Kollektiv について

鈴　木　雪　夫

(1954 年 5 月 受付)

On the Kollektiv

In the present paper I want to give an expositin to the results of R. von Mises, A. Wald, W. Feller and J. Ville concerning the "Kollektiv", and to make some remarks upon them.

Institute of Statistical Mathematics.

§1. R. v. Mises は確率論に基礎を与へる為に，Kollektiv といふ概念を導入した．彼の理論は数学的に稍ゝ厳密性を欠くところがあり，von Mises 自身及び Wald により改良の努力が為された。

Wald の寄与は以下に述べる問題を解いて，Kollektiv 概念の無矛盾性を証明したことにある．次に Wald の結果について述べ，二，三の点について解説しよう．

問題

R: 標識空間

$\mathfrak{S}$: Auswahlvorschrift (選出行為) の系

$\mathfrak{F}$: R の部分集合よりなる系で，R 自身も含む．

μ: $\mathfrak{F}$ の上で定義された，nicht-negativ, additiv の集合函数で，$\mu(R)=1$ が成立つものとする．

この時，μ を分布函数とする Kollektiv が存在する為の条件は如何？

此の問題に対する Wald の解は，次のようである．

I.

R: 有限箇の元 (merkmal) よりなる．

$\mathfrak{S}$: 可附番箇の Auswahlvorschrift よりなる系，但し同じものを選出する Auswahlvorschrift (Identität) を含むものとする．

$\mathfrak{F}$: R のあらゆる部分集合よりなる系．

μ: $\mathfrak{F}$ の上で定義された，nicht-negativ, additiv, $\mu(R)=1$ なる函数．

そうすると，μ を分布函数とする Kollektiv $K(\mathfrak{S},\mathfrak{F})$ が Kontinum の濃度で存在する．

II.

R: 任意の濃度の無限集合．

$\mathfrak{S}$: 同上

$\mathfrak{F}$: R のすべての部分集合よりなる系．

μ: $\mathfrak{F}$ の上で定義された nicht-negativ, additiv, $\mu(R)=1$ なる集合函数．

そうすると，μ を分布函数とする Kollektiv $K(\mathfrak{S},\mathfrak{F})$ が存在するために必要且つ十分な条件は，$\sum\mu(m_i)=1$ となる merkmal の列 $\{m_i\}_{(i=1,2,\dots)}:(m_i\neq m_j,\ \text{wenn}\ i\neq j)$ が存在することである．

III.

R: 任意の濃度の無限集合．

$\mathfrak{S}$： 同上

$\mathfrak{K}$： R の部分集合の可附番箇よりなる Körper とする．玆に $\mathfrak{K}$ が Körper とは，$\mathfrak{K}$ に属する任意の二元をとると，その和も，積も再び $\mathfrak{K}$ に属することである．$\mathfrak{K}$ は R も含むとする．

μ： $\mathfrak{K}$ で定義された，nicht-negativ, additiv, $\mu(R)=1$ なる集合函数．

$\mathfrak{F}$： R の $\mathfrak{K}$ に関して Jordan の意味で，μ-可測な部分集合のすべてよりなる系．

そうすると，μ を分布函数とする Kollektiv $K(\mathfrak{S},\mathfrak{F})$ が Kontinum の濃度で存在する．

以上が Wald の得た主な結果で，特に注意すべきことは，

1） $\mathfrak{S}$ に可附番無限なる条件がついてゐること．

2） I．に於ける $\mathfrak{F}$ に関する条件．

2） I．に於て，μ には有限加法性（完全加法性ではなく）を条件としてゐること．

である．

1）の意味については，林知己夫「これくていふ序説」講究録3～5巻に詳しい．

2）について．$\mathfrak{F}$ が**可附番箇の元よりなる** Körper $\mathfrak{K}$ に関して Jordan **の意味で** μ-可測な，すべての集合よりなる，といふ条件の下では，$\mathfrak{K}$ に関する Kollektiv が直ちに $\mathfrak{F}$ に関する Kollektiv であり，$\mathfrak{K}$ の可附番性が Kollekiv の存在証明に本質的な役割を果してゐる．

