ベクトル量の相関論に対する増山の相関係数について

大阪大学理学部数学教室　小　川　潤　次　郎

(1955 年 3 月 受付)

On the Masuyama's Correlation Coefficient of Vectors

JUNJIRO OGAWA

Summary

Dr. M. Masuyama published a sequence of papers during the period 1939—1941 and discussed on the measure of the correlation between vector variates. Masuyama's theory seems to be very obscure because the distinction between population parameters and statistics were not clearly made and his theory will be covered by the theory of canonical correlation established by Prof. H. Hotelling in 1936. However there have been no literatures, at least as far as the author knows, which recogniged this situation correctly.

The purpose of this note is to make clear this relation and to derive the sampling distribution of Masuyama's correlation coefficient in some special cases basing on the sampling distribution of the canonical correlation coefficients.

Osaka University

増山元三郎博士は 1939 年から 1941 年の頃に亘つて一連の論文[1]を発表して，ベクトル変量間の相関測度について論じている．この仕事の綜合報告と見做すべきものは下記であろう．

増山元三郎 "ベクトル量の相関測度について"

(Ⅰ) 統計数理研究　Vol 1, No 1 (1941)

(Ⅱ) ibid　Vol 1, No 2 (1942)

この論著には統計量と母数の区別がされていないので[2]近代統計学的な観点からすれば頗る不満足なものであり，且つこの内容は，これより4年前の 1936 年に発表された H. Hotelling 教授の "正準相関論"[3] に含まれるものである．併し従来このことを明確に述べた文献を見ないので，ここにそれについて述べて見度い．

別に独創的なことはないのであるが新しいこととしては，増山氏の相関係数の標本分布についても少し述べる．

§1. 正準相関論

もともとこの論文は expository paper であるから先づ H. Hotelling の正準相関のことから説明しよう．

p 変量 $x_1, \cdots\cdot x_p$ (これを "p 群" と名ずけ，p 群について添字はローマ文字で例えば x_a 等とする) と q 変量 $x_{p+1}, \cdots\cdot x_{p+q}$ (これを "q 群" と名づけ，q 群についての添字はギリシヤ文字で表わし，例えば x_α 等) の相関を論ずるために，Hotelling は各群の変量の一次結合の全体を考えて，p 群と q 群の一次結合の共分散，むしろ相関係数が最大となるものを求めてこれを正準変量と名づけたのであつた．

話を簡単にするために，各変量の平均値は 0 で且つ分散は 1 であるとする．

$$E(x_i x_j)=\sigma_{ij},\quad E(x_i x_\alpha)=\sigma_{i\alpha},\quad E(x_\alpha x_\beta)=\sigma_{\alpha\beta} \tag{1}$$

として，

$$A\equiv(\sigma_{ij}),\quad B\equiv(\sigma_{i\alpha}),\quad C\equiv(\sigma_{\alpha\beta}) \tag{2}$$

勿論　$\sigma_{ii}=\sigma_{\alpha\alpha}=1$　である．今

$$\xi=\sum_{i=1}^{p}a_i x_i \qquad \eta=\sum_{\alpha=p+1}^{p+q}b_\alpha x_\alpha \tag{3}$$

とすると，（1）によつて

$$V_\xi=\sum_i\sum_j\sigma_{ij}a_i a_j,\quad V_\eta=\sum_\alpha\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}\,b_\alpha b_\beta \tag{4}$$

$$R_{\xi\eta}=\sum_i\sum_\alpha\sigma_{i\alpha}a_i b_\alpha$$

である．さて条件

$$\sum_i\sum_j\sigma_{ij}\,a_i\,a_j=\sum_\alpha\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}\,b_\alpha\,b_\beta=1 \tag{5}$$

の下で $R_{\xi\eta}$ を停留値ならしめる，ab の値を求めて見よう．そのために λ,μ を Lagrange の未定乗数として

$$\sum_i\sum_\alpha\sigma_{i\alpha}a_i b_\alpha-\frac{1}{2}\lambda\sum_i\sum_j\sigma_{ij}a_i a_j-\frac{1}{2}\mu\sum_\alpha\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}b_\alpha b_\beta$$

