Wiener 過程の P. Lévy による構成

高　野　金　作

(1954 年 2 月 受付)

On P. Lévy's Construction for Wiener Process

Kinsaku TAKANO

This is an expository for P. Lévy's construction of Wiener process, with the aim to make his intuitive description logically clear.
Let $\xi(1)$, $\xi(1/2)$, $\xi(1/4)$, $\xi(3/4)$, $\xi(1/8)$, $\xi(3/8)$, $\xi(5/8)$, $\xi(7/8)$, $\xi(1/16)$, $\cdots$, $\xi(15/16)$, $\cdots$ be independent random variables each of which is normaly distributed with mean 0 and variance 1. Let us put

$$X(0)\equiv 0,\ X(1)\equiv\xi(1),\ X\left(\frac{1}{2}\right)\equiv\frac{1}{2}\{X(0)+X(1)\}+\frac{1}{2}\xi\left(\frac{1}{2}\right),\ \cdots,$$

in general,

$$\text{(i)}\quad X\left(\frac{h}{2^n}\right)\equiv\frac{1}{2}\left\{X\left(\frac{h-1}{2^n}\right)+X\left(\frac{h+1}{2^n}\right)\right\}+\frac{1}{2^{(n+1)/2}}\xi\left(\frac{h}{2^n}\right),$$
$$h=1,3\cdots,\ 2^n-1;\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

For each sample sequence given by (i), let us define $f_n(t)$ such that

$$f_n\left(\frac{k}{2^n}\right)=X\left(\frac{k}{2^n}\right),\qquad k=0,1,\cdots,2^n,$$

$f_n(t)$ is linear in each interval $\left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)$, $k=1,2,\cdots 2^n$,

for all $n=1,2,\cdots$.

Then, with probability 1, $f_n(t)$ tends to a continuous function $X(t)$ uniformly in $0\leqq t\leqq 1$ as $n\to\infty$, and the set of random variables $\{X(t);\ 0\leqq t\leqq 1\}$ is proved to be a Wiener process.

Institute of Statistical Mathematics

1. 前書. 確率過程を作る一般的方法は函数空間の中に確率を導入する Kolmogoroff-Doob の形式的な方法であるが，この他に試行の系列によつて具体的に見本函数 (sample function) を作つてゆく P. Lévy の方法がある．本文はこの P. Lévy の方法を確率過程の中で最も重要なものの一つである Wiener 過程（ブラウン運動過程とも言う）について解説することを目的とする．P. Lévy の叙述は直観的で論理的には分り難い点もあるので，論理的な推論にも注意しながら述べる．

2. Wiener 過程の定義. Ω を確率空間とし，T を直線上の区間とする．確率空間 Ω の殆んどすべての点 ω に T で定義された実数値函数 $X(t,\omega)$ が対応しているときは，一般に t を径数とする確率変数の集り $\{X(t),\ t\in\mathrm{T}\}$ を得る．この様な確率変数の集り $\{X(t), t\in\mathrm{T}\}$ を確率過程という．標題の Wiener 過程は普通次の二つの条件によつて定義されている．

（A） 任意の $t_1<t_2<\cdots<t_n\ (n\geqq 3)$ に対し，差

$$X(t_2)-X(t_1),\ X(t_3)-X(t_2),\cdots\cdots,\ X(t_n)-X(t_{n-1})$$

は互に独立である．

（B） 任意の t', t'' に対し差 $X(t'')-X(t')$ は平均値 0，分散 $|t''-t'|$ なる正規分布 $N(0, |t''-t'|)$ に従う．

われわれは区間 T は $0 \leqq t < \infty$ 又は $0 \leqq t \leqq a$ $(a<\infty)$ とし，初期条件 $X(0) \equiv 0$ が成立しているものとする．

