

# 測定誤差の統計的取扱ひ

— 森林調査におけるトラバース測量の誤差の問題 —

植 松 俊 夫

(1954 年 4 月受付)

## Statistical Treatment of Errors in Measurement

— On the errors in measurement by traverse method in forest survey —

Toshio UEMATSU

We shall discuss here on the errors in measurement by traverse method in forest survey, as a case of statistical treatment of errors in measurement under complicated environment. The point of this paper is to estimate the error  $\Delta S$  of an area determined by traverse method. Complicated features which occur in natural field are treated as they are. In general case, the variance  $V(\Delta S)$  of  $\Delta S$  is calculated, and so  $\Delta S$  is estimated by Tchebyscheff's inequality. In some particular case,  $\Delta S$  is shown to be distributed as Gaussian type approximately for sufficiently large area.

Furthermore the orders of errors are given numerically by analysing the data we obtained in forest survey.

Institute of Statistical Mathematics.

測定誤差の妥当な取扱ひは、統計調査から統計的結論を得ようとする過程に於て極めて大切な問題である。その簡単なものについては従来屢々考へられ、色々取扱はれてゐるが、自然的、人間的条件のいりまじつてくる現象のやうなものに於て、こみいつた条件を含めて総合的な扱ひをしたものは見当らない。然しこのままではあまりにも形式的で単純なため、少し立入つた事を理論的に取扱はうとする時、役に立たないのである。このやうな総合的な取扱ひは非常に難かしいが、真に有効なる議論をなしうる為にはどうしても必要である。

かかる観点に於て取上げるべき問題の一つとして、ここに森林調査におけるトラバース測量の誤差の問題を取扱つた。近時、森林調査に sampling が用ひられるやうになつたが、その実施に於て測量は不可欠のものである。故に測量における誤差を明確にしておく事は、調査結果の信頼性に関はる大切な事である。これが特にこの問題を取扱かつた所以である。

なほこの測定の誤差は単に机上で考へられるやうなものではなく、困難なる現地状況の下に人間が測定するといふ事を考へに入れて処理しなければならない。実験室的な操作からのみでは危険なものである。

トラバース測量といふのは、地上に設けた測点を連ねた多角形にそつて測量を行ふものをいふ。多角形の各頂点に於て、隣接する頂点間の斜距離、傾角、方位角を測定し、それにもとづいて各点を決定する。これは、大きな area の周測、図面作成、面積算定に用ひられる。大きな誤差を伴ふ

可能性が多く、あり良い測量法ではないが、森林調査に於ては殆どこれが用ひられる。

トラバース法を行ふには、トランシットにより角度の測定を行ふべきであるが、森林調査の現状では、ポケットコンパスが用ひられてゐる。又前視の測定だけしか行はぬ場合もある。器械高の測定は行はれず、pole も現地で灌木を切つて手拭をまいて間に合はせ、あまり正確ではない。斜距離の測定は間繩によつてゐる。

先づ斜距離、傾角、方位角の誤差の分析を行ひ、次にそれがどれ程の面積の誤差を生ずるかをしらべ、最後に、修正法について論ずる。

§1 に於ては斜距離、傾角、方位角の誤差の order を押へる為、森林調査で得たデータの分析を行ふ。ついで §2 で、これらの誤差から面積の誤差を推定する一般的な議論及びその二、三の場合への適用を示し、最後に §3 で修正法により面積誤差を修正する事の統計的な意味を論ずる。

以後の議論に於て systematic error の事をいつも bias と呼ぶ事にする。又単に誤差といふ時は bias + random error 即ち真の誤差の意味に用ひる事にする。

データは次のやうなものがえられてゐる。2つの組 A, B が同一の area を互に反対の方向に周測し、各組が fore-side (前視), back-side (後視) を測定した。但し距離は1回だけ測つてゐる。

傾角、方位角はポケットコンパスで、斜距離は間繩で測つた。i 番目の辺の真の値を

$$\begin{aligned} \text{斜距離: } & r_i \\ \text{傾角: } & \psi_i \\ \text{方位角: } & \theta_i \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

とする時、それらの測定値が4組得られてゐるわけである。即ち、今時計の針と反対廻りを positive、同じ廻りを negative とすれば、A 組にとつて、fore-side は positive、back-side は negative の廻りで、B 組に対してはその反対である。よつて

A 組	B 組
positive	negative
negative	positive
positive	negative
$(r_A^{(i)}, \psi_{AP}^{(i)}, \theta_{AP}^{(i)})$	$(r_B^{(i)}, \psi_{BP}^{(i)}, \theta_{BP}^{(i)})$
$(r_A^{(i)}, \psi_{AN}^{(i)}, \theta_{AN}^{(i)})$	$(r_B^{(i)}, \psi_{BN}^{(i)}, \theta_{BN}^{(i)})$

$(i=1, 2, \dots, n), n=83$

が得られてゐる。

§1  $r, \psi, \theta$  の測量の誤差

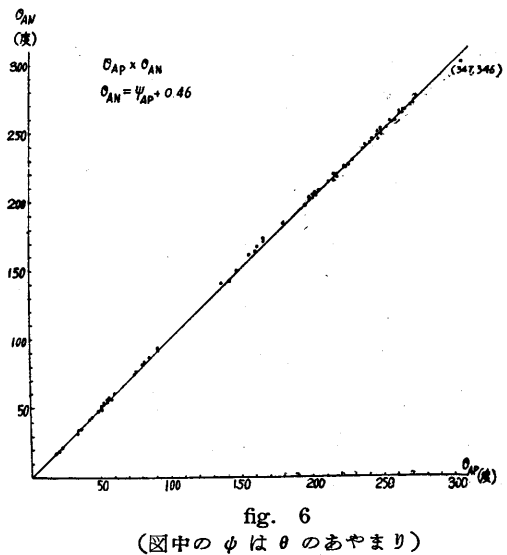
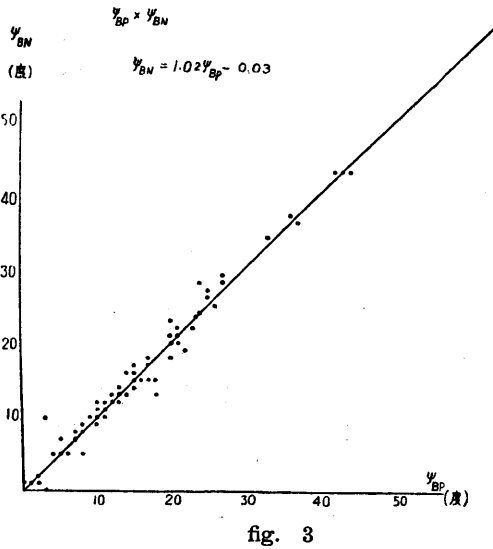
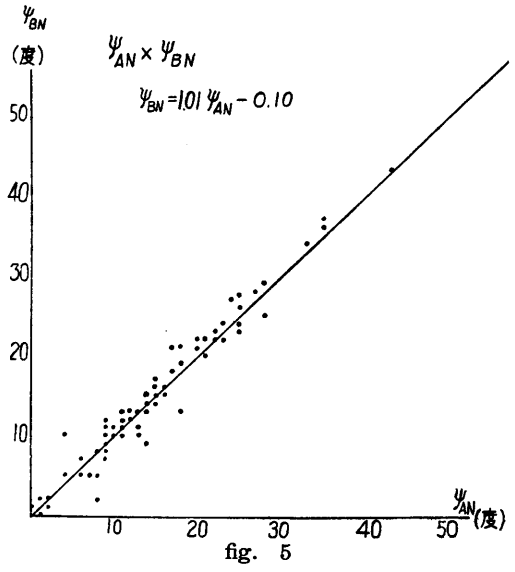
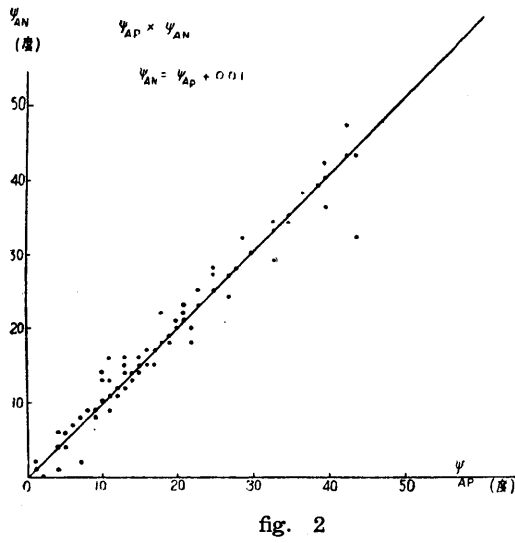
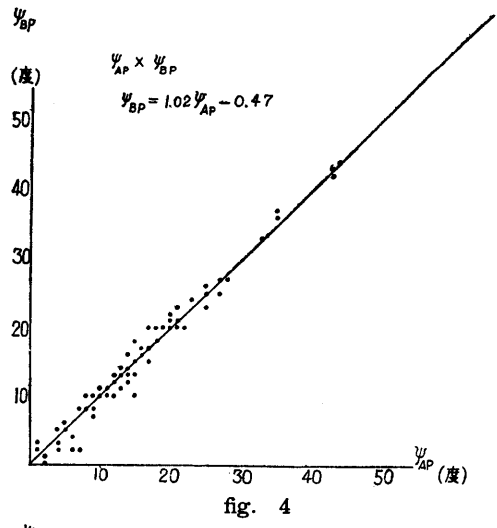
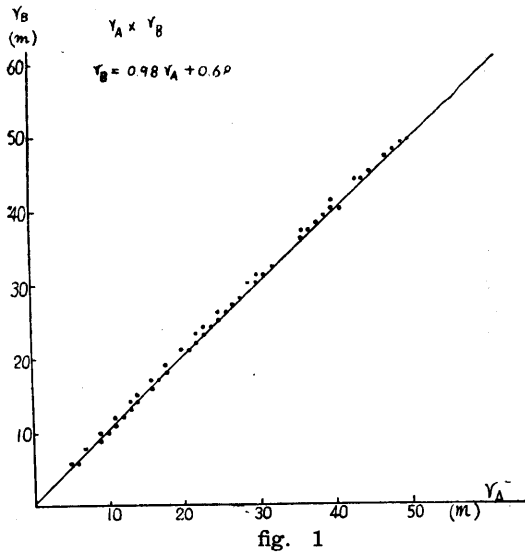
今相関図をかいてみると fig 1~fig 9 となる。相関係数と、回帰直線のまはりの分散は次表の通りである。

	$r_A(m)$	$r_B(m)$	$\psi_{AP}(度)$	$\psi_{AN}(度)$	$\theta_{AP}(度)$	$\theta_{AN}(度)$
平均値	23.95	24.04	15.22	15.72	172.73	172.81
分散	142.65	136.96	87.84	90.26	7742.87	7709.78

	A, B 間	A 内	B 内	A, B 間		A 内	B 内	A, B 間	
	$r_A \times r_B$	$\psi_{AP} \times \psi_{AN}$	$\psi_{BP} \times \psi_{BN}$	$\psi_{AP} \times \psi_{BP}$	$\psi_{AN} \times \psi_{BN}$	$\theta_{AP} \times \theta_{AN}$	$\theta_{BP} \times \theta_{BN}$	$\theta_{AP} \times \theta_{BP}$	$\theta_{AN} \times \theta_{BN}$
相関係数	0.9954	0.9874	0.9986	0.9977	0.9829	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
回帰直線のまはりの標準誤差	1.1265	1.5035	0.5178	0.6483	1.8012	1.1107	1.2428	1.0391	0.9220