を夫々 $a_i,\ b_\alpha$ で偏微分して 0 に等しいとおいて次の連立方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\sum_\alpha\sigma_{i\alpha}b_\alpha-\lambda\sum_j\sigma_{ij}a_j=0,\ i=1,\cdots p\\&\sum_i\sigma_{i\alpha}a_i-\mu\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}b_\beta=0,\ \alpha=p+1,\cdots,p+q\end{aligned} \tag{6}$$

これの解を $a=\hat{a},\ b=\hat{b}$ とおくと（5）から

$$\sum_i\sum_j\hat{a}_i\hat{a}_j=\sum_\alpha\sum_\beta\sigma_{\alpha\beta}\hat{b}_\alpha\hat{b}_\beta=1$$

であるべきにより

$$\lambda=\mu=\sum_i\sum_\alpha\sigma_{i\alpha}\hat{a}_i\hat{b}_\alpha=R_{\xi\eta}\ \text{の停留値} \tag{7}$$

従つて求める $R_{\xi\eta}$ の停留値は行列式

$$\begin{vmatrix}-\lambda A & B\\ B' & -\lambda C\end{vmatrix} \tag{8}$$

の根でなければならない．これはまた

$$\lambda^{q-p}\,|\lambda^2A-BC^{-1}B'|=0 \tag{9}$$

と書けるから，$q-p$ 個の根は確かに 0 である．ここで勿論 $q\geqq p$, A, C は正の定符号行列，即ち

$$x_1=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix},\qquad x_2=\begin{pmatrix}x_{p+1}\\ \vdots\\ x_{p+q}\end{pmatrix}$$

は夫々 non-singulor な分布に従うものと考えておく，今

$$F_1AF_1'=I_p,\quad F_2CF_2'=I_q \tag{10}$$

なる non-singulor な行列 F_i をとることが出来るが（9）は

$$\lambda^{q-p}\,|\lambda^2-F_1BC^{-1}B\,F_1'|=0 \tag{11}$$

とも等価で

$$F_1BC^{-1}B'F_1'=F_1B\,F_2'\cdot(F_1B\,F_2')'$$

であるから (11) の根従つて（9）の根は real 且つ non-negative である．これを

$$\rho_1^2,\ \rho_2^2,\cdots,\rho_p^2 \tag{12}$$

とする．

Hotelling は所謂正準変量 ξ, η を用いるならば分散行列が次の型に出来ることを示した.

$$
\begin{array}{c}
\\
p \\ \\ \\ \\
p \\ \\ \\ \\
q-p \\ \\
\end{array}
\begin{array}{ccc}
\overbrace{\qquad\qquad\quad}^{p} & \overbrace{\qquad\qquad\quad}^{p} & \overbrace{\qquad\quad}^{q-p}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
p\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right. \\
p\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\\vdots\\0\end{matrix}}\right. \\
q-p\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\\vdots\\0\end{matrix}}\right.
\end{array}
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & \rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \rho_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \rho_p & 0 & \cdots & 0 \\
\rho_1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \rho_2 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \rho_p & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
$$

即ち行列論の言葉で云えば

$$\sum = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

に対して適当な行列

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{bmatrix}$$

があつて $G\sum G'$ が (13) となるというのである. これは直接行列を計算しても判ることである[4].