若し更に $\mathfrak{F}$ を Lebesgue の意味で，μ-可測なすべての集合よりなる系 $\bar{\mathfrak{F}}$ に迄，拡張するならば，最早 Kollektiv $K(\mathfrak{S},\mathfrak{F})$ は一般には存在し得ない．又 J. Ville の示してゐる様に，若し $\mathfrak{F}$ を拡張して G_δ をすべて含むもの $\mathfrak{F}_1$ にすると，Kollektiv $K(\mathfrak{S},\mathfrak{F}_1)$ は一般には存在し得ない．玆に G_δ とは $\prod_{i=1}^{\infty} O_i$，（O_i；開集合）を表はすものとする．

3）について．2）について述べたことから当然の帰結として，μ には有限加法性のみを仮定する，若し完全加法性を仮定すれば（diskerte Verteilung の場合を除いて）矛盾に逢着することが容易に判る．

§2. 次に，Feller による測度論よりの Kollektiv の存在証明について述べよう．

$R,\mathfrak{S},\bar{\mathfrak{K}},\mu,\mathfrak{F}$ は I．と全く同じとする．先づ，Wald に従つて Auswahlvorschrift を定義する．

n を任意の自然数とし，$R\ni{}^{\forall}P_{i(i=1,2,\dots,n)}$ に対し，$f_n(P_1,P_2,\cdots,P_n)=1$ 又は 0，$f_0=1$ 又は 0 なる函数の列 $\{f_i\}_{(i=0,1,2\ \dots\text{ad. inf.})}$ が定まり，$f_i=1$ ならば P_{i+1} を P^* の中に入れ，然らざれば入れないことにきめる．（玆に P^* は $P_1,P_2,\cdots P_n,\cdots$ の部分列とする）こうして $\{f_i\}_{(i=1,2,\dots\text{ad. inf.})}$ に Auswahlvorschrift V が 1対1に対応する．又 f_i のことを Auswahlfunktion と云ふことにする．

今 $P=\{P_1,P_2,\cdots\}$（$R\ni P_{i,i=1,2,\dots}$）なる無限列から V によつて部分列 $P^*=\{P_{r_1},P_{r_2},\cdots\}$ を作る．

$\mathfrak{F}\ni{}^{\forall}F$ に対して $A_N(F;\ P,V)$ により，$k\leqq N, P_{r_k}\in F$ となる P_{r_k} の箇数を表はす．このとき P が V に関して regulär とは，P^* が有限で切れるか，又は

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}A_N(F;\ P,V)=\mu(F)$$

が $\mathfrak{F}$ に属するすべての F に対して成立つことであるとする．

P が $\mathfrak{S}$ に属するすべての V に関して regulär のとき，P を Kollektiv といふ．

次に二つの仮定をおく，

（1） 連続性の仮定

即ち $\mathfrak{F}\ni F_{i,(i=1,2,\dots)}$，$F_1\supset F_2\supset\cdots\to$空集合，ならば $\lim_{i\to\infty}\mu(F_i)=0$ が成立つとする．

然らば $\mu(F)$ を一つの σ-Körper $\bar{\mathfrak{F}}$ の上で定義された完全加法性をもつ集合函数に拡張することが出来る．次に無限積空間 $R^\infty=R\times R\times\cdots$，を考へ，ここへ Maß を次の如く入れる．

R^∞ の任意の筒集合 $F_1\times F_2\times\cdots\times F_n$（但し $\mathfrak{F}\ni F_{i(i=1,2,\ldots,n)}$）の Maß $|F_1\times F_2\times\cdots\times F_n|$ を $\mu(F_1)\mu(F_2)\cdots\mu(F_n)$ と定義する．この Maß $||$ をすべての筒集合を含む最小の σ-Körper $\mathfrak{B}$ の上に拡張することが出来る．