この相関係数は、測点を定めておく事により area の周測の仕方を固定して得られた  $\psi, \theta$  の夫々4組の測量値の相互間のものである。何れも甚だ高く殆ど1である。

又その場合における A 内、B 内、A, B 間の相互的な誤差と考へられる回帰直線のまはりの標準誤差は、A 内、B 内と A, B 間とで差がないと思はれる。



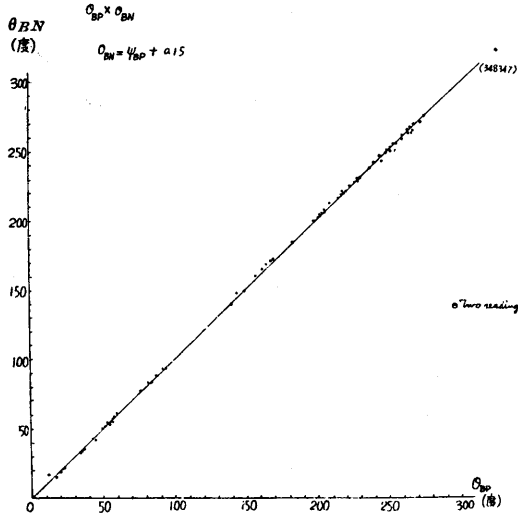


fig. 7

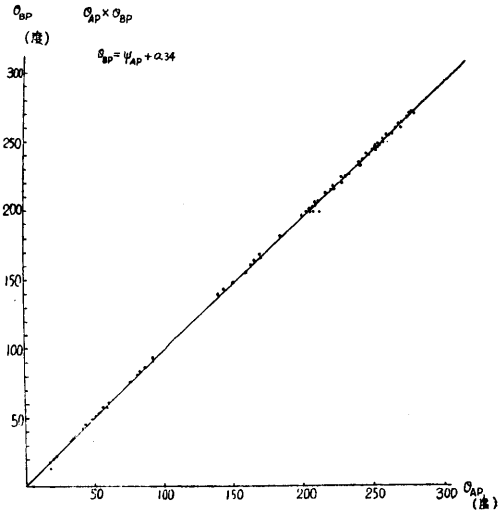


fig. 8

(図中の  $\psi$  は  $\theta$  のあやまり)

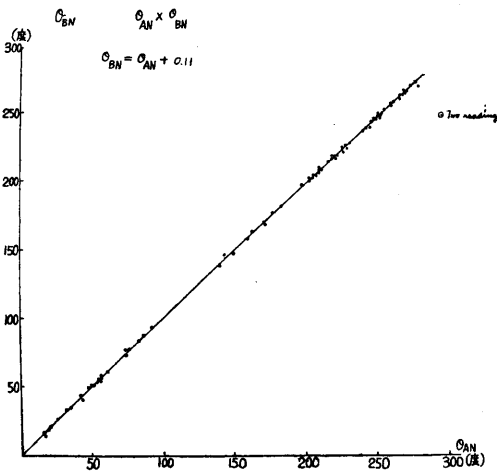


fig. 9

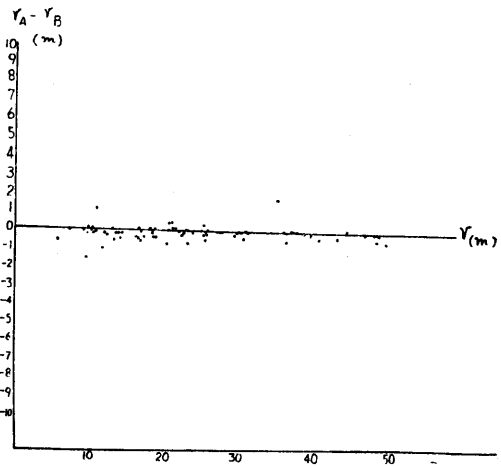


fig. 10

次に  $r, \psi, \theta$  の各々について誤差の order をしらべてゆく.

(1)  $r$  の誤差

今 真の値:  $r_1, \dots, r_n$

A 組:  $x_1, \dots, x_n$

B 組:  $y_1, \dots, y_n$

次の仮定をする:  $x_i, y_i$  は何れも確率変数で

$$E(x_i) = X_i, \quad E(y_i) = Y_i, \quad x_i = X_i + \varepsilon_i, \quad y_i = Y_i + \eta_i$$

$$V(\varepsilon_i) = V(\eta_i) = \sigma_i^2, \quad \rho(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \rho(\eta_i, \eta_j) = 0 (i \neq j), \quad \rho(\varepsilon_i, \eta_j) = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

$\varepsilon_i, \eta_i (i=1, \dots, n)$  は random error である.

$\sigma_i^2$  は  $i$  に関係してくるが, これを  $r$  に関係してきまると考へ,  $x-y$  の  $r$  に対する関係をかいてみると fig 10 となる. これよりみて,  $E(x-y), V(x-y)$  は  $r$  に関せずほぼ一定とみてよいと思はれる. そこで  $E(x_i - y_i) = m, V(x_i - y_i) \equiv \text{const} (i=1, \dots, n)$  と仮定すれば  $V(\varepsilon_i) = V(\eta_i)$

( $i=1, \dots, n$ ) よつてこれを  $\sigma^2$  とおく. 又  $X_i - Y_i = m$  ( $i=1, \dots, n$ )

次に  $m, \sigma^2$  を estimate する.

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i), \quad s^2 = \frac{1}{2n} \sum (x_i - y_i)^2$$

とおけば  $E(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i - y_i) = m, \quad E(s^2) = \frac{1}{2n} \sum (\epsilon_i - \eta_i + m)^2 = \sigma^2 + \frac{m^2}{2}$

よつて  $\bar{x}$  で  $m$  を estimate するに,  $m \sim \bar{x} = 0.2073 \text{ m}$  又  $s^2 - m^2/2$  により  $\sigma^2$  を estimate するに,  $m$  の代り  $\bar{x}$  を用ひて  $\sigma^2 \sim s^2 - \bar{x}^2/2 = 0.0501 \text{ m}^2$

故に random error は variance  $0.0501 \text{ m}^2$  をもつ. 又 bias は, もしなければ  $m=0$  となる筈だから, 上の場合 bias がある事になる.

$m \neq 0$  なる事はもつと精密にたしかめられる. 即ち  $\sigma_x^2 = \frac{1}{n^2} \sum V(x_i - y_i) = \frac{2}{n} \sigma^2$   $\bar{x}$  は  $n$  が大だから normal とみれば

$$p_r(|\bar{x} - m| \geq k\sigma_x) \leq 2\{1 - \Phi(k)\}, \quad \Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

然るに  $E(s^2) = \sigma^2 + \frac{m^2}{2} \geq \sigma^2 \quad \therefore \sigma_x^2 \leq \frac{2}{n} E(s^2)$

故に  $p_r(|\bar{x} - m| \geq k\sqrt{\frac{2}{n} E(s^2)}) \leq 2\{1 - \Phi(k)\}$ ,  $E(s^2)$  の代り  $s^2$  の数値を使へば, 99%, 信頼率は  $0.2073 \pm 0.1077$  となる.

それでは  $r$  の測量における bias はどの程度のものであろうか. これは正確に押へる事は上のデータだけでは不可能であるが, 考へられる限りの考察を行ふ事にする. 上記のやうに二つの組の間で,  $r$  に関らず 20 cm 程度の systematic な差が生じてゐるが, bias はこの他に, どの組に対しても必ず一方に生ずるものが考へられる. 倒へば間繩のたるみは避けられぬ正の bias を生ずる. 然し今例えば 50 m ひつぱつてたるみの頂上が 2 m と下る事は決してないから, 仮に 1 m 程度下るとしてそれにより生ずる bias は近似的に次の式から計算される.

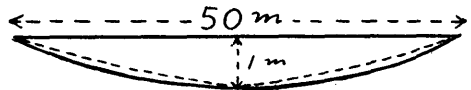


fig 11

$$\text{bias} = 2\sqrt{25^2 + 1^2} = 0.02 \text{ m}$$

又この bias は近似的に長さ按比例するとみてよいから, 上の, 組の間の bias に比して無視しうる程小である. よつて一応 bias は  $r$  に関らず 20 cm 程度あるものとみておく.

(四)  $\psi$  の誤差

測定 pair  $X, Y$  につき,

$$\begin{aligned} \text{真の値: } & \psi_1, \dots, \psi_n \\ X & : x_1, \dots, x_n \\ Y & : y_1, \dots, y_n \end{aligned}$$

初めに述べたやうに, A 或は B 内, A, B 間何れをしらべるのも差異はないと思はれる. 故に  $X, Y$  として主に A 内の  $P$  と  $N$  を用ひる.

先づ bias で考へられるものは, 測定者が望遠鏡でのぞく目標の偏りから生ずるものである. pole 上に, コンパスの高さに従ひ一定の位置をきめて, 必ずそこを目標として狙ふやうに必ずしもなされていない. 又途中で繁みや木の枝があつて見えない時は, pole を高くあげさせて, 見当で狙ひをつけているのが実状である. この為に, 登りの時は正の, 下りの時は負の bias を生ずると思はれる. 実際, データーをくらべてみると, その事がはつきり出てゐる. (fig. 13 c.f.)

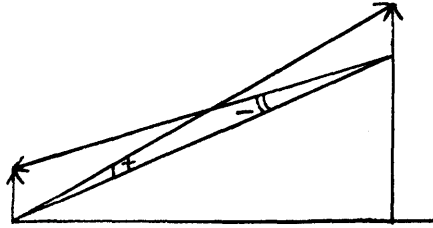
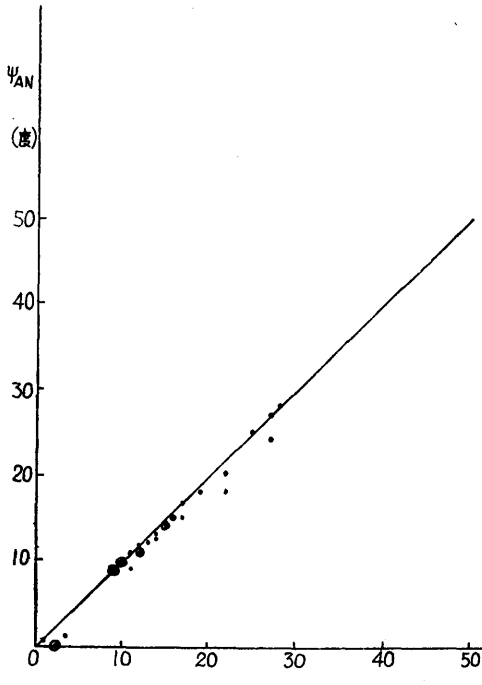


fig. 12

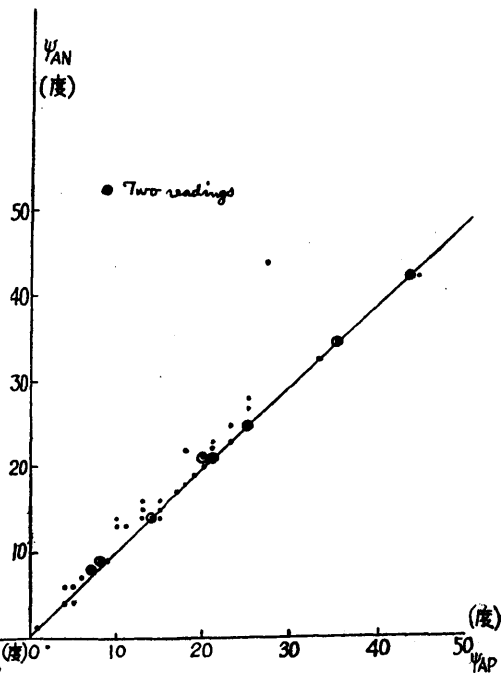
更に他の要因からの bias が加はるが, 全体の order は一応  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|x_i - y_i|}{2}$  とみてよいであらう. 計算すれば A 組内, B 組内共にほぼ  $0.5^\circ$  程度となる.