条件（A），（B）を満足する確率過程 $\{X(t)\}$ が存在することは，$0<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n<\cdots\cdots$ なる t の値の系列 $\{t_n\}$ しか問題でないときには，次の様にして分る．$Y_1, Y_2, \cdots\cdots, Y_n, \cdots\cdots$ を独立な確率変数で，それぞれ正規分布 $N(0, t_1)$，$N(0, t_2-t_1), \cdots\cdots, N(0, t_n-t_{n-1}), \cdots\cdots$ に従うとし，$X(t_1)=Y_1$，$X(t_2)=Y_1+Y_2, \cdots\cdots$，$X(t_n)=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n\cdots\cdots$ とおけば，$\{t_n\}$ の任意の有限部分集合に対し，（A），（B）は成立つ．然しながら，t にすべての正実数値を許すときには，上述の（A），（B）を成立させる確率過程 $\{X(t);\ 0 \leqq t < \infty\}$ が存在することは，簡単に分ることではない．このことは，普通，Kolmogoroff の拡張定理を用いて，（A），（B）が成立する様に，函数空間のぼれる集合系に確率測度を入れることによつて証明されているが，P. Lévy[1] はさうしないで，適当な確率的実験の系列 ω によつて見本函数を作る方法をとり，Wiener 過程の構成的存在証明を与えている．吾々の立場では，確率的実験の数学的模型が確率空間乃至はそこで定義された確率変数であり，独立な実験の組は，確率空間の直積乃至はそこで定義された独立な確率変数の組に対応するから，適当な確率的実験の系列 ω によつて見本函数 $X(t, \omega)$ を作ることは，適当な確率空間を作り，その各要素 ω（確率 0 の ω 集合は除外してよい）にそれぞれ函数 $X(t, \omega)$ を対応させることになるわけであるが，直観的内容を重視する P. Lévy は確率空間を表面に出さないで，確率的実験だけで話を進めている．それはそれでよいのであるけれども，我々には確率的実験よりも確率空間の方がはつきりする様に思はれるので，P. Lévy[1] の Wiener 過程の構成を，初めから適当な確率空間を作つておいて，そこで議論してみようと思う．

3. Wiener 過程の若干の性質．条件（A），（B）を成立させる様な確率過程 $\{X(t)\}$ を作る前に，即ち，適当な確率空間 (Ω, B, P) の殆んどすべての要素 $\omega \in \Omega$ にそれぞれ函数 $X(t, \omega)$ を対応させて，（A），（B）が成立する様にする前に，その様な $\{X(t)\}$ があるものとして，その性質を若干しらべてみる．但し，前に述べた様に $X(0)=0$ とし $t \geqq 0$ で考える．

（C） $$E\{X(t)\}=0,\quad \mathrm{cov}\{X(t'), X(t'')\}=\min(t', t'').$$

ここに cov は共分散（covariance）を表はす．

証明 $X(t)=X(t)-X(0)$ は（B）により $N(0, t)$ に従うから，

$$E\{X(t)\}=0,\qquad E\{X(t)^2\}=t.$$

次に $t'<t''$ とすれば，$X(t')=X(t')-X(0)$ と $X(t'')-X(t')$ とは独立であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\{X(t'), X(t'')\} &= E\{X(t')X(t'')\}=E\{X(t')(X(t'')-X(t'))\}+E\{X(t')^2\}\\ &= E\{X(t')\}\cdot E\{X(t'')-X(t')\}+t'=t'.\end{aligned}$$

（D） $$t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n<t,\ (n \geqq 1)$$

ならば $X(t)$ は

$$X(t)=X(t_n)+\sqrt{t-t_n}\,\xi(t) \tag{1}$$

なる形に表すことができる．ここに，$\xi(t)$ は $\{X(t_1), X(t_2), \cdots\cdots, X(t_n)\}$ とは独立に $N(0,1)$ に従つて分布する確率変数である．

証明 $\xi(t)$ を（1）によつて定義しておく

$$X(t_1)=X(t_1)-X(0), X(t_2)-X(t_1), \cdots\cdots, X(t_n)-X(t_{n-1}), X(t)-X(t_n)=\sqrt{t-t_n}\,\xi(t)$$

は (A) により独立であるから，$\sqrt{t-t_n}\xi(t)$ は $\{X(t_1), X(t_2)-X(t_1), \cdots\cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})\}$ と独立である (伊藤 [1]，定理 13.8). 従つて $\xi(t)$ は $\{X(t_1), X(t_2), \cdots\cdots, X(t_n)\}$ と独立である (同書，定理 13.9). $\xi(t)$ の分布が $N(0,1)$ であることは (B) から出る.

(E) $\quad t_{-m}<t_{-m+1}<\cdots\cdots<t_{-1}<t_0<t<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_n,\ (n\geqq 1, m\geqq 0)$

ならば，$X(t)$ は

$$X(t)=\mu(t)+\sigma(t)\xi(t) \tag{2}$$

なる形に表すことができる．ここに

$$\mu(t)=\frac{(t_1-t)X(t_0)+(t-t_0)X(t_1)}{t_1-t_0}, \qquad \sigma(t)=\left\{\frac{(t-t_0)(t_1-t)}{t_1-t_0}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

で $\xi(t)$ は $\{X(t_k);\ k=-m,\ -m+1, \cdots\cdots, n\}$ とは独立に $N(0,1)$ に従つて分布する確率変数である.

