# テンソル量の統計の理論に就て

佐 々 木 達 治 郎

(1955 年 2 月 受付)

## On the theory of statistics concerning the quantities characterized as tensors

In the present statistical theory variables are considered as vectors, and hence the statistical phenomena are treated rigid dynamically. But there are many variables which have the character of tensors, and Instrtute of Statistrcal mathematrcs the phenomena should be treated elastically.

現在の統計理論に於ては，統計集団は互に距離の変らない個物の集団と見做されているから，如何なる統計的取扱をしても結局は剛体力学的取扱しか出来ない．集団は何かの影響を受けている状態にあるのが普通であつて，個物の距離は外部からの影響によつて変化すべきものと思われる．現在の統計理論では平均値，variance，covariance なる量を用いているが，これ等の量は剛体力学に於ける centre of gravity, moment of inertia, product of inertia と対応する量であつて，これ等の量を用いる統計解析は剛体力学と何等変る所がない．例えば分散分析は複雑な形の慣性能率の求め方 factor analysis は廻転運動と対応している．

統計集団内に於て個物の相互距離に変動が生ずる現象は当然 tensor を用いて表現せらるべきであつて，統計現象にこのような性質がある時は変数を vector として取扱つてはならない．統計理論に於て現れる tensor は variance, correlation 等であるが，variance の sum が invariant なる時は scalar である．これ等のことはよく注意しなければならない．Matrix notation がよく理論に用いられる．この理論に於て one column matrix は vector として表わされているが，弾性力学に於ては tensor の場合もある．これに就て少しく述べたい．

三次元空間に於て歪力 $\tau_{ij}$ と歪 $e_{ij}$ との間の関係は，$\tau_{ij}$ 及び $e_{ij}$ は symmetric matrix で表わされる性質を有する故 $\tau_{ij}=\tau_{ji}$, $e_{ij}=e_{ji}$ $(i, j=1,2,3)$ である．

又 $a_{kl}$ を弾性常数とすれば，これもまた symmetric matrix で表わされる．そして $\tau$, $e$, $a$ の間には

$$\begin{pmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{33}\\ \tau_{23}\\ \tau_{13}\\ \tau_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46}\\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56}\\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_{11}\\ e_{22}\\ e_{33}\\ e_{23}\\ e_{13}\\ e_{12}\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

の関係がある．この (1) 式のように表わすと，$\tau$ 及び $e$ は vector と考えられるが，実際は対称テンソルの異つた成分を一列の行列で表わしただけである，$n$ 次元空間の対称テンソルは $\frac{n(n+1)}{2}$ の異つた成分を有するから，弾性係数は $\frac{n(n+1)}{2}$ 次元の対称マトリックスで表わされる．弾性常数の数は弾性体の性質によつて定ること勿論である．

$\tau_{ij}$ の間の関係は弾性体の釣合によつて定り，外部及び内部の影響も釣合に於て考慮すればよい．又 $e_{ij}$ より歪エネルギーが定り，歪エネルギー最小の条件より $e_{ij}$ 間の関係が定る．統計理論では (1) 式のような関係はよく現れるのであるが，$\tau$ 及び $e$ をベクトルと考えて仕舞うのが一般であつて，ベクトル統計理論を作つて行くから現象の取扱が固苦しく，統計的解析の理論は実際現象と一致しないと思われる．実際問題として座標の変換を行つても幾何学的になり，テンソルに於ける座標変換の如く柔軟にならず，見方を変えた時に要因のきき方の変化が出て来ない．

テンソル統計理論を進めて行くには現象の性質をよく調べて見て，データの取方に注意する必要があるので今直ちに如何に発展すべきかは予言出来ないが，追々この方面の研究を行つて見たいと思う．然しこの理論を発展させるには数学的解析が難かしく，多くの場合数値計算による必要があるので，適当な計算機械を考案することが肝要である．

統 計 数 理 研 究 所