さて大さ n の無作為標本を

$$x_{1\nu} = \begin{pmatrix} x_{1\nu} \\ \vdots \\ x_{p\nu} \end{pmatrix}, \quad x_{2\nu} = \begin{pmatrix} x_{p+1,\nu} \\ \vdots \\ x_{p+q,\nu} \end{pmatrix}, \quad \nu = 1,\ 2, \cdots, n$$

$$l_{uv} = \sum_{\nu=1}^{n} (x_{u\nu} - \bar{x}_u)(x_{v\nu} - \bar{x}_v)$$

として

$$\begin{vmatrix} -\gamma\, l_{ij} & l_{i\beta} \\ l_{\alpha j} & -\gamma\, l_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

または

$$|\gamma^2 l_{ij} - \sum_{\alpha,\beta} l_{i\beta} l^{\beta\alpha} l_{\alpha j}| = 0 \tag{15}$$

の正根, 正確には非負の根 $\gamma_1, \gamma_2 \cdots, \gamma_p$ を標本正準相関係数と名づける.

先づ方程式 (15) は x_1, x_2 のそれぞれの non-singular な一次変換では不変であることは明かであろう.

次に問題になるのは, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_p$ は勿論統計量であるから, それの標本分布である

$$\mathfrak{x}_u = \begin{pmatrix} x_{u1} \\ x_{u2} \\ \vdots \\ x_{un} \end{pmatrix}, \quad u = 1, 2, \cdots, p+q.$$

として $\boldsymbol{H}$ を Helmert の直交行列として

$$\boldsymbol{H}\mathfrak{x}_u = \begin{bmatrix} y_u \\ \sqrt{n}\,\bar{x}_u \end{bmatrix} \tag{16}$$

とおくと, 明かに

$$l_{uv} = \mathfrak{x}_u'\mathfrak{x}_v - n\,\bar{\mathfrak{x}}_u\bar{\mathfrak{x}}_v = y_u'y_v \tag{17}$$

先づ最初に x_1, x_2 は互に独立に p, q 次元の正規分布をするものとし，且つ，分散行列は単位行列としておいてよい．

$$a_{ij} \equiv \sum_{\alpha}\sum_{\beta} l_{i\beta}\, l^{\beta\alpha}\, l_{\alpha j} = y_i' \cdot \sum y_\beta\, l^{\beta\alpha}\, y_\alpha' \cdot y_j \tag{18}$$

であるが，この場合には x_2 は fix して考えればよい．(18) を y_i, y_j の双一次形式と考えると係数行列は

$$\boldsymbol{K} = (k_{ij}) = (\sum_{\alpha,\beta} y_\beta\, l^{\beta\alpha}\, y_\alpha') \quad (n-1)\times(n-1) \tag{19}$$

$$k_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} y_{\beta i}\, l^{\beta\alpha}\, y_{\alpha j} \tag{20}$$

より

$$\boldsymbol{K}^2 = \boldsymbol{K} \tag{21}$$

よつて $\boldsymbol{K}$ の固有値は 0 か 1 である．

適当な直交変換 $\boldsymbol{P}:(n-1)\times(n-1)$ を用いて

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}y_i &= z_i \qquad i=1,\cdots,\ p \\ l_{ij} &= z_i z_j \\ a_{ij} &= z_{i1}z_{j1} + \cdots\cdot z_{iq}z_{jq} \end{aligned} \tag{22}$$

と出来る．よつて

$$b_{ij} \equiv z_{iq+1}z_{jq+1} + \cdots\cdot + z_{in-1}z_{jn-1} \tag{23}$$

とおくならば (15) は

$$|a_{ij} - r^2(a_{ij}+b_{ij})| = 0 \tag{24}$$

となつて a_{ij}, b_{ij} は互に独立で夫々 Wishart 分布

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\, 2^{\frac{pq}{2}}\,\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q-1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{q-p}{2}\right)}|A|^{\frac{q-p-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}Sp(A)} \\ \cdot\ &\frac{1}{\pi^{\frac{p(p-1)}{4}}\, 2^{\frac{p(n-q-1)}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-q-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-q-2}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-q-1-p}{2}\right)}|B|^{\frac{n-q-p-2}{2}}e^{-\frac{1}{2}Sp(B)} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