証明

$$X(t_{-m})=X(t_{-m})-X(0), X(t_{-m+1})-X(t_{-m}), \cdots\cdots,$$
$$X(t)-X(t_0), X(t_1)-X(t), \cdots\cdots, X(t_n)-X(t_{n-1})$$

は $m+n+2$ 次元 の正規分布に従うから，その一次変換である

$$X(t_{-m}), X(t_{-m+1}), \cdots\cdots, X(t_0), \xi(t), X(t_1), \cdots\cdots, X(t_n)$$

も $m+n+2$ 次元 の正規分布に従い，且つ，$\xi(t)$ と各 $X(t_k), (k=-m, -m+1, \cdots\cdots, n)$，との共分散は (C) を用いて 0 となるから，$\{\xi(t), X(t_{-m}), \cdots\cdots, X(t_n)\}$ の特性函数は $\xi(t)$ のそれと $\{X(t_{-m}), \cdots\cdots, X(t_n)\}$ のそれとの積で表はされる．故に，次の補題により $\xi(t)$ と $m+n+1$ 次元 の確率変数

$$\{X(t_{-m}), X(t_{-m+1}), \cdots\cdots, X(t_0), X(t_1), \cdots\cdots, X(t_n)\}$$

とは独立である．$\xi(t)$ が $N(0,1)$ に従うことは

$$\sigma(t)\xi(t)=X(t)-\mu(t)=\frac{(t_1-t)(X(t)-X(t_0))+(t-t_0)(X(t)-X(t_1))}{t_1-t_0}$$

に於て，$X(t)-X(t_0)$, $X(t_1)-X(t)$ が独立にそれぞれ $N(0, t-t_0)$, $N(0, t_1-t)$ に従うことから出てくる.

補題　一次元確率変数 X_0 と n 次元確率変数 $(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n)$ とが独立であるために必要且充分な条件は，すべての実数の組 $t_0, t_1, \cdots\cdots, t_n$ に対し

$$\varphi(t_0, t_1, \cdots\cdots, t_n)=\varphi_1(t_0)\varphi_2(t_1, \cdots\cdots, t_n)$$

が成立つことである．茲に，$\varphi(t_0, t_1, \cdots\cdots, t_n), \varphi_1(t_0), \varphi_2(t_1, \cdots\cdots, t_n)$ はそれぞれ $(X_0, X_1, \cdots\cdots, X_n)$, X_0, $(X_1, \cdots\cdots, X_n)$ の特性函数である (伊藤 [1]，定理 13.7).

4. Wiener 過程の構成. 区間 $0\leqq t\leqq a, (a<+\infty)$，又は区間 $0\leqq t<\infty$ を径数の集合とする Wiener 過程 $\{X(t)\}$ を作るのに，この区間に於て到る所稠密な可算集合

$$t_0=0, t_1, t_2, \cdots\cdots, t_n, \cdots\cdots \tag{4}$$

をとり，確率変数 $X(t_0)\equiv 0, X(t_1), X(t_2), \cdots\cdots$ の値を (1) 又は (2) を用いて次々に定め，然る後 $X(t)$ の連続性 (これは証明される) を用いて，t の函数 $X(t)$ を求める方針をとる．記述を簡単にするために，区間 $0\leqq t\leqq 1$ に於て考えることとし (以後出て来る t はすべて $0\leqq t\leqq 1$ とする)，この区間で稠密な可算集合として系列

$$0,1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8};\ \frac{1}{16},\ \cdots,\ \frac{15}{16};\cdots \qquad (5)$$

をとる．第3項以下は線分 (0, 1) を逐次2等分, 4等分, 8等分, $\cdots$, 2^n 等分, $\cdots$ してゆくときできる新しい分点をその都度小さい方から順に並べたものである．

先づ，次の如き確率空間 (Ω, B, P) を作ることができる．$\xi(1), \xi(1/2), \xi(1/4), \xi(3/4), \xi(1/8), \xi(3/8), \xi(5/8), \xi(7/8), \xi(1/16), \cdots$ は，確率空間 Ω で定義された独立な確率変数の系列で．各 ξ の分布は何れも $N(0,1)$ である．この確率空間 Ω に於て，

$$X(0)\equiv 0,\quad X(1)\equiv\xi(1),\quad X\left(\frac{1}{2}\right)\equiv\frac{1}{2}\{X(0)+X(1)\}+\frac{1}{2}\xi\left(\frac{1}{2}\right),\cdots$$