登り

下り



点が下に出る



点が上に出る

fig. 13

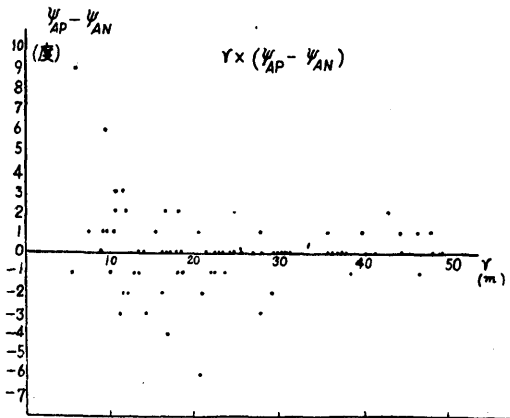


fig. 14

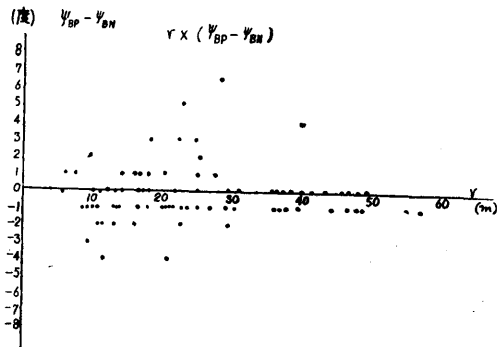


fig. 15

次に random error をしらべる。今  $x-y$  と  $r$  の関係は fig. 14, fig. 15 のやうになる。これよりみて傾角の誤差は距離に依存すると考へられる。又  $E(x_i - y_i) = 0$  を仮定してよいと思はれる。  $V(x_i - y_i)$  は距離に関係するが、  $V(x_i - y_i) = \frac{a}{r_i^2}$  ( $i=1, \dots, n$ ) と仮定してよからう。それは次の考へによる。

今 pole 上の目標が random に変動するとし、それを  $\varepsilon$  とすれば

$$\text{角 } \delta = \frac{\cos \psi}{r} \varepsilon \quad \therefore V(\delta) = \frac{\cos^2 \psi}{r^2} V(\varepsilon)$$

$$\cos^2 \psi \text{ が近似的に一定とすれば, } V(\delta) \propto \frac{1}{r^2}$$

今上述の仮定の下に、又  $\rho(x_i, y_j) = 0$  ( $i \neq j$ ) と仮定して  $a$  を estimate するに、  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$  を使へば  $E(s^2) = a$

これより  $a \sim s^2 = \begin{cases} 931.14 : \text{A 組内} \\ 1528.59 : \text{B 組内} \end{cases}$

今  $x_i = \psi_i + \varepsilon_i$ ,  $y_i = \psi_i + \eta_i$ ,  $\rho(\eta_i, \varepsilon_j) = \rho(\eta_i, \eta_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $\rho(\varepsilon_i, \eta_j) = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ),  $V(\varepsilon_i) = V(\eta_i)$  と仮定すれば  $\frac{a}{r_i^2} = 2V(\varepsilon_i) = 2V(\eta_i)$

$$\therefore D(\varepsilon_i) = D(\eta_i) = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{r_i} = \begin{cases} \frac{21.6^\circ}{r_i} : \text{A組} \\ \frac{27.6^\circ}{r_i} : \text{B組} \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} \frac{21.6^\circ}{r_i} \\ \frac{27.6^\circ}{r_i} \end{cases}} \right\} \text{平均: } \frac{24.6^\circ}{r_i}$$

$r$  の平均的な値  $r_i = 24$  の場合の値は  $\begin{cases} 0.90^\circ : \text{A組} \\ 1.15^\circ : \text{B組} \end{cases}$

今仮定を変へて  $V(\varepsilon_i) = V(\eta_i) = \sigma^2$  ( $i=1, \dots, n$ ) として  $\sigma$  を estimate してみれば  $\sigma = 1.0923^\circ$  故に  $\psi$  の random error は、平均的に  $1^\circ$  程度である。

(c) 方位角の誤差:

真の値:  $\theta_1, \dots, \theta_n$

$X$  :  $x_1, \dots, x_n$

$Y$  :  $y_1, \dots, y_n$

方位角の場合は bias を考へてゆく手掛りがないので、今の場合、一応 bias を無視しようとする。

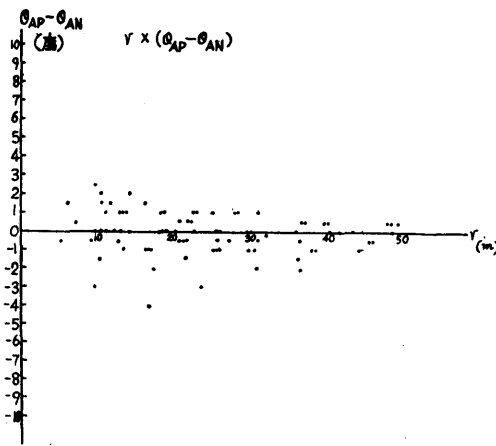


fig. 17

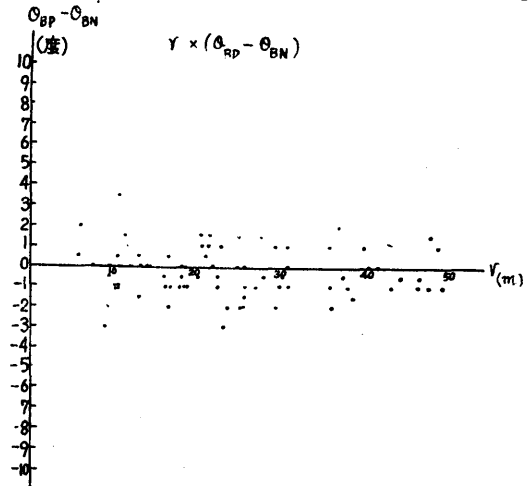


fig. 18

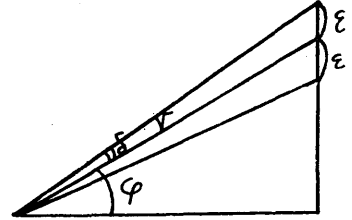


fig 16  
(図中の  $\varphi$  は  $\psi$  のあやまり)

$x-y$  と  $r$  との関係は fig. 17, 18 のやうになり, 方位角の誤差は少しく  $r$  に依存すると思はれる. 且  $\psi$  の場合と平行に論じうる. 然し  $\psi$  の場合のやうに甚だしくない故, 次の仮定をする.

$$\begin{aligned} x_i &= \theta_i + \varepsilon_i, & y_i &= \theta_i + \eta_i, & E(\varepsilon_i) &= E(\eta_i) = 0 \\ V(\varepsilon_i) &= V(\eta_i) = \sigma^2 & (i &= 1, \dots, n) \\ \rho(\varepsilon_i, \varepsilon_j) &= 0 & (i \neq j) & & \rho(\varepsilon_i, \eta_j) &= 0 & (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

然るとき,  $s^2 = \frac{1}{2n} \sum (x_i - y_i)^2$  により  $\sigma^2$  を estimate すれば

$$\sigma^2 \sim s^2 = 0.5730 \text{ 度}^2$$

以上まとめて表にすれば

誤 差	$r$	$\psi$	$\theta$
bias	一様に 0.2 m	一様に 0.5度	0度
random error の分散	一様に 0.0501 m <sup>2</sup>	$\frac{605}{r^2}$ 度 <sup>2</sup> 特に $r=24$ m で 1度 <sup>2</sup>	一様に 0.5730 度 <sup>2</sup>

§2 面積の誤差

次に  $r, \psi, \theta$  の誤差から面積の誤差を算出する. 先づ  $r, \psi, \theta$  の bias が無視しうる程度に押へられた場合, 測量結果から地図を作成して面積を算定する時の誤差を論じ, 次に  $r, \theta, \psi$  の bias がどの程度に影響するか, 面積測定においてそれがどの程度の bias を生ずるかを論ずる.

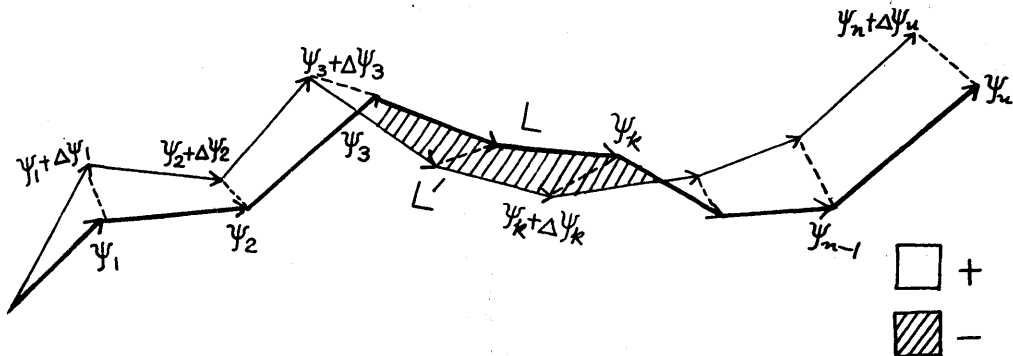
(I) bias を無視しうる場合: 次の仮定をする.

真の値  $r, \psi, \theta$  の測定値を  $r + \Delta r, \theta + \Delta \theta, \psi + \Delta \psi$  とする時,  $\Delta r, \Delta \psi, \Delta \theta$  は確率変数且  $E(\Delta r) = E(\Delta \psi) = E(\Delta \theta) = 0$  即ち bias はなし. 且  $V(\Delta r) = \sigma_r^2, V(\Delta \psi) = \sigma_\psi^2, V(\Delta \theta) = \sigma_\theta^2$  且  $\sigma_r^2, \sigma_\psi^2, \sigma_\theta^2$  は夫々  $r, \psi, \theta$  の大きさに関せず一定, 又  $\Delta r, \Delta \psi, \Delta \theta$  の間にすべて相関なしとす.

今測量が  $n$  ケの線分よりなる折線にそつてなされたものとし, 測量値を

$$r_k + \Delta r_k, \psi_k + \Delta \psi_k, \theta_k + \Delta \theta_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

とす.