に従う．これから，求める分布は[5]

$$\theta_i = \gamma_i^2 \qquad i=1,\ :\ \cdots,\ p$$

として

$$\begin{aligned} &\pi^{\frac{p}{2}}\prod_{i=1}^{p}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1-i}{2}\right)}\prod_{i=1}^{p}(1-\theta_i)^{\frac{n-p-q-2}{2}}\prod_{i=1}^{p}\theta_i^{\frac{q-p-1}{2}} \\ &\times\prod_{i<j}(\theta_i-\theta_j) \\ &0 \leq \theta_p < \theta_{p-1} < \cdots\cdot < \theta_2 < \theta_1 < 1 \end{aligned} \tag{26}$$

Non-null case の分布は exact なものは利用出来る程に便利にはなつていないようである．[6]

§2. 増山の相関係数

増山氏は相関を考えるベクトル変量の次元を等しいとしているが，これは本質的なことではない．増山氏の論旨をわれわれ流に翻訳して見ると次のようになる．

g, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ は夫々 non-singular な p, $\{q_1, \cdots q_m\}$ 次元正規分布に従うベクトル変量

として $\{u_i\}$ $i=1,\cdots,m$ は互に独立とする．ここでも $q_i \geqq p$, $i=1,\cdots m$ としておく．

$$v_i = [E(u_i u_i')]^{-\frac{1}{2}} \cdot u_i \tag{27}$$

とすれば

$$E(v_i v_j') = \delta_{ij} I \tag{28}$$

である．ここで偏回帰に類似の手続きをやる．今

$$\mathfrak{G}_i \ ; \ p \times q_i \qquad i=1,\cdots,m$$

として

$$\zeta = \mathfrak{G}_1 v_1 + \mathfrak{G}_2 v_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{G}_m v_m \tag{29}$$

として係数行列 $\mathfrak{G}_i$ は

$$J \equiv E(g-\zeta)'(g-\zeta) = \text{minimum} \tag{30}$$

となる如く定めて，$\mathfrak{G}_i$ を g の v_i に対する回帰テンゾルと名づける．

これを求めるには

$$(g-\zeta)'(g-\zeta) = S_p(g-\zeta)(g-\zeta)' \tag{31}$$

なる事実を利用する．

$$S_p(g-\zeta)(g-\zeta)' = S_p\{gg' - \sum_1^m g_i v_i' \mathfrak{G}_i' - \sum_1^m \mathfrak{G}_i v_i g' + \sum \mathfrak{G}_i v_i v_j' \mathfrak{G}_j'\} \tag{32}$$

よつて

$$\begin{aligned} J \equiv {} & S_p\{E(gg') - \sum_1^m E(gv_i')\mathfrak{G}_i' - \sum_1^m \mathfrak{G}_i E(v_i g_i' + \sum_{ij} \mathfrak{G}_i E(v_i v_j')\mathfrak{G}_j'\} \\ = {} & S_p\{\sum_1^m (\mathfrak{G}_i - E(gv_i')(\mathfrak{G} - E(gv_i'))' \\ & \qquad + E(gg') - \sum_1^m E(gv_i')\cdot E(v_i g')\} \geqq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

よつて求める回帰テンゾルは

$$\mathfrak{G}_i = E(gv_i') \qquad i=1,\cdots,m \tag{34}$$

であつて，**J** の **minimum value** は

$$J_0 = S_p\{E(gg') - \sum_1^m E(gv_i')\cdot E(v_i g')\} \geqq 0 \tag{35}$$

であるが，これが 0 になるのは

$$g = \zeta$$

のときに限り

$$\zeta = \sum_1^m E(gv_i')\cdot v_i = \sum_1^m E(gu_i')\cdot E(u_i u_i')^{-1}\cdot u_i \tag{36}$$

よつて，g の u_i に対する回帰テンゾルは

$$E(gu_i')\cdot E(u_i u_i')^{-1} \tag{37}$$

である．

一般に g の u に対する回帰テンゾルを

$$E(gh')\cdot E(hh')^{-1} \tag{38}$$

で定義する．そして $\rho^2(gh)$ として，g の h に対する回帰テンゾルと．h の g に対する回帰テンゾルの積の Spur の $\dfrac{1}{p}$ を取る．これが増山氏の定義である．