一般に

$$X\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right)\equiv\frac{1}{2}\left\{X\left(\frac{h-1}{2^{n+1}}\right)+X\left(\frac{h+1}{2^{n+1}}\right)\right\}+\frac{1}{2^{n/2+1}}\xi\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right), \qquad (6)$$
$$h=1,\ 3,\ 5,\cdots,2^{n+1}-1;\quad n=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

によつて，系列 (5) に属するすべての t の値に対して，確率変数 $X(t)$ を定義する．然るときは，任意の正整数 n に対し，2^n 個の確率変数の組

$$2^{n/2}\left\{X\left(\frac{k}{2^n}\right)-X\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right\},\quad (k=1,\ 2,\cdots,2^n), \qquad (7)$$

は，2^n 個の確率変数の組

$$\xi(k/2^n),\ (k=1,\ 2,\cdots,2^n), \qquad (8)$$

の直交変換となる．証明は帰納法による．$n=1$ のときは

$$\left.\begin{aligned}2^{1/2}\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)-X(0)\right\}&=2^{-1/2}\xi(1)+2^{-1/2}\xi\left(\frac{1}{2}\right),\\ 2^{1/2}\left\{X(1)-X\left(\frac{1}{2}\right)\right\}&=2^{-1/2}\xi(1)-2^{-1/2}\xi\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}\right\}$$

であつて，上述のことは成立つ．n のとき成立すれば，$n+1$ のときにも成立することは，次式から明らかである．h を奇数として

$$2^{(n+1)/2}\left\{X\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right)-X\left(\frac{h-1}{2^{n+1}}\right)\right\}=2^{-1/2}\cdot 2^{n/2}\left\{X\left(\frac{h+1}{2^{n+1}}\right)-X\left(\frac{h-1}{2^{n+1}}\right)\right\}+2^{-1/2}\xi\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right),$$
$$2^{(n+1)/2}\left\{X\left(\frac{h+1}{2^{n+1}}\right)-X\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right)\right\}=2^{-1/2}\cdot 2^{n/2}\left\{X\left(\frac{h+1}{2^{n+1}}\right)-X\left(\frac{h-1}{2^{n+1}}\right)\right\}-2^{-1/2}\xi\left(\frac{h}{2^{n+1}}\right),$$
$$h=1,\ 3,\ 5,\cdots,\ 2^{n+1}-1.$$

(8) は独立で何れも正規分布 $N(0,\ 1)$ をもつから，それの直交変換である (7) もやはり独立で各々は正規分布 $N(0,1)$ をもつ．従つて，2^n 個の確率変数 $X(k\cdot 2^{-n})-X((k-1)\cdot 2^{-n})$, $(k=1,\ 2,\cdots,2^n)$, は独立であつて，各々は正規分布 $N(0,2^{-n})$ をもつ．

次に，系列 (5) に属するすべての t の値に対して，$\xi(t)$ が，従つて，$X(t)$ が定義されている様な $\omega\in\Omega$ を任意に固定して，函数 $f_n(t)$ を

$$f_n\left(\frac{k}{2^n}\right)=X\left(\frac{k}{2^n}\right),\quad (k=0,1,2,\cdots,2^n),$$

$$f_n(t)\ \text{は区間}\left(\frac{k-1}{2^n},\ \frac{k}{2^n}\right)\ \text{では}\ t\ \text{の一次式},\ (k=1,2,\cdots,2^n)$$

によつてきめると，この $f_n(t)$ は求むる函数 $X(t,\omega)$ の第 n 近似として考えることができる．実際，次の定理が成立つ，

定理　殆どすべての ω に対し，$f_n(t)$ は $n\to\infty$ の時，区間 $(0,1)$ に於てある連続函数 $X(t,\omega)$ に一様収斂し，この極限の函数 $X(t,\omega)$ を ω に対応させて得る確率過程は性質（A),（B）をもつ，

証明

$$U_n(t)=f_n(t)-f_{n-1}(t)$$

とおけば，

$$\max_{0\leq t\leq 1}|U_n(t)|=\max\left\{\left|U_n\left(\frac{1}{2^n}\right)\right|,\ \left|U_n\left(\frac{3}{2^n}\right)\right|,\cdots,\left|U_n\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)\right|\right\}.$$

然るに，h を奇数とするとき，

$$\begin{aligned}U_n\left(\frac{h}{2^n}\right)&=f_n\left(\frac{h}{2^n}\right)-f_{n-1}\left(\frac{h}{2^n}\right)\\&=X\left(\frac{h}{2^n}\right)-\frac{1}{2}\left[X\left(\frac{h-1}{2^n}\right)+X\left(\frac{h+1}{2^n}\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\left[X\left(\frac{h}{2^n}\right)-X\left(\frac{h-1}{2^n}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[X\left(\frac{h+1}{2^n}\right)-X\left(\frac{h}{2^n}\right)\right]\end{aligned}$$