(図中の  $\psi$  は  $\theta$  のあやまり)

fig. 19

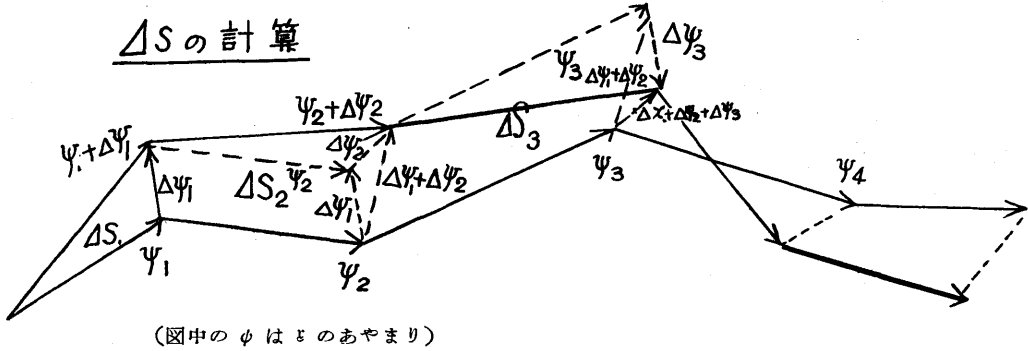
測るべき折線を水平面に正射影したものを下図の  $L$  とす. ここに  $\varepsilon_k$  は  $\varepsilon_k = (r_k \cos \psi_k \cos \theta_k, r_k \cos \psi_k \sin \theta_k)$

それに対し, 測量値から作つたものを  $L'$  とし  $\varepsilon_k$  に対応するものを  $\varepsilon_k + \Delta \varepsilon_k$  とす (fig. 19 c).



f.). この時  $L$  と  $L'$  に挟まれた面積を考ふ。但し  $L$  に関し正の廻転をなす  $L'$  の vector との間に挟む部分を +, 負の廻転をなす場合を - とし, かく符号を合せ考へて,  $L$  と  $L'$  に挟まれる面積を  $\Delta S$  とす。

もし area の周囲に  $L$  をとれば, area の真の面積を  $S$  とする時,  $S + \Delta S$  が測量によつてえた  $S'$  の測定値を与へる。



vector product を使へば

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \frac{1}{2} \varepsilon_1 \times \Delta \varepsilon_1, & \Delta S_2 &= \frac{1}{2} \varepsilon_2 \times \Delta \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) + \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) \times \Delta \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \times \Delta \varepsilon_1 \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_2 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_2 \times \Delta \varepsilon_1 \end{aligned}$$

2次の無限小を無視すれば

$$\Delta S_2 \doteq \varepsilon_2 \times \Delta \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \times \Delta \varepsilon_2$$

$$\begin{aligned} \Delta S_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon_3 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_3) + \frac{1}{2} (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_3) \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_3 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \Delta \varepsilon_3) + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_3 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) \end{aligned}$$

2次の無限小を無視すれば

$$\Delta S_3 \doteq \varepsilon_3 \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2) + \frac{1}{2} \varepsilon_3 \times \Delta \varepsilon_3$$

一般に  $\Delta S_k \doteq \varepsilon_k \times (\Delta \varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_2 + \dots + \Delta \varepsilon_{k-1}) + \frac{1}{2} \varepsilon_k \times \Delta \varepsilon_k$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta S &= \sum_{k=1}^n \Delta S_k \doteq \left( \frac{\varepsilon_1}{2} + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n \right) \times \Delta \varepsilon_1 \\ &+ \left( \frac{\varepsilon_2}{2} + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n \right) \times \Delta \varepsilon_2 \\ &+ \dots \dots \dots \\ &+ \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n \right) \times \Delta \varepsilon_{n-1} \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_n \times \Delta \varepsilon_n \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

2次以上の無限小を無視すれば

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_k &\doteq (\Delta r_k \cos \psi_k \cos \theta_k - r_k \sin \psi_k \cos \theta_k \Delta \theta_k - r_k \cos \psi_k \sin \theta_k \Delta \theta_k, \\ &\Delta r_k \cos \psi_k \sin \theta_k - r_k \sin \psi_k \Delta \psi_k + r_k \cos \psi_k \cos \theta_k \Delta \theta_k) \end{aligned}$$

故に, 今  $a_k = \frac{1}{2} \xi_k + \xi_{k+1} + \dots + \xi_n$ ,  $a_k = (a_k, b_k)$  とおけば

$$\begin{aligned} \Delta S \doteq & \sum_{k=1}^n (a_k \cos \psi_k \sin \theta_k - b_k \cos \psi_k \cos \theta_k) \Delta r_k \\ & + \sum_{k=1}^n (b_k r_k \sin \psi_k \cos \theta_k - a_k r_k \sin \psi_k \sin \theta_k) \Delta \psi_k \\ & + \sum_{k=1}^n (a_k r_k \cos \psi_k \cos \theta_k + b_k r_k \cos \psi_k \sin \theta_k) \Delta \theta_k \dots\dots\dots (1)' \end{aligned}$$

$E(\Delta S)$ ,  $V(\Delta S)$  の計算

明らかにて  $E(\Delta S) \doteq 0$  即ち  $S$  の誤差も bias はない (無視しうる程小).

$$\begin{aligned} \text{又 } V(\Delta S) \doteq & \sum_{k=1}^n (a_k \cos \psi_k \sin \theta_k - b_k \cos \psi_k \cos \theta_k)^2 \sigma_r^2 \\ & + \sum_{k=1}^n (b_k r_k \sin \psi_k \cos \theta_k - a_k r_k \sin \psi_k \sin \theta_k)^2 \sigma_\psi^2 \\ & + \sum_{k=1}^n (a_k r_k \cos \psi_k \cos \theta_k + b_k r_k \cos \psi_k \sin \theta_k)^2 \sigma_\theta^2 \end{aligned}$$

即ち

$$\begin{aligned} V(\Delta S) \doteq & \sum_{k=1}^n (a_k^2 \cos^2 \psi_k \sin^2 \theta_k + b_k^2 \cos^2 \psi_k \cos^2 \theta_k) \sigma_r^2 \\ & + \sum_{k=1}^n (a_k^2 r_k^2 \sin^2 \psi_k \sin^2 \theta_k + b_k^2 r_k^2 \sin^2 \psi_k \cos^2 \theta_k) \sigma_\psi^2 \\ & + \sum_{k=1}^n (a_k^2 r_k^2 \cos^2 \psi_k \cos^2 \theta_k + b_k^2 r_k^2 \cos^2 \psi_k \sin^2 \theta_k) \sigma_\theta^2 \\ & - \sum_{k=1}^n a_k b_k \cos^2 \psi_k \sin 2\theta_k \sigma_r^2 \\ & - \sum_{k=1}^n a_k b_k r_k^2 \sin^2 \psi_k \sin 2\theta_k \sigma_\psi^2 \\ & + \sum_{k=1}^n a_k b_k r_k^2 \cos^2 \psi_k \sin 2\theta_k \sigma_\theta^2 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

特に  $|\psi_k| \equiv |\psi|$ ,  $r_k \cos \psi_k = r'$  ( $k=1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned} \text{の場合 } V(\Delta S) \doteq & \cos^2 \psi \sum_{k=1}^n (a_k^2 \sin^2 \theta_k + b_k^2 \cos^2 \theta_k) \sigma_r^2 \\ & + r'^2 \tan^2 \psi \sum_{k=1}^n (a_k^2 \sin^2 \theta_k + b_k^2 \cos^2 \theta_k) \sigma_\psi^2 \\ & + r'^2 \sum_{k=1}^n (a_k^2 \cos^2 \theta_k + b_k^2 \sin^2 \theta_k) \sigma_\theta^2 \\ & - \cos^2 \psi \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \sin 2\theta_k \right) \sigma_r^2 - r'^2 \tan^2 \psi \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \sin 2\theta_k \right) \sigma_\psi^2 \\ & + r'^2 \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \sin 2\theta_k \right) \sigma_\theta^2 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

更に  $\psi=0$  ならば

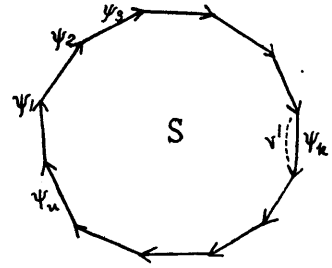
$$\begin{aligned} V(\Delta S) \doteq & \sum_{k=1}^n (a_k^2 \sin^2 \theta_k + b_k^2 \cos^2 \theta_k) \sigma_r^2 \\ & + r^2 \sum_{k=1}^n (a_k^2 \cos^2 \theta_k + b_k^2 \sin^2 \theta_k) \sigma_\theta^2 \\ & - \sum_{k=1}^n a_k b_k \sin 2\theta_k \sigma_r^2 + r^2 \sum_{k=1}^n a_k b_k \sin 2\theta_k \sigma_\theta^2 \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

二三の場合の  $V(\Delta S)$  の計算

(1)  $|\psi_k| \equiv |\psi|$ ,  $r_k \cos \psi_k = r'$  ( $k=1, \dots, n$ ) 且水平面内の正射影が正多形なる area の場合

この場合, (3) 式により計算すれば

$$V(\Delta S) \doteq \frac{nr'^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left\{ \sigma_r^2 \cos^2 \psi + r'^2 \tan^2 \psi \sigma_\psi^2 \right\} \left( 2 + \cos \frac{2\pi}{n} + r'^2 \sigma_\theta^2 \right) \dots (5)$$



(図中の  $\psi$  は  $\pi$  のあやまり)

$r'$ ,  $\psi$  を一定にしておいて  $n \rightarrow \infty$  とすれば  $V(\Delta S) \rightarrow \infty$  且 (1)' より  $\Delta S$  は独立な  $3n$  個の確率変数の一次結合であり,  $k=1, \dots, n$  に対する

$$\frac{(a_k \cos \psi_k \sin \theta_k - b_k \cos \psi_k \cos \theta_k)^2 \sigma_r^2}{V(\Delta S)} \rightarrow 0$$

$$\frac{(b_k r_k \sin \psi_k \cos \theta_k - a_k r_k \sin \psi_k \sin \theta_k)^2 \sigma_\psi^2}{V(\Delta S)} \rightarrow 0$$

$$\frac{(a_k r_k \cos \psi_k \cos \theta_k + b_k r_k \cos \psi_k \sin \theta_k)^2 \sigma_\theta^2}{V(\Delta S)} \rightarrow 0$$

故に中心極限定理より  $n$  が充分大の時  $\Delta S$  は近似的に 平均値 0, 分散  $V(\Delta S)$  の normal 分布  $N(0, V(\Delta S))$  に従ふ。

(2)  $|\psi_k| \equiv |\psi|$ ,  $r_k \cos \psi_k = r'$  ( $k=1, \dots, n$ )

且水平面内への正射影が正方形なる area の場合,

(3) 式を使つて計算すれば

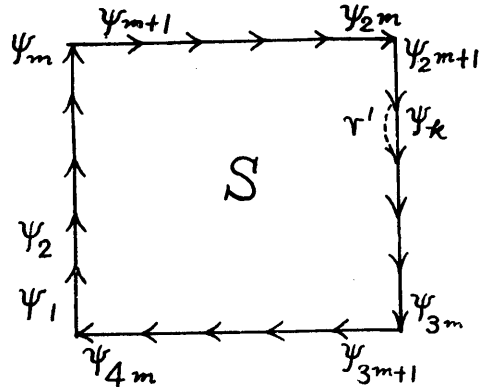
$$V(\Delta S) \doteq 2m^3 r'^2 (\cos^2 \psi \sigma_r^2 + r'^2 \tan^2 \psi \sigma_\psi^2) + \frac{m(4m^2 - 1)}{3} r'^4 \sigma_\theta^2, \dots (6)$$

但  $m = \frac{n}{4}$

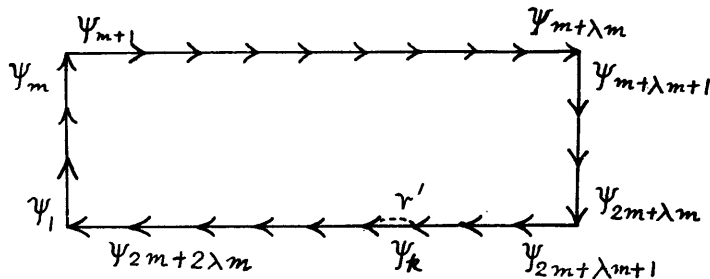
この場合も  $n \geq 1$  ならば  $\Delta S$  の分布は近似的に  $N(0, V(\Delta S))$  に従ふ。

(3)  $|\psi_k| \equiv |\psi|$ ,  $r_k \cos \psi_k = r'$  ( $k=1, \dots, n$ )

且水平面内への正射影が縦横の比  $1:\lambda$  ( $\lambda$  は自然数) の矩形 なる area の場合



(図中の  $\psi$  は  $\pi$  のあやまり)



(図中の  $\psi$  は  $\pi$  のあやまり)

$$V(\Delta S) \doteq (\lambda + \lambda^2) m^3 r'^2 (\sigma_r^2 \cos^2 \psi + r'^2 \tan^2 \psi \sigma_\psi^2) + \frac{r'^4}{6} \sigma_\theta^2 m \{ 4m^2 (\lambda^3 + 1) - (\lambda + 1) \} \dots (7)$$

$n = 2m + 2\lambda m$

$n \geq 1$  に対しては  $\Delta S$  の分布  $\sim N(0, V(\Delta S))$

$\Delta S, \frac{\Delta S}{S}$  の estimation

チェビシェフの不等式より

$$Pr\{|\Delta S| \leq kD(\Delta S)\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$Pr\left\{\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \leq k \frac{D(\Delta S)}{S}\right\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

但し  $D(\Delta S) = \sqrt{V(\Delta S)}$

area が確実に分つてゐれば,  $D(\Delta S)$  は (2) 式より, 又  $S$  も計算出来る故  $|\Delta S|, \left|\frac{\Delta S}{S}\right|$  の order を上式から estimate 出来る. 実際には, area の測定値しか知られぬわけだが, それを使つて計算した  $D(\Delta S), S$  を使つても大体の order は estimate される.