これに対する統計量を求めるには母平均の代りに，

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^m (x_{u\nu} - \bar{x}_u)(x_{v\nu} - \bar{x}_v) = [x_u x_v]$$

を用いて

$$r^2(x_1;x_2)=\frac{1}{p}S_p\{[x_1x_2'][x_2x_2']^{-1}[x_2x_1'][x_1x_1']^{-1}\} \tag{39}$$

として定義する.

これ即ち

$$\rho^2(x_1;\ x_2)=\frac{1}{p}(\rho_1{}^2+\cdots\cdots+\rho_p{}^2)$$

$$r^2(x_1;\ x_2)=\frac{1}{p}(r_1{}^2+\cdots\cdots+r_p{}^2) \tag{39}''$$

であることが判る.

§3. 増山の相関係数の標本分布

3.1. Null-case, $\rho_1=\rho_2=\cdots\cdots=\rho_p=0$

この場合には, $\theta_i=r_i^2,\ i=1,2,\cdots\cdots,p$ の分布密度は (26) によつて

$$\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\prod_1^p\Gamma\left(\frac{q+1-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1-i}{2}\right)}\prod_{i=1}^p\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{u-q-i}{2}\right)}\cdot\prod_1^p\theta_i^{\frac{q-p-1}{2}}\prod_1^p(1-\theta_i)^{\frac{u-p-q-2}{2}}\prod_{i<j}(\theta_i-\theta_j) \tag{40}$$

$$0\leq\theta_p<\theta_{p-1}<\cdots\cdots<\theta_1\leq 1$$

となる. $n\theta_i=\zeta_i$ とすれば $\zeta_1,\cdots\cdots,\zeta_p$ の分布密度は

$$C(p,q)\equiv\pi^{p/2}\Big/\prod_{i=1}^p\Gamma\left(\frac{q+1-i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)$$

とおくと

$$C(p,q)\cdot\prod_{i=1}^p\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q-i}{2}\right)}n^{-\frac{pq-1}{2}}\prod_1^p\zeta_i^{\frac{q-p-1}{2}}\prod_1^p\left(1-\frac{\zeta_i}{n}\right)^{\frac{n-p-q-2}{2}}\prod_{i=j}(\zeta_i-\zeta_j)$$

だから, ここで $n\to\infty$ として

$$\left(1-\frac{\zeta_i}{n}\right)^{\frac{u-p-q-2}{2}}\to e^{-\frac{\zeta_i}{2}}$$

$$\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-q-i}{2}\right)}n^{-\frac{p(q-1)}{2}}\to 1$$

なることを用いて, $\zeta_1\cdots\cdots,\zeta_p$ の漸近分布密度は

$$C(p,\ q)\prod_1^p\zeta_i^{\frac{q-p-1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum^p\zeta_i}\prod(\zeta_i-\zeta_j) \tag{41}$$

$$0\leq\zeta_p<\zeta_{p-1}<\cdots\cdots<\zeta_1<\infty$$

となる

ところで増山の相関係数 r^2 は

$$pr^2=\theta_1+\cdots\cdots+\theta_p=\frac{1}{n}(\zeta_1+\cdots\cdots+\zeta_p) \tag{42}$$

であつて, (41) より $\zeta_1+\cdots\cdots+\zeta_p$ の $c\cdot f$ は

$$E(\exp it(\zeta_1+\cdots\cdot+\zeta_p))$$
$$= C(p,q)\cdot\int\cdots\cdot\int\prod_1^p \zeta_i^{\frac{q-p-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(1-2it)\sum\zeta_i}\prod_{i<j}(\zeta_i-\zeta_j)\,d\zeta_1\cdots\cdot d\zeta_p$$
$$0\le\zeta_p<\cdots\cdot<\zeta_1<\infty$$
$$= (1-2it)^{-\frac{pq}{2}} \tag{43}$$