が成立し，$X(h/2^n)-X((h-1)/2^n)$，$X((h+1)/2^n)-X(h/2^n)$ は独立に $N(0,2^{-n})$ に従うから，($U_n(h/2^n)$ は $N(0,2^{-n-1})$ に従う．依つて，正数 x_n をとり

$$\alpha_n=P_r\{\max_t|U_n(t)|>2^{-(n+1)/2}\cdot x_n\}$$

とおけば

$$\alpha_n\leqq\sum_{k=1}^{2^{n-1}}P_r\left\{\left|U_n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)\right|>2^{-(n+1)/2}\cdot x_n\right\}=2^{n-1}P_r\{|\xi|>x_n\}.$$

ここに，ξ は $N(0,1)$ に従う正規変数である．

$$P_r\{|\xi|>a\}<\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{2}{a}e^{-a^2/2}\quad(a>0)$$

に注意して

$$x_n=c\sqrt{2n\log 2},\qquad (c\text{ は定数})$$

とおけば，

$$\alpha_n\leqq\frac{2^n}{2c\sqrt{\pi n\log 2}}e^{-c^2n\log 2}=\frac{2^{(1-c^2)n}}{2c\sqrt{\pi n\log 2}}.$$

$c>1$ とすれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_r\{\max_t|U_n(t)|>2^{-(n+1)/2}x_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n<\infty$$

となる．故に，Borel-Cantelli の定理（伊藤 [1]，定理 3.4）により，殆んど確実に N が存在して

$$\max_t|U_n(t)|\leq\frac{x_n}{\sqrt{2^{n+1}}}=c\sqrt{\frac{n\log 2}{2^n}},\qquad n>N.$$

依つて，殆んど確実に級数 $\sum U_n(t)$ は t について一様に収斂する．$f_n(t)$ は連続であるから，従つて，殆んど確実に $f_n(t)$ は或連続函数 $X(t)$ に一様収斂する．以上により確率空間 Ω に於て，

殆んど確実に各 $\omega \in \Omega$ にそれぞれ連続函数 $X(t)$ を対応させることができた．任意の t に対し，2^{-n} の倍数 t_n をとつて $\lim t_n = t$ ならしめると，確率変数 $X(t_n)$ は $X(t)$ に概収斂するから，$X(t)$ も確率変数であることが分る．かくして得られた確率変数の集り $\{X(t), 0 \leqq t \leqq 1\}$ が性質 (A), (B) をもつことを証明すればよい．

(A) の証明 $t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_k, (k \geqq 3)$，を任意にきめておく．$[2^n t_j]\ 2^n = t_{n_j}$ ($[x]$ は x を超えない最大の整数）とおけば，$\lim\limits_{n\to\infty} t_{n_j} = t_j$ $(j=1, 2, \cdots\cdots, k)$ であるから，

$$X(t_{n2}) - X(t_{n1}),\ X(t_{n3}) - X(t_{n2}), \cdots\cdots, X(t_{nk}) - X(t_{n,k-1}) \tag{9}$$

は $n \to \infty$ のとき

$$X(t_2) - X(t_1),\ X(t_3) - X(t_2), \cdots\cdots, X(t_k) - X(t_{k-1}) \tag{10}$$

に概収斂，従つて確率収斂する．充分大きな n に対しては ($2^{-n} < \min\limits_{2\leq j\leq k} |t_j - t_{j-1}|$ ならば)，$t_{n1} < t_{n2} < \cdots\cdots < t_{nk}$ となるから (7) の独立性から (9) は独立であることが分る．独立性は確率収斂によつて保存されるから（伊藤 [1]，定理 13.10)，(10) も独立でなければならぬ．

(B) の証明 $t' < t''$ を任意にきめておく，各正整数 n に対し 2^{-n} の倍数 t_n', t_n'' をとつて $\lim t_n' = t', \lim t_n'' = t''$ ならしめると，$X(t_n'') - X(t_n')$ は $X(t'') - X(t')$ に概収斂するから，従つて，法則収斂し，前者の分布は $N(0, |t_n'' - t_n'|)$ であるから，後者の分布は $N(0, t'' - t')$ でなければならぬ．

（統計数理研究所）

文　献

P. Lévy [1], Processus stochastiques et mouvement brownien, 1948.

伊藤清 [1]，確率論，岩波，現代数学 14，1953.