上の特別の場合 (i), (ii), (iii) に於ては  $n \geq 1$  の時  $\Delta S$  の分布  $\sim N(0, V(\Delta S))$ , 故に estimation の精度はずつとよくなる. 即ち

$$Pr\{|\Delta S| \leq kD(\Delta S)\} = 2\Phi(k) - 1, \quad \text{但し } k > 0$$

$$Pr\left\{\left|\frac{\Delta S}{S}\right| \leq k \frac{D(\Delta S)}{S}\right\} = 2\Phi(k) - 1, \quad \Phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

その場合  $n$  がどの程度であれば充分な近似を得るかは明確には知りえない. 然し一応  $n=10$  即ち変数の数=30 の程度以上ならばよいのではないかと思はれる.

今 (i), (ii), (iii) の場合につき,  $r'=24$  m と与へて数値計算を試みた. 但し  $\sigma_r^2, \sigma_\psi^2, \sigma_\theta^2$  の値は, 初めの分析により得た数値  $\sigma_r^2=0.050$  m<sup>2</sup>,  $\sigma_\psi^2=605/24^2$  度<sup>2</sup>,  $\sigma_\theta^2=0.573$  度<sup>2</sup> を用ひた.

fig. 20, 21, 22, 23 は  $S$  と  $D/S$  の関係を色々の  $|\psi|$  の値に対しグラフにかいたものである.