特に $|R^\infty|=1$ である．

（2） Auswahlvorschrift の可測性の仮定．

Auswahlvorschrift $V=\{f_i\}_{(i=0,1,2,\ldots)}$ に於いて，$f_{i(i=0,1,2,\ldots)}$ が R^∞ で可測函数であるとき，V は可測であるといふ．

今 $\mathfrak{F}$ に属する任意の F と，$\mathfrak{S}$ に属する任意の Auswahlvorschrift V とに関して $\alpha_{n,k}$ を次の条件を満足する R^∞ の点 P の集合とする．（玆に n,k は 0 又は任意の自然数とする）．

条件 $P=\{P_1,P_2,P_3,\cdots\}$ から V によつて部分列 $P^*=\{P_{r_1},P_{r_2},P_{r_3},\cdots\}$ を作るとき，

i） $\{r_1,r_2,\cdots,\}$ が少くとも n 項を実際に含む．

ii） $P_{r_1},P_{r_2},P_{r_3},\cdots,P_{r_n}$ の中正確に k 箇が F に属する．

当然 $n<k$ のときには，$\alpha_{n,k}$ は空集合．

そうすると，V が可測なことから $\alpha_{n,k}$ が可測となり，

$$|\alpha_{n,k}|\leqq\binom{n}{k}\{\mu(F)\}^k\{1-\mu(F)\}^{n-k}$$

が成立つ．

この証明は n と k についての帰納法による．（例へば，林「これくていふ序説」参照．）

次に

$$(2.1)\quad \Big|\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{|k/n-\mu(F)|>\varepsilon}\alpha_{n,k}\Big|\leqq\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{|k/n-\mu(F)|>\varepsilon}|\alpha_{n,k}|\leqq\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{|k/n-\mu(F)|>\varepsilon}\binom{n}{k}\{\mu(F)\}^k\{1-\mu(F)\}^{n-k}$$

然るに

$$\sum_{|k/n-\mu(F)|>\varepsilon}\binom{n}{k}\{\mu(F)\}^k\{1-\mu(F)\}^{n-k}\xrightarrow[\text{(Asymptotisch)}]{}\frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{n}\,\varepsilon/\sqrt{2\mu(F)\{1-\mu(F)\}}}^{\infty}e^{-x^2}\,dx$$

が成立ち，且つ

$$\int_{\sqrt{n}\,\varepsilon/\sqrt{2\mu(F)\{1-\mu(F)\}}}^{\infty}e^{-x^2}dx<\frac{\sqrt{2\mu(F)\{1-\mu(F)\}}}{2\sqrt{n}\,\varepsilon}e^{-n\varepsilon^2/2\mu(F)\{1-\mu(F)\}}\quad\text{（部分積分）}$$

が成立つ，従つて（2.1）の右辺は

$$(2.2)\qquad K\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\varepsilon}e^{-n\varepsilon^2/2\mu(F)\{1-\mu(F)\}}\quad（K\ \text{は常数}）$$

よりも小さい．（2.2）は収斂し，従つて $N\to\infty$ のとき，0 に限りなく近づく．

それ故

$$\lim_{N\to\infty}\Big|\sum_{n=N}^{\infty}\sum_{|k/n-\mu(F)|>\varepsilon}\alpha_{n,k}\Big|=0$$

