+1)\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)+mp\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right]\left[p(p+1)\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-1\right)\right.$$
$$\left.+mp\left(\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}+1\right)\right]$$
$$-\frac{m}{6n^2}\left[p(p^2+3p+4)\left(\frac{\xi^3}{\rho^{(3)}}+\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)+3mp(p+1)\left(\frac{\xi^3}{\rho^{(3)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right.$$
$$\left.+m^2p\left(\frac{\xi^3}{\rho^{(3)}}-\frac{2\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right]$$
$$+\frac{m}{32n^2}\left[4p(2p^2+5p+5)\left(\frac{\xi^4}{\rho^{(4)}}+\frac{\xi^3}{\rho^{(3)}}+\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)+16mp(p+1)\left(\frac{\xi^4}{\rho^{(4)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)\right.$$

$$+mp(p^3+2p^2+5p+4)\left(\frac{\xi^4}{\rho^{(4)}}+\frac{\xi^3}{\rho^{(3)}}-\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)$$

$$+2m^2p(p^2+p+4)\left(\frac{\xi^4}{\rho^{(4)}}-\frac{\xi^3}{\rho^{(3)}}-\frac{\xi^2}{\rho^{(2)}}+\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)$$

$$+m^3p^2\left(\frac{\xi^4}{\rho^{(4)}}-\frac{3\xi^3}{\rho^{(3)}}+\frac{3\xi^2}{\rho^{(2)}}-\frac{\xi}{\rho^{(1)}}\right)$$

となる．従つて

$$2\xi=\chi^2 \quad \text{及び} \quad \rho=mp/2$$

に注意して n^{-2} の order まで $h(l)$ を求めれば

$$(52) \qquad 2h(l)=\chi^2+\frac{m}{2n}\Big[p(p+1)(\chi_4+\chi_2)+mp(\chi_4-\chi_2)\Big]$$

$$+\Big\{\frac{1}{16}\frac{m^2}{n^2}\Big(1-\frac{mp-2}{\chi^2}\Big)\Big[p(p+1)(\chi_4+\chi_2)+mp(\chi_4-\chi_2)\Big]^2$$

$$-\frac{1}{8}\frac{m^2}{n^2}\Big[p(p+1)(\chi_4+\chi_2)+mp(\chi_4-\chi_2)\Big]\Big[p(p+1)(\chi_4-1)+mp(\chi_4-2\chi_2+1)\Big]$$

$$-\frac{1}{3}\frac{m}{n^2}\Big[p(p^2+3p+4)(\chi_6+\chi_4+\chi_2)+3mp(p+1)(\chi_6-\chi_2)+m^2p(\chi_6-2\chi_4+\chi_2\Big]$$

$$+\frac{1}{16}\frac{m}{n^2}\Big[4p(2p^2+5p+5)(\chi_8+\chi_6+\chi_4+\chi_2)+16mp(p+1)(\chi_8-\chi_2)$$

$$+mp(p^3+2p^2+5p+4)(\chi_8+\chi_6-\chi_4-\chi_2)$$

$$+2m^2p(p^2+p+4)(\chi_8-\chi_6-\chi_4+\chi_2)$$

$$+m^3p^2(\chi_8-3\chi_6+3\chi_4-\chi_2)\Big]\Big\}+O(n^{-3})$$

を得る．玆に

$$(53) \qquad \chi_{2s}=\chi^{2s}/mp(mp+2)\cdots\cdots(mp+2s-2)$$

とおいたのである．

以上の結果を次のように纏めておく．

(6) 或いは (7) で定義される統計量 T^2 の標本分布に就いて，与えられたる任意の確率 α に対し

$$P_r\{T^2\leqq T_*^2\}=\alpha$$

を満足する T_*^2 を求めるには，χ^2-表より自由度 mp に対する $100(1-\alpha)$ % 点を求め，これを (52) 式の χ^2 の値として代入してやれば．n^{-2} の order までの近似値が得られる．

$m=1$ の場合には T^2 は (2) の分布に従うから，今 (25) の結果に於いて $m=1$ とすれば

$$(54) \qquad 2h(l)=T^{*2}=\chi^2\Big\{1+\frac{\chi^2+p}{2n}+\frac{4\chi^4+(13p-2)\chi^2+7p^2-4}{24n^2}+O(n^{-3})\Big\}$$

となる．これは H. Hotelling and L. R. Frankel [1] が得たものと一致する．

又一次元の場合即ち $p=1$ の時には

$$(55)\qquad 2h(l)=\chi^2\left\{1+\frac{\chi^2-(m-2)}{2n}+\frac{4\chi^6-11(m^2-2)\chi^2+(m-2)(7m-10)}{24n^2}+O(n^{-4})\right\}$$

となり，これは自由度 m と n の F-分布に従う量を m 倍したものの %点に相当する [7].

$p=2$, $m>1$, $n\geqq 2$ に対しては Hotelling の正確な公式

$$P_r(T^2>T_*^2)=1-I_w(m-1,n)+\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m+n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{1-w}{1+w}\right)^{(n-1)/2}I_{w^2}\left(\frac{m-1}{2},\frac{n+1}{2}\right). \qquad (55)$$

$$w=T_*^2/(2n+T_*^2) \qquad (56)$$

がある．これと吾々の展開式とを比較して見るためにいくつかの n, m の値に対する 5% 点を計算して見よう．

$P_r[T^2>T_*^2]=0.05$ なる T_*^2 を (51) 式と (55) 式によつて求めた時の比較，($p=2$)

n \ m		2	5	10	20
10	(51) 式	15.20	31.19	56.71	104.82
	Exact value	15.82	32.85	59.84	112.86
20	(51) 式	11.97	23.86	42.27	77.46
	Exact value	12.04	24.05	42.60	78.45
29	(51) 式	11.12	21.95	38.52	70.12
	Exact value	11.15	21.96	38.59	70.46

これで見ると m が大きくなるに従つて両者の差は大きくなる傾向があるが，予備標本に依つて A を推定する時の自由度を 30 程度にとつておけば充分であろう．$m\leqq 10$ 程度の時にはこの自由度は 20 位でも大過ない．

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] Hotelling, H. and Frankel, L. R., "Transformation of statistics to simplify their distribution" Ann. Math. Stat., Vol. 9, (1938), PP. 87–96.

[2] Hotelling, H., "A generalized T measure of multivariate dispersion," abstract, Ann. Math. Stat., Vol. 18, (1947), p. 298.

[3] ————, "Multivariate quality control, illustrated by the air testing of sample bombsights," Selected Techniques of Statistical analysis, edited by Eisenhart, Hastay and Wallis, Chap. 3, McGraw-Hill, New York, 1947.

[4] ————, "A generalized T test and measure of multivariate dispersion," Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statisticsand Probability, edited by J. Neyman, University of California Press, 1951, PP. 23–41.

[5] Welch, B. L., "The generalization of 'Student's' problem when several different population variances are involved," Biometrika, Vol. 34, (1947), PP. 28–35.

[6] ————, "On the Studentization of several variances," Ann. Math. Stat., Vol. 18, (1947), PP. 118–122.

[7] James, G. S., "The comparison of several groups of observations when the ratios of the population variances are unknown," Biomentrika, Vol. 38, (1951), PP. 324–329.

[8] ————, "Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown," Biometrika, Vol. 41, (1954), PP. 19–43.

[9] Ogawa, J., "On the sampling distributions of classical statistics in multivariate analysis," Osaka Mathematical Journal, Vol. 5, (1953), PP. 13–52.

[10] Pearson, K., (editor), *Tables of the Incomplete Beta Function*, Biometrika, Office,London, 1948.