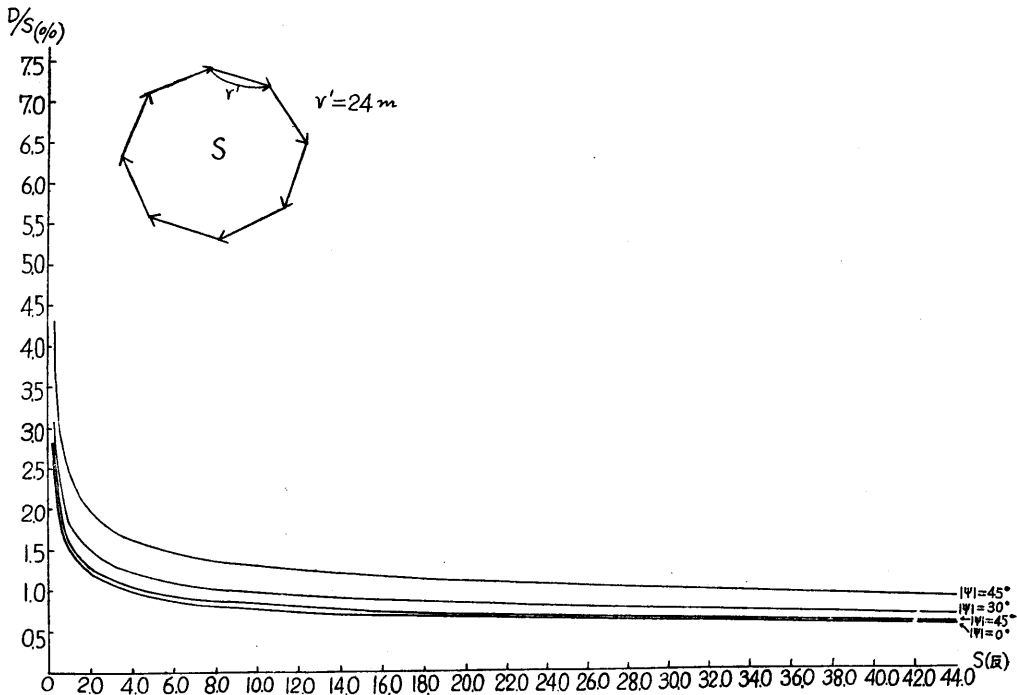


fig. 20

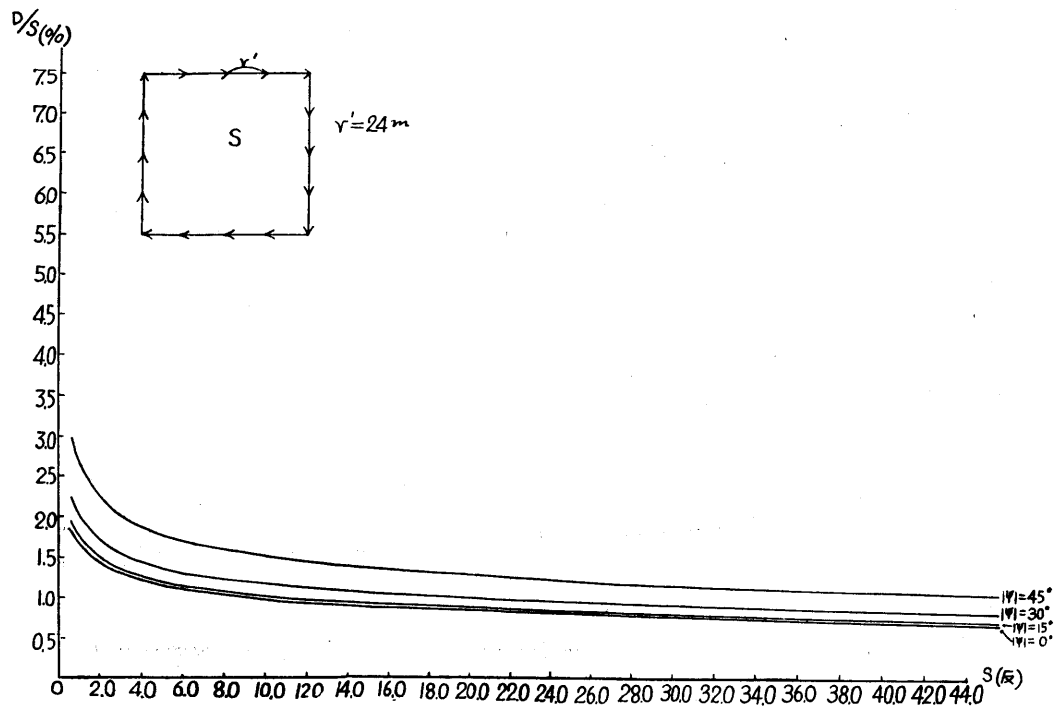


fig. 21

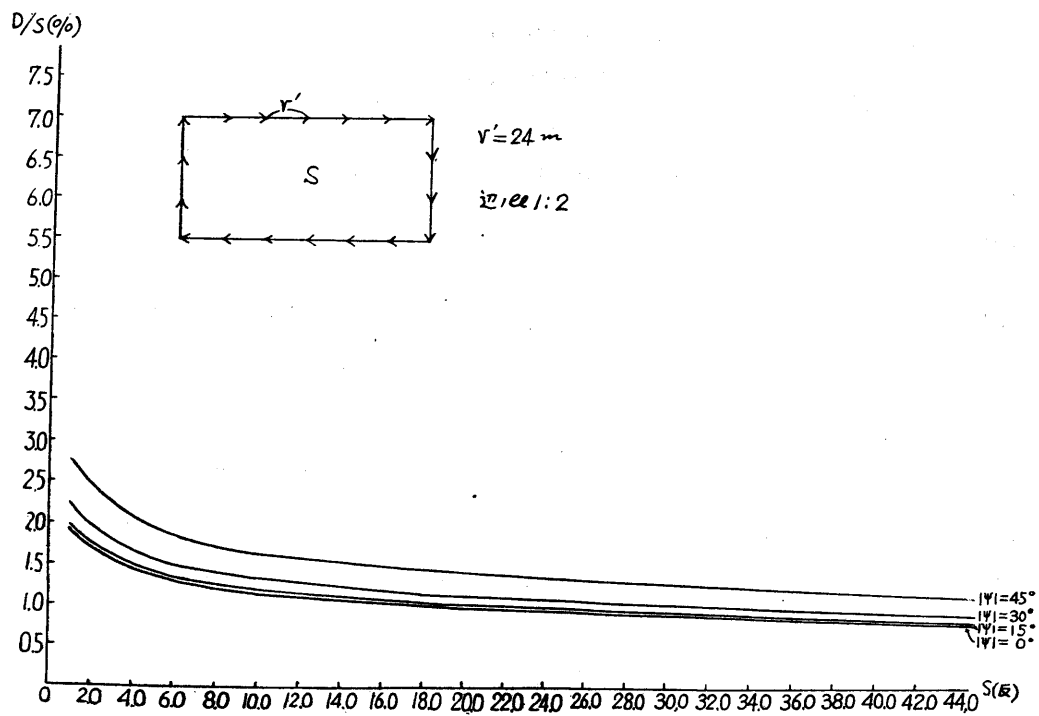


fig. 22

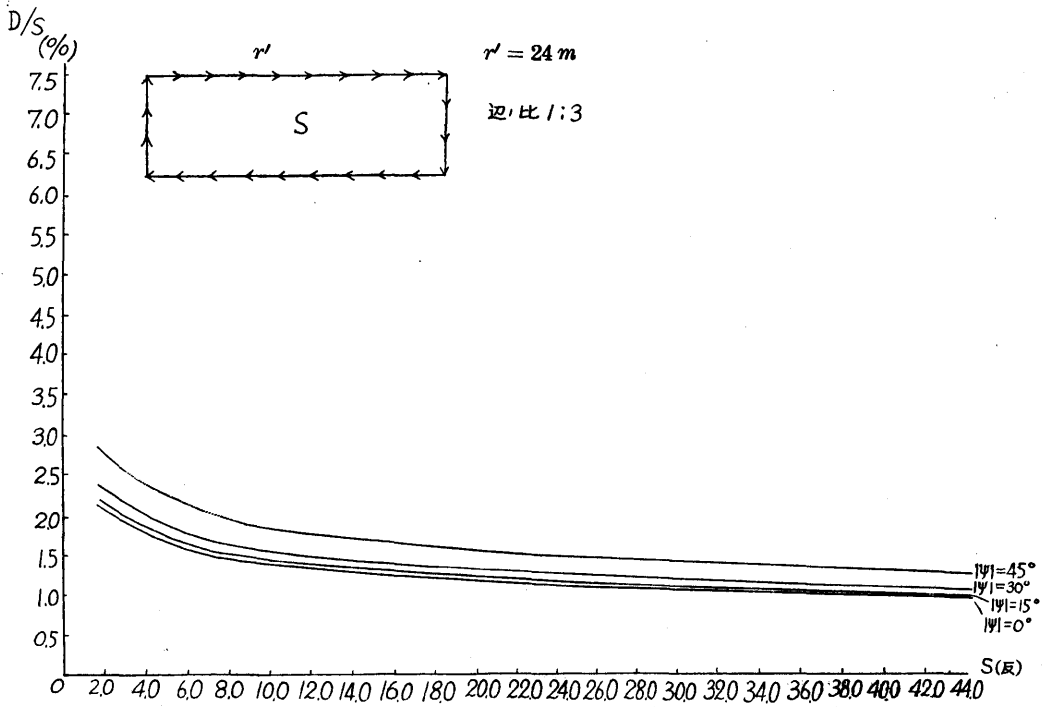


fig. 23

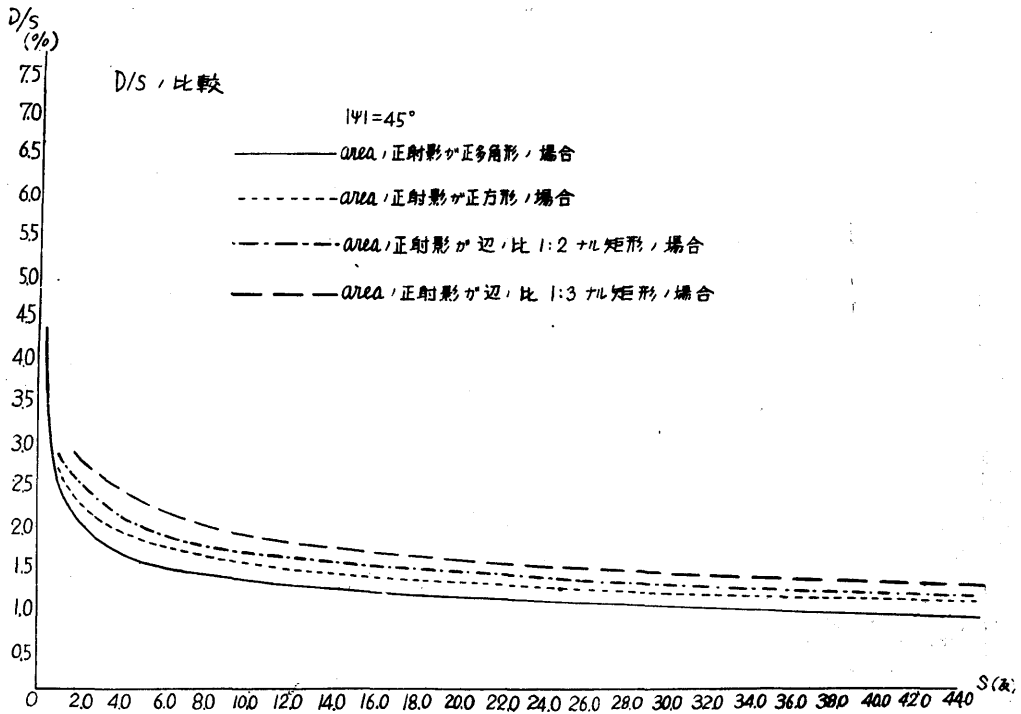


fig. 24

$|\psi|$  は一応  $\leq 45^\circ$  とみた。図を見るに、 $|\psi|$  が増す程 random error は大きくなる。 $|\psi_k|$ , ( $k=1, \dots, n$ ) が一定でなく、色々変る場合の random error は  $|\psi| = 45^\circ$  の曲線の下にあると考へられるから、 $|\psi_k| \equiv |\psi|$  ( $k=1, \dots, n$ ) なる仮定は大きい制限ではない。又  $r'$  も大体 24 m 前後の場

合に於ても、これらの図が大体の  $D/S$  を与へると考へられる。大きめにとつて  $|\psi| = 45^\circ$  の曲線をとれば安心であらう。その時の (i), (ii), (iii) 三つの場合の比較は fig. 24 で与へられる。