今，$\alpha(V,F,\varepsilon)=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=N}^{\infty}\sum\limits_{|k/n-\mu(F)|>\varepsilon}\alpha_{n,k}$ とおくと

$$|\alpha(V,F,\varepsilon)|=0$$

従つて，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\alpha(V,F,\varepsilon)=\alpha(V,F)$ とおくと，

$$|\alpha(V,F)|=0$$

$\mathfrak{K}$ も $\mathfrak{S}$ も可附番集合であるから

$$|\sum_{\mathfrak{S} \ni F}\sum_{\mathfrak{F} \ni V}\alpha(V,F)|=0$$

従つては，Kollektiv $K(\mathfrak{S},\mathfrak{K})$ maβ 1 で存在する．$K(\mathfrak{S},\mathfrak{K})=K(\mathfrak{S},\mathfrak{F})$ であるから，$\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{F}$ (Jordan-körper) に関する Kolleektiv となる R^∞ の点の集合の測度は 1 である．

上述の証明に於ける，μ の完全加法性と，Auswahlvorschrift の可測性の仮定を除くことにより Wald の条件の場合が得られる．

§3. 次に述べる方法により完全加法性と Auswahlvorsckrift の可測性の仮定を同時に不要にすることが出来る．

$\mathfrak{K}$ は可附番集合であるから，その元を並べて $\{\varphi_i\}_{(i=1,2,3,\ldots)}$ とする．

任意の自然数 n に対し，R に於ける diskrete な Maß μ_n なを次の如く定める．

$\varphi_1,\varphi_2,\cdots\cdots,\varphi_n$ とそれらの余集合から共通部分をとる操作により，互に素である $\psi_1,\psi_2,\cdots\cdots,\psi_N$ $(N\leqq 2^n)$ が作られ，$n\geqq i$ なる t に対し，

$$\varphi_i=\sum\psi_{i_j}\ (i_j\leqq N)$$

と表はされる．明らかに $\psi_{J(J=1,2,\ldots,N)}$ は $\mathfrak{K}$ に属する．

$\psi_{J(J=1,2\cdots,N)}$ の任意の元 Q_J をとり，$\mu_n(Q_J)=\mu(\psi_J),\mu_n(\psi_J-Q_J)=0$ $_{(J=1,2,\ldots,N)}$ とする．

然らば，

$$\sum_{j=1}^{N}\mu_n(Q_J)=1,\ \text{且つ}\ \mu_n(\varphi_i)=\mu(\varphi_i)_{(i=1,2,\ldots,n)}$$

次に，この μ_n を用ひて R^∞ に測度を入れる．

§2. に於けると同じ様に筒集合に対して

$$|F_1\times F_2\times\cdots\cdots\times F_n|=\mu_1(F_1)\mu_2(F_2)\cdots\cdots\mu_n(F_n)$$

と定義し，これを R^∞ に拡張する．

このとき，$n\times R\times\cdots\cdots\times n$ なる筒集合の中には高々 $2\times 2^2\times 2^3\times\cdots\cdots\times 2^n$ ケの点に確率が分布している．

従つて，R^∞ の任意の部分集合が可測集合となり Auswahlvorschrift の可測性を仮定する必要はない．すべての Auswahlvorschrit が可測である．更にこの場合には確率の与へられる点が可附番箇なることにより，完全加法性が自然に満されている．

今 $F=\varphi_i$ とし，R^∞ の点 $P=(P_1,P_2,\cdots\cdots)$ から Auswahlvorschrift V により $P^*=(P_{r_1},P_{r_2},\cdots\cdots)$ が作られたとし，$r_k\geqq i$ なる k の中最小のものを $r_k{}'$ とする．

§2. で考へた $\alpha_{n,k}$ を規定する条件の代りに，

i) $\{r_k{}',r_k{}'_{+1},\cdots\cdots,r_k{}'_{+n},\cdots\cdots\}$ が少くとも n 項を実際に含む．

ii) $P_{r_k{}'},P_{r_k{}'+1},\cdots\cdots,P_{r_k{}'+n-1}$ の中正確に k 箇が F に属する．

とすれば §2 と全く同じ様に，Kollektiv となる R^∞ の点の集合の Maß は 1 である．

こうして，測度論的確率の立場からも，Kollektkv が矛盾なく考へられることが判る．

（統計数理研究所）