よつて $\zeta_1+\cdots\cdot+\zeta_p$ の漸近分布は自由度 pq の χ^2-分布である．即ち

$$npr^2 = \chi^2_{pq} \tag{44}$$

3. 2 Non-null case. この場合には P. L. Hsu による次の結果を利用する.[7]
母集団正準相関係数について次のような仮定をする.

$$s=\mu_1+\cdots\cdot+\mu_\nu,\ s_i=\mu_1+\cdots\cdot+\mu_i,\ s_1\equiv\mu_1,\ s_\nu\equiv s,\ s<p$$
$$\rho_1=\rho_2=\cdots\cdot=\rho_{s_1}=\rho_1{}^*$$
$$\rho_{s_1+1}=\rho_{s_1}=\cdots\cdot=\rho_{s_2}=\rho_{2*}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho_{s_{\nu-1}+1}=\rho_{s_{\nu-1}+2}=\cdots\cdots=\rho_s=\rho_\nu{}^*$$
$$\rho_{s+1}=\rho_{s+2}=\cdots\cdots=\rho_p=0$$
$$0<\rho_\nu{}^*<\rho_{\nu-1}{}^*<\cdots\cdot<\rho_1{}^*\le 1$$

このような場合に

$1\le k\le\nu$ に対しては

$$\eta_i=n^{\frac{1}{2}}(1-\rho_k{}^*)^{-1}(r_i-\rho_k{}^*),\ i=s_{k-1+1},\cdots\cdot,s_k$$

$s+1\le i\le p$ に対しては

$$\eta_i=n^{\frac{1}{2}}r_i$$

とおくと，$(\eta_1,\cdots\cdot,\eta_{s_1})$，$(\eta_{s_1+1},\cdots\cdot,\eta_{s_2})$，$\cdots\cdot(\eta_{s_{\nu-1}+1},\cdots\cdot,\eta_s)$，$(\eta_{s+1},\cdots\cdot,\eta_p)$ の同時分布は漸近的に次の密度をもつ

$$\prod_{k=1}^{\nu}\frac{1}{2^{\frac{\mu_k(\mu_k+1)}{4}}\prod_1^{\mu_k}\Gamma\left(\frac{i}{2}\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{s_{k-1}+1}^{s_k}\eta_i^2\right)\cdot\prod_{i<j}(\eta_i-\eta_j) \tag{45}$$
$$\times\, 2^{q-s-\frac{1}{2}(p-s)(q-s)}C(p-s,\,q-s)\prod_1^p\eta_i^{q-p}e^{-\frac{1}{2}\sum_{s+1}^{p}\eta_i^2}\prod_{i<j}(\eta_i^2-\eta_j^2)$$
$$L_k=n(r^2_{s_{k-1}+1}+\cdots\cdot+r^2_{s_k})=R_k+2P_k\sum\eta_i+Q_k\sum\eta_i^2 \tag{46}$$
$$R_k\equiv n\mu_k\rho_k{}^{*2},\ P_k\equiv\sqrt{n}\,\rho_k{}^*(1-\rho_k{}^{*2}),\ Q_k\equiv\frac{(1-\rho_k{}^{*2})^2}{n} \tag{47}$$

で，L_k の $c\cdot f$ は

$$\varphi_k(t)\,e^{itR_k-\frac{2t^2P_k}{1-2itQ_k}}\cdot(1-2itQ_k)^{-\frac{\mu_k(\mu_k+1)}{4}} \tag{48}$$

よつて $L=\sum_{k=1}^{\nu}L_k+n(r^2_{s+1}+\cdots\cdot+r_p^2)$ の cummulant function

$$\phi(t)=\log\prod_1^k\varphi_k(t)\cdot\varphi(t)$$
$$=it\sum_{k=1}^{\nu}R_k-2t^2\sum_{k=1}^{\nu}\frac{P_k}{1-2itQ_k}-\sum_{k=1}^{\nu}\frac{\mu_k(\mu_k+1)}{4}\log(1-2itQ_k)$$
$$-\frac{(p-s)(q-s)}{2}\log(1-2it) \tag{49}$$