area が細長くなる程 random error は大きい。

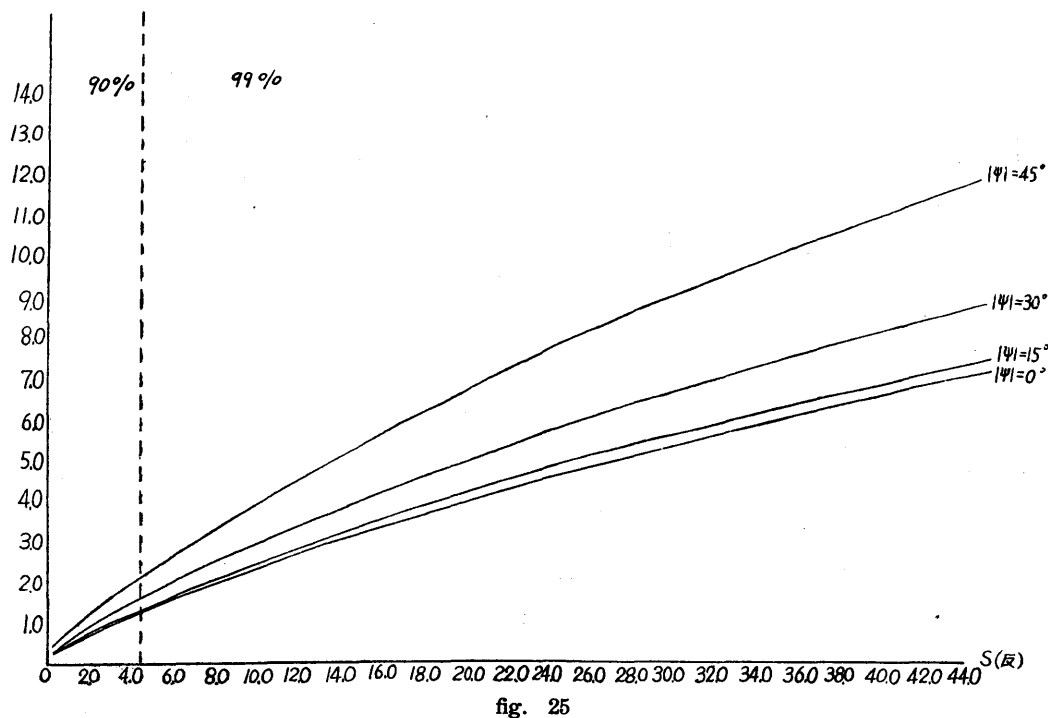


fig. 25

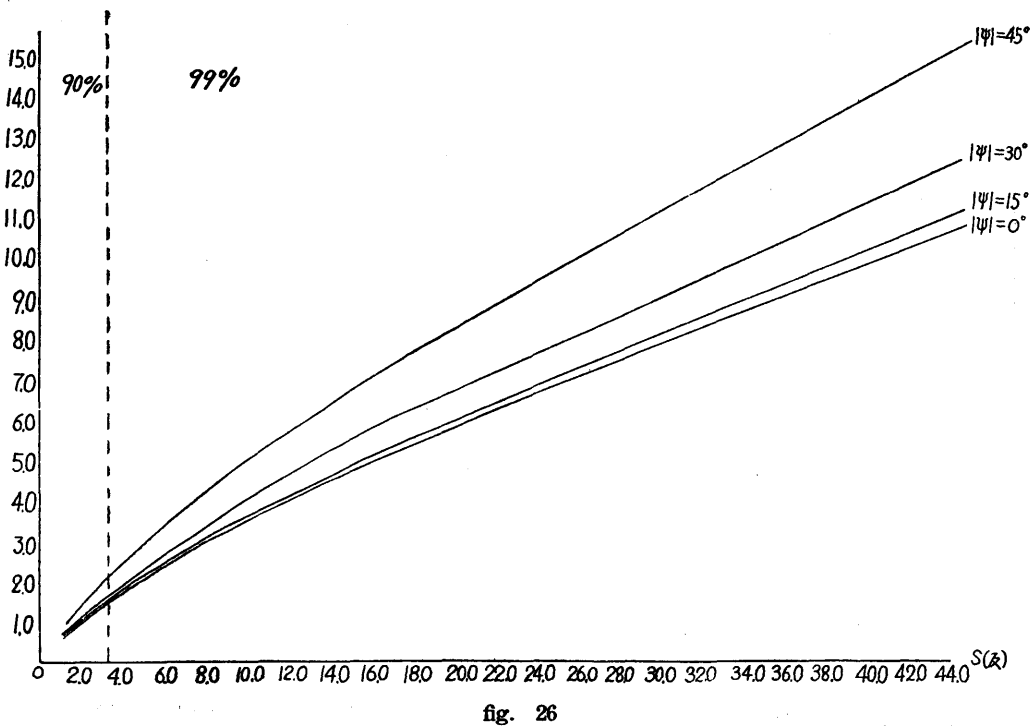


fig. 26

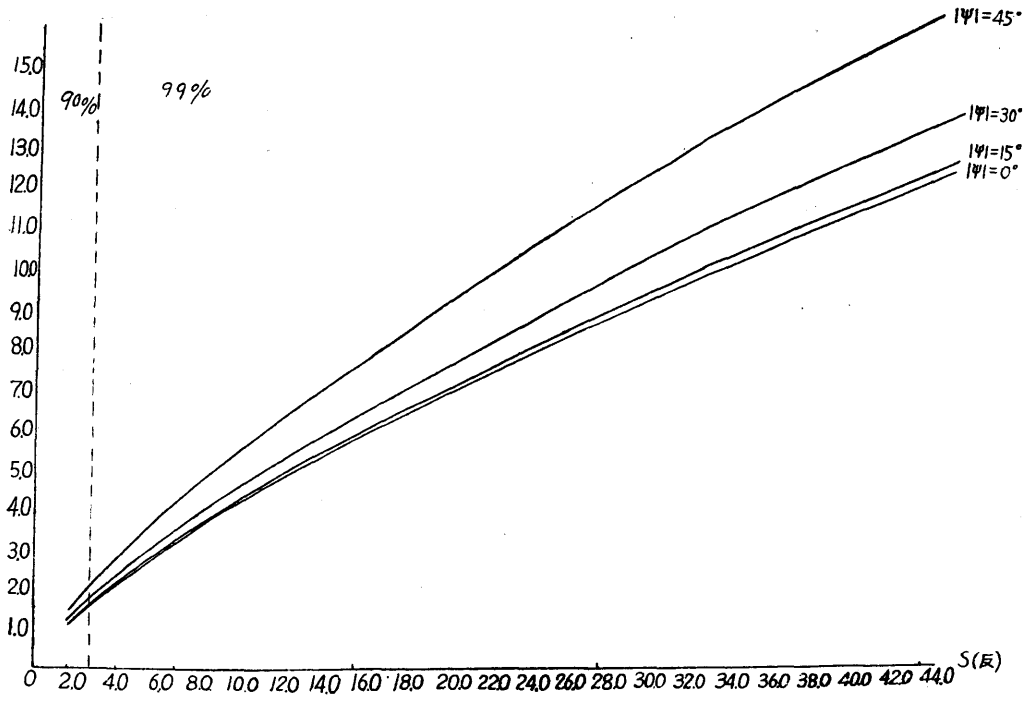


fig. 27

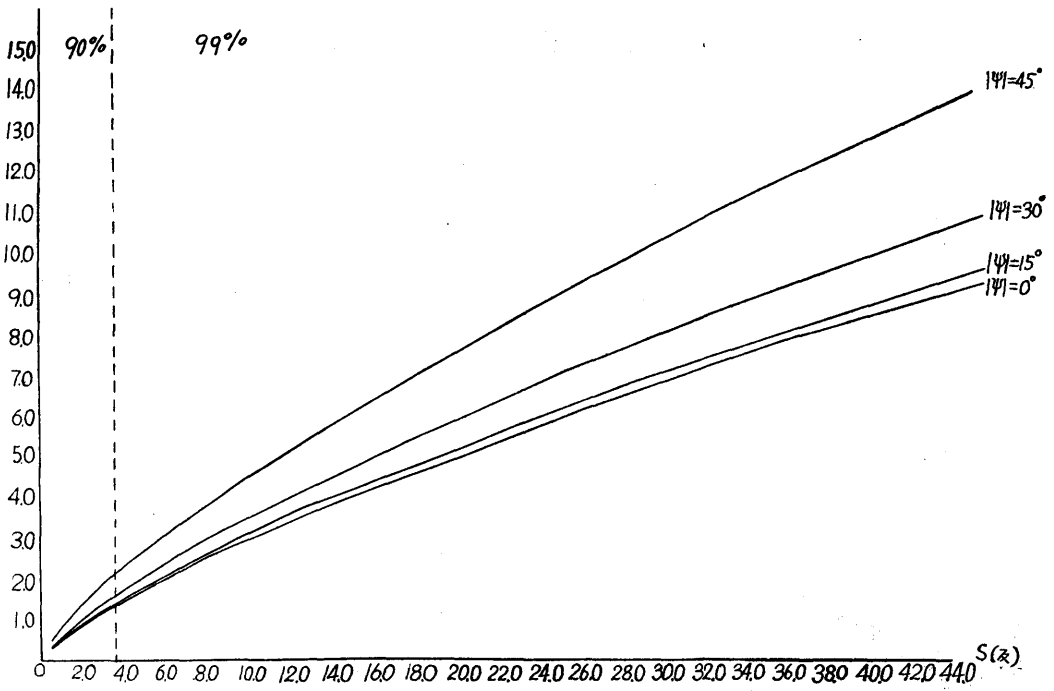


fig. 28

又  $|\Delta S|$  の信頼限界と  $S$  との関係は fig. 25, 26, 27, 28 で与えられる。図中の点線の左側は



チェビシェフの不等式により、右側は近似的に normal 分布とみて estimate をした'

この (イ), (ロ), (ハ) の場合より、凸且中心対称な area に対しては、一応の目安が得られる。更にその周辺に切れこみがあるやうな場合、即ち fig. 29 のやうな場合、どれ程の違ひがあるかをみる為に次のやうな場合の random error をみてみた。

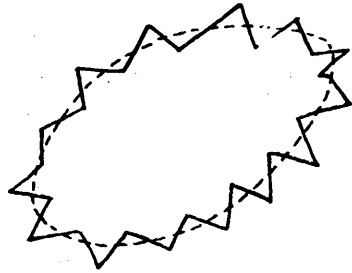
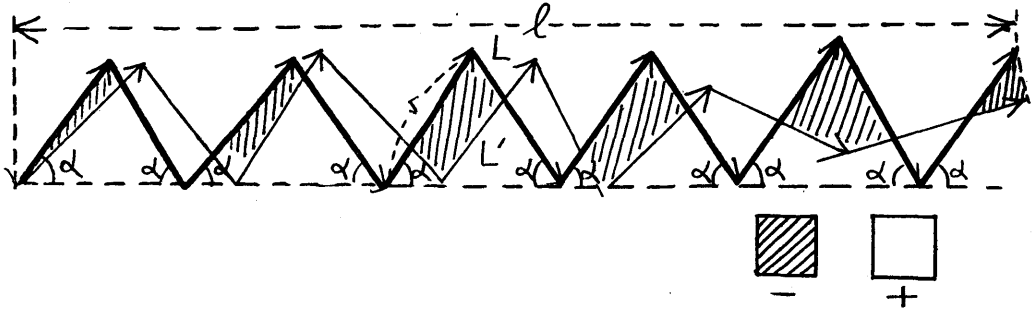


fig 29

(ニ) 水平面内の図のやうな折線を測る場合:



L と L' のはさむ面積を ΔS とすれば

$$\begin{aligned}
 V(\Delta S) &= \frac{\sigma_r^2 r^2}{24} n(2n^2 + 1) \sin^2 2\alpha \\
 &+ \frac{n}{12} r^4 \sigma_\alpha^2 \{ \cos^4 \alpha (4n^2 - 1) + 3 \sin^4 \alpha \} \\
 &\pm \frac{n r^2 \sin^2 2\alpha (r^2 \sigma_\alpha^2 - \sigma_r^2)}{8} : \begin{array}{l} + n \text{ が奇数} \\ - n \text{ が偶数} \end{array}
 \end{aligned}$$

l と  $D(\Delta S) = \sqrt{V(\Delta S)}$  の関係は fig. 30 のやうになり、 $60^\circ \geq \alpha$  の色々の値に対し差は僅かである。実際に於て切れこみがひどくて、 $\alpha$  が平均的に  $60^\circ$  以上なる場合は先づないから、切れこみは大して問題ではないと考へられる。

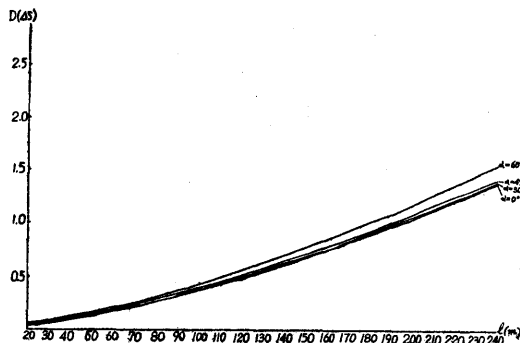


fig. 30

(II) 面積測定の bias

次に r 及び  $\psi$  の測定に夫々 bias がある時、S を算出する時の bias をしらべる。この場合、 $\Delta r, |\Delta \psi|$  は夫々 r,  $\psi$  の大きさに關せず一定と仮定す。又  $\theta$  については、bias が無視しうる程少なりと仮定す。

$$r_i' = r_i \cos \psi_i \text{ とおけば } \varepsilon_i = (r_i' \cos \theta_i, r_i' \sin \theta_i)$$

$r_i$  の変動  $\Delta r$ ,  $\psi_i$  の変動  $\pm \Delta \psi$  ( $\Delta \psi \geq 0$ ) に対する  $r_i'$  の変動は  $\Delta r_i' = \Delta r \cos \psi_i - r_i \sin \psi_i (\pm \Delta \psi)$  今  $|\psi_i| = |\psi|$  ( $i=1, \dots, n$ ) (一定) と仮定すれば

$$\Delta r_i' = \Delta r \cos \psi - r_i \sin (\pm \psi) (\pm \Delta \psi)$$

但し  $\pm \psi$  の  $\pm$  は  $\psi_i \geq 0$  の時  $+$  を,  $\psi_i < 0$  の時  $-$  をとる. もし  $\Delta \psi > 0$  の時  $(\pm \Delta \psi) > 0$ ,  $\psi < 0$  の時  $(\pm \Delta \psi) < 0$  が成立つとすれば,

$$\Delta r_i' = \Delta r \cos \psi - r_i \sin \psi \Delta \psi = \Delta r \cos \psi - r_i' \tan \psi \Delta \psi$$

前述のデーターの場合,  $\pm \Delta \psi$  にかかる傾向がみられた.

この場合の  $S$  の変動  $\Delta S$  は

$$\Delta S \doteq \sum_{k=1}^n a_k \times \Delta \varepsilon_k \text{ 但し } \Delta \varepsilon_k = (\Delta r_k' \cos \theta_k, \Delta r_k' \sin \theta_k)$$

$$a_k = \frac{\varepsilon_k}{2} + \varepsilon_{k+1} + \dots + \varepsilon_n$$

この式によつて  $S$  の bias が与へられる.

今 (I) の時と同じく, (i), (ii) の場合を考へる.

(i): この時は  $\Delta r_1' = \dots = \Delta r_n' = \Delta r \cos \psi - r' \tan \psi \Delta \psi$ , これを  $\Delta r'$  とおく.

又  $a_k = (a_k, b_k)$  とおけば

$$\Delta S \doteq \sum_{k=1}^n (a_k, b_k) \times \Delta \varepsilon_k = \Delta r' \sum_{k=1}^n (a_k \sin \theta_k - b_k \cos \theta_k)$$

然るに (I) の (i) における  $a_k, b_k$  の式を使い, 又  $\sin \theta_k = \cos (k-1/2) 2\pi/n$ ,  $\cos \theta_k = \sin (k-1/2) 2\pi/n$  に注意すれば

$$\sum_{k=1}^n (a_k \sin \theta_k - b_k \cos \theta_k) = \frac{nr'}{2} \cot \frac{\pi}{n}$$

$$\therefore \Delta S \doteq \frac{nr'}{2} \cot \frac{\pi}{n} \Delta r'$$

$$\frac{\Delta S}{S} = \Delta S \left/ \frac{nr'^2}{4} \cot \frac{\pi}{n} \right. = 2 \frac{\Delta r'}{r'}$$

(ii): この時も  $\Delta r_1' = \dots = \Delta r_n' = \Delta r'$

明らかにこの場合は,

$$\Delta S = 2m^2 r' \Delta r' \pm m^2 \Delta r'^2$$

但し複号は  $\Delta r' \geq 0$  の時  $+$  を,  $\Delta r' < 0$  の時  $-$  をとる.

$$\frac{\Delta S}{S} = 2 \frac{\Delta r'}{r'} \pm \left( \frac{\Delta r'}{r'} \right)^2$$

この二つの場合に於て前記のデーターの結果を使つて数値計算を行つてみる.

$$\Delta r = \pm 0.20 \text{ m}, \quad \Delta \psi = \frac{0.5 \pi}{180} \text{ ラジアン}$$

$r' = 24 \text{ m}$  の場合,  $\Delta r'$  は,  $\psi$  の色々の値に対し次の表のやうになる.

$\psi$	$0^\circ$	$15^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$
$\Delta r'$ ( $\Delta r = 0.20$ の時)	0.200	0.143	0.084	0.052	0.017	-0.022	-0.068
$\Delta r'$ ( $\Delta r = -0.2$ の時)	-0.200	-0.249	-0.279	-0.294	-0.310	-0.329	-0.351

これを用ひて  $\Delta S$  を計算すれば、 $S$  の bias は、(イ)、(ロ) 二つの場合の差は微小であり、殆ど同じである。それを図示すれば fig. 31 となる。

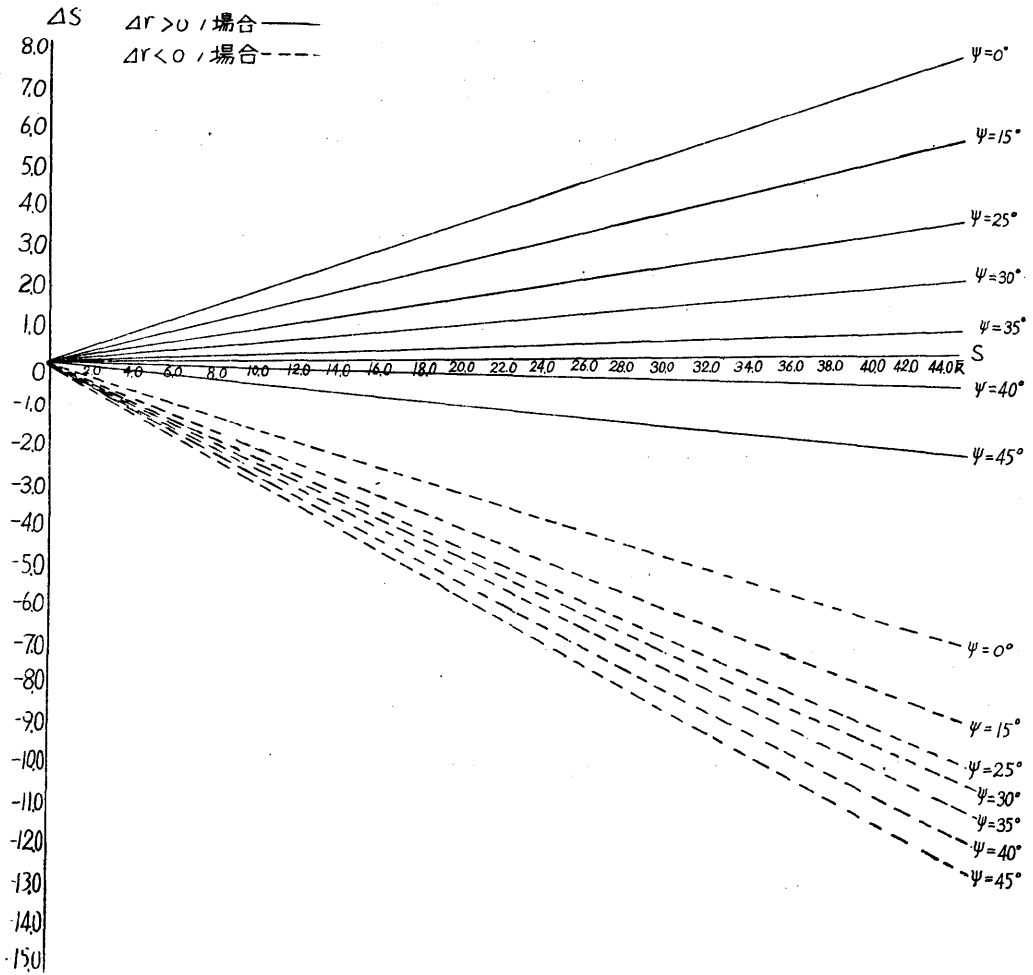


fig. 31

よつて、面積の bias は相対誤差として、正の方に 1.7%，負の方に 3% 以内である。

fig. 25, 26, 27, 28 と fig. 31 を比べてみれば、random error に比し、bias が可成り大である。

§3 修正法について

測量した値に従つて地図を作成する時、始点と終点にくひ違ひが起るが、その場合、くひ違つた部分を、各辺の長さに応じて比例配分して平行移動する修正が行はれる。(fig. 32 参照)

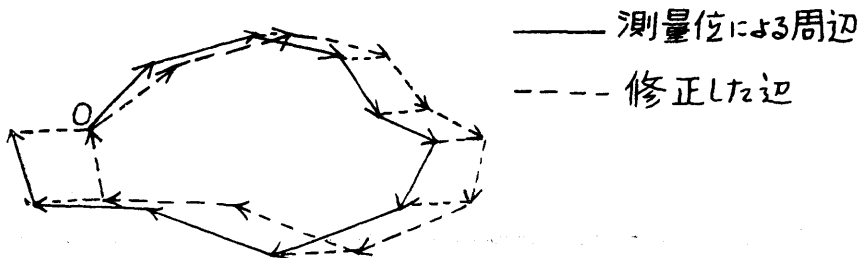
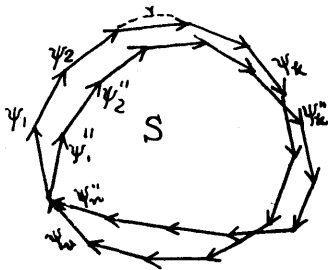


fig. 32

この修正法が統計的に見てどれ程意味のあるものであるかを考へる事にする。  
 簡単の為に, area が水平面内にある一辺の長さ  $r$  の正多角形とす。



(図中の  $\phi$  は  $\psi$  のあやまり)

真の辺を  $l_1, \dots, l_n$

測量による辺を  $l'_1, \dots, l'_n$

修正した辺を  $l''_1, \dots, l''_n$

$$\text{とすれば } l''_k = l'_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l'_i \quad (k=1, \dots, n)$$

$S$  の測量値を  $S_1$ , 修正後の値を  $S_2$ , 夫々の誤差を  $\Delta S_1, \Delta S_2$  とす. bias が無い場合には, (5) 式を使つて  $\psi=0$  とおく事により,

$$V(\Delta S_1) \doteq \frac{nr^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left\{ \sigma_r^2 \left( 2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) + r^2 \sigma_\theta^2 \right\}$$

又  $E(\Delta S_1) \doteq 0$  だつた.

今  $E(\Delta S_2), V(\Delta S_2)$  を計算すれば

$$E(\Delta S_2) \doteq 0$$

$$V(\Delta S_2) \doteq \frac{nr^2 \sigma_r^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

故に, bias がある場合でも,  $E(S_1) = \bar{S}$  とすれば

$$E(\Delta S_1) \doteq E(\Delta S_2) \doteq \bar{S}$$

$$V(\Delta S_1) \doteq \frac{nr^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left\{ \sigma_r^2 \left( 2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) + r^2 \sigma_\theta^2 \right\}$$

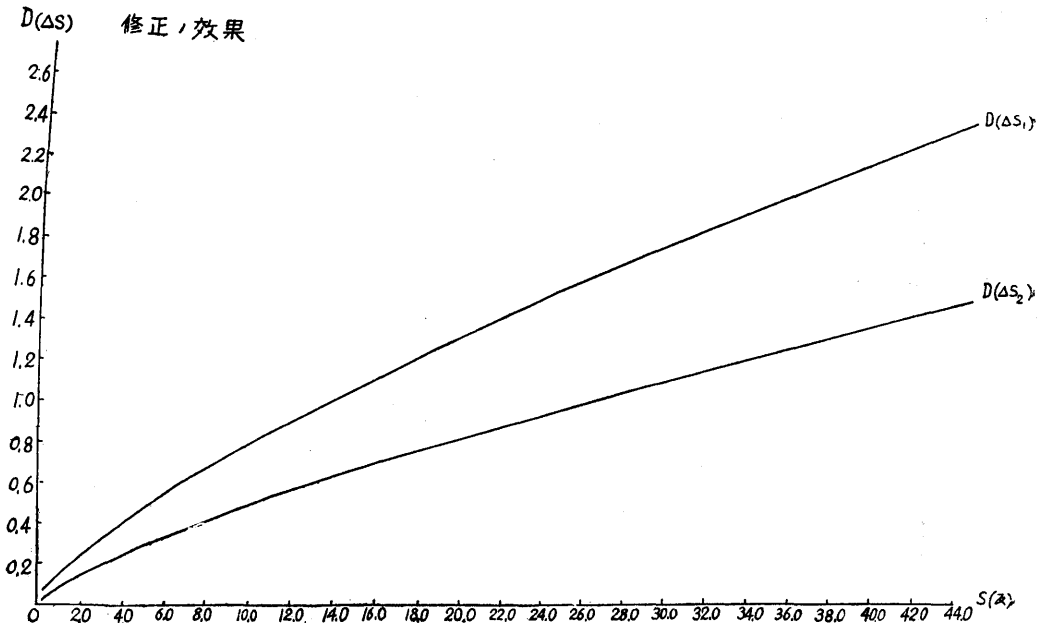


fig. 33

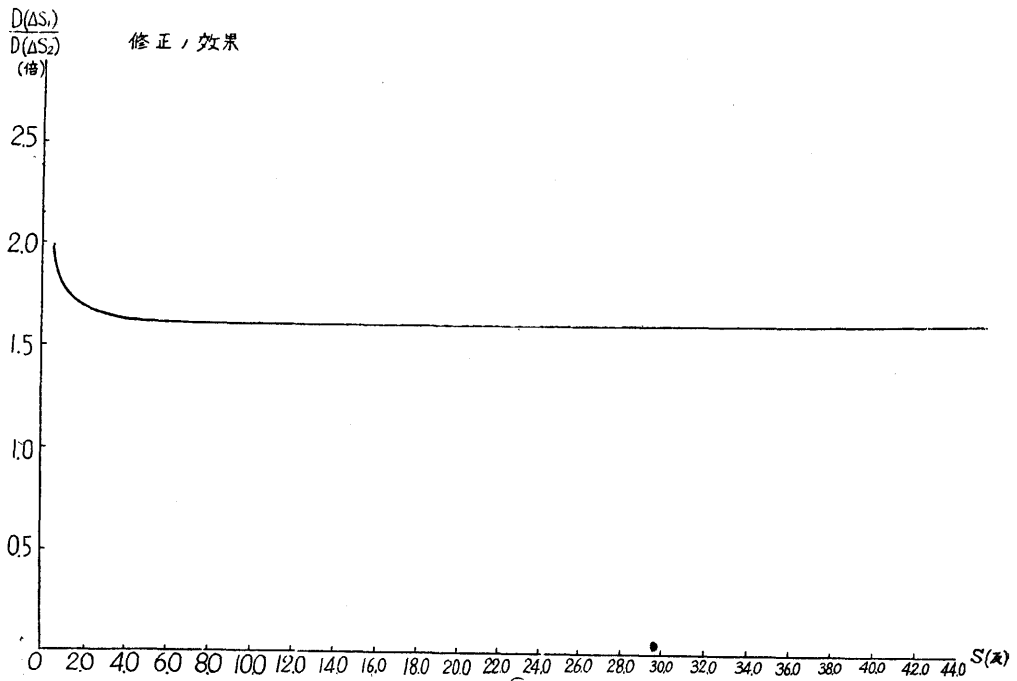


fig. 34

$$V(\Delta S_2) \doteq \frac{nr^2 \sigma_r^2}{8 \sin^2 \frac{\pi}{n}} \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right)$$

$$\frac{V(\Delta S_1)}{V(\Delta S_2)} \doteq \frac{\left\{ \sigma_r^2 \left( 2 + \cos \frac{2\pi}{n} \right) + r^2 \sigma_\theta^2 \right\}}{\sigma_r^2 \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{n} \right)}$$

今  $D(\Delta S_1)$ ,  $D(\Delta S_2)$  と  $S$  の関係及び  $\frac{D(\Delta S_1)}{D(\Delta S_2)}$  と  $S$  の関係をえがけば, fig. 33, fig 34 となる.  $D(\Delta S_2) \leq \frac{2}{3} D(\Delta S_1)$  即ち標準偏差に関し, 修正値の方が  $2/3$  以下となる. これは必ずしも修正した方が誤差が小となる事を意味しない. 若し測量に bias を伴ふ時は, 即ち  $\bar{S} \neq S$  の時は, 修正により,  $\bar{S}$  がより正確に定められるが,  $S$  に対する誤差は減る事にはならぬ. 故に修正法に意味ありとすれば, それは,  $\bar{S}$  のまはりの散らばりを小におさへる事にある. ただ bias の order が  $D(\Delta S_1)$  の order に比し微小であれば修正を行ふ事は相当有効である. 故に測量の際に bias を出来るだけ小に押へれば, 誤差は非常に小さく出来る.

上記の場合は正多角形と仮定したので容易に計算出来たが, 複雑な図形の場合, 修正の意味がどれだけあるかは, 甚だ複雑で何ともいへない. 単純に結論を下すことは危険である.

統計数理研究所

〔訂正〕 前号 82 頁森林調査に於ける統計数理的問題第三章の図は逆向きである. つまり J 型ではなく L 型の分布となる.