となる.

$$\phi(0) = 0$$

$$\phi'(t) = i\sum R_k - 4t\sum \frac{P_k}{1-2itQ_k} - 4t^3\sum \frac{P_kQ_k}{(1-2itQ_k)^2}$$
$$+ 2i\sum \frac{\mu_k(\mu_k+1)}{4}\frac{Q_k}{1-2itQ_k} + (p-s)(q-s)\frac{2i}{1-2it}$$

$$\phi'(0) = i\sum R_k + i\sum \frac{\mu_k(\mu_k+1)}{2} Q_k + 2i(p-s)(q-s) \tag{50}$$

$$\phi''(t) = -4\sum \frac{P_k}{1-2itQ_k} - 8it\sum \frac{P_kQ_k}{(1-2itQ_k)^2} - 12t^2\sum \frac{P_kQ_k}{(1-2itQ_k)^2}$$
$$- 16t^3\sum \frac{P_kQ_k^2}{(1-2it_kQ_k)^3} - 4\sum \frac{\mu_k(\mu_k+1)}{2}\frac{Q_k^2}{(1-2itQ_k)^2}$$
$$- (p-s)(q-s)\frac{4}{(1-2it)^2}$$

$$\phi''(0) = -4\sum P_k - 2\sum \mu_k(\mu_k+1)Q_k^2 - 4(p-s)(q-s) \tag{51}$$

これより cummulant が求められる．

(1954. 11. 25)

(1) M. Masuyama: Correlation between Tensor Quantities. Proc. Phys-Math. Soc. Japan. **21.** 1939, 638.
M. Masuyama: Tensor Characteristic of Vector Set and its Application to Geophysics. ibid **21**, 1939. 647.
M. Masuyama: On th Meaning of the Symmetric Correlation Coeff. between Vector Sets. ibid. **22.** 1940, 579.
M. Masuyama: On the subdepenendency, ibid, **22.** 1940, 855.
M. Masuyama: The Voriance Tensor of Vecter Sets and a Nature of the Symmetric Correlation Coeff. ibid. **23.** 1940, 858.
M. Masuyama: The Standard Error of the Mean Vector. ibid. **23.** 1941, 194.
M. Masuyama: The Normal Law of Frequency Vector Quantities, ibid. **23.** 1941, 196.
M. Masuyama: On the Characteristic Values of the Correlation Tensor and a Measure of Correlation between Vector Quantities ibid. **23**,1941, 199.
M. Masuyama: The Totally Orthonormalized Vecter Set and the Normal Form of Correlation Tensor ibid. **23**, 1941, 346.
M. Masuyama: The Mean Angle betwean Two Vector Sets. ibid. **23**, 1941, 351.
M.Masuyama: Correlation Coefficient between Two Sets of Complex Vectors, ibid. **23**, 1941.
(2) 例えば §3 相関測度に対する要請は勿論これは母集団定数に対するものと解すべきである．しかるに §2 の (2.6) 式を始めとして，§6 の相関テンゾルはすべて標本値である．
(3) H. Hotelling: Relation Between Two Sets of Variation, Biom. **28.** (1936), pp. 321—377.
(4) 例えば，Walfer L. Deemer & Ingram Olkin: The Jacobian Certain Matrix Transformations Useful in Multivariate Analysis, Biom. **38**, 1951, 345—367.
(5) 例えば，S. S. Wilks. Mathematical Statistics, 1946. (講義プリント).
(6) M. S. Bartlett: The General Canonical Correlation Distribution A. M. S. **18**, 1947, pp. 1—17.
(7) P. L. Hsu: On the limiting distributon of the canonical correlation, Biom. **32**, 1941—42 pp. 38—45.