分散分析の場合二つの処理平均の比較に対して及ぼす F-test の影響*

塩　谷　実

(1953 年 7 月　受付)

Effect of Preliminary F-Test on the Comparison between Two Treatment Means, in the Analysis of Variance.

Minoru SIOTANI

ABSTRACT: In the analysis of variance, if the mean square due to a higher order interaction is not significant compared with error mean square by means of F-test (or z-test), it is often customary to amalgamate both mean squares and to use the resultant mean square as the unbiased variance of numerator of t-statistic for comparing two treatment means. However, even if the interaction mean square is not significant by F-test, it may happen, in practice, that it exists in the population. In such a case, studing the change of the significant level with which we first ietended to compare two treatment means, we must consider the situation that F-test could not detect the significance of the interaction. But in what extent the conditional probability differs from the unconditional one?

In this paper, the author obtains the conditional probability densty function of statistic T in power series under the condition $F \leqq F_{n}^{n'}(0.05)$, where $F_{n}^{n'}(0.05)$ is the 5 percent value of F-distribution for (n', n) degrees of freedom. T statistic defined in Section 2, is used for comparing two treatment means after the interaction mean square is amalgamated with the error mean square. In order to see the effects of the condition $F \leqq F_{n}^{n'}(0.05)$, he calculates the probabilities $P\{|T|>t_N(0.05)|F \leqq F_{n}^{n'}(0.05)\}$, $P\{|T|>t_N(0.05)\}$, and d defined in (20) and tabulates them in Table $1{\cdot}1 \sim 3{\cdot}3$ for the appropriate values of n' and n, where $t_N(0.05)$ is the 5 percent value of Student's t-distribution for $N=n'+n$ degrees of freedom.

Institute of Statistical Mathematics

1.　緒言　分散分析の際得られる error mean square は，二つの処理平均の比較をする t-検定の基礎となる不偏分散として用ひられる．所で実際問題に於て，higher order interaction に対応する mean square が，F-検定の結果有意でなければ，両者を合して，t-検定の基礎となる不偏分散として使用する事が普通に行はれて居る．併し若し実際母集団に於て，その interaction が存在するならば，新に得られた mean square は t-検定に於ける分子の不偏分散とならず，異質なものが加はつて居ることになる．此の時の様子を調べる時には，F-検定に合格したといふ條件の下に於ける二つの處理平均の比較を考へなければならない．所で F-検定に合格したと言ふ條件はどの程度処理平均の比較に影響を及ぼすであろうか．上の分散分析の時に起る事情は，二つの標本に於て，先づ F-検定で等分散仮設を検定し，此れに合格したならば二つの平均の差の検定に移る手續の時にも考へられる．以上述べた様に，條件附きを考へなければならないと言ふ事は，最近発展の途上にある推測過程論の指摘する所である．推測過程論は Bancroft, C. Stein [1], B.M. Bennet [2]，北川敏男 [(3), I～III, (4)] 等に依り大いに研究発展しつゝある．本論文は此のうち特に分散分析の時に起る上に述べた様な事情を考慮して，第一次検定たる F-検定に合格したといふ條件

* 本論文は統計数理研究所附属養成所に於ける教育課程の研究の一部としてまとめたものである．

附きの影響を調べて見たのである.

2. 記 号

$\bar{x}$: 正規母集団 $N(0,\sigma^2)$ から取られた大さ r のランダム・サンプルの標本平均（処理平均 I）

$\bar{y}$: 正規母集団 $N(0,\sigma^2)$ から取られた大さ s のランダム・サンプルの標本平均（処理平均 II）

S^2: σ^2 の不偏推定値で自由度 n を持つ. $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ は自由度 n の χ^2-分布に従ふものと仮定される.（error mean square）

S'^2: σ'^2 の不偏推定値で自由度 n' を持ち $\dfrac{n'S'^2}{\sigma'^2}$ は自由度 n' の χ^2-分布に従ふと仮定される.（F-Test に合格し error mean square と一緒にされる higer order interaction）

上の四つの量は互に独立であると仮定する.

條件附きの影響を考へる時に必要な有意水準は便宜上5%水準を採用して論を進める.

$$N=n+n'$$

$$a=\sqrt{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}$$

$t_\alpha(0.05)$: 自由度 α の t-分布に於ける5%点

$F^\alpha_\beta(0.05)$: 自由度 (α,β) の F-分布に於ける5%点

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{a\sqrt{(nS^2+n'S'^2)/N}} \tag{1}$$

$$F=\frac{n'S'^2/n'}{nS^2/n}=\frac{S'^2}{S^2} \tag{2}$$

T は F-検定に合格した S'^2 を合した後, 処理平均 I, II の比較に用ひられる統計量である.

3. T, F の同時分布

$\bar{x}$-$\bar{y}$, nS^2, $n'S'^2$ の同時分布は互に独立であるから

$$f(x-y,\ nS^2,\ n'S'^2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma}e^{-\frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{2a^2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{2^{\frac{N}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)\sigma^n\sigma'^{n'}}[nS^2]^{\frac{n}{2}-1}[n'S'^2]^{\frac{n'}{2}-1}\cdot \tag{3}$$

$$e^{-\frac{1}{2}[(nS'^2/\sigma^2)+(n'S'^2/\sigma'^2)]}$$

此れに次の2通りの変換を施し T,F の同時分布を導く.

$$(\mathrm{A})\quad\begin{cases}T=(\bar{x}-\bar{y})/a\sqrt{(nS^2+n'S'^2)/N}\\ F=\dfrac{n}{n'}\dfrac{n'S'^2}{nS^2}\\ G=nS^2\end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad\begin{cases}T=(\bar{x}-\bar{y})/a\sqrt{(nS^2+n'S'^2)/N}\\ F=\dfrac{n}{n'}\dfrac{n'S'^2}{nS^2}\\ G'=n'S'^2\end{cases}$$

変換（A）を施し G を integrate out すれば

$$(4)\quad f_A(T,F)=\frac{\frac{n'}{n}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{N\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)K^{(n+1)/2}}\cdot$$

$$\left[\frac{n'}{n}F\right]^{\frac{n'}{2}-1}\left[1+\frac{n'}{n}F\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{T^2}{NK}\right)\left(1+\frac{n'}{n}F\right)-\left(1-\frac{1}{K}\right)\right]^{-\frac{N+1}{2}}$$

但し $K=\sigma^2/\sigma'^2$

此れを積分に都合の良いように無限級数の形に書く.

$$(5)\quad f_A(T,F)=\frac{\frac{n'}{n}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{N\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)K^{(n+1)/2}}\left[\frac{n'}{n}F\right]^{\frac{n'}{2}-1}$$

$$\left[1+\frac{n'}{n}F\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{T^2}{NK}\right)\left(1+\frac{n'}{n}F\right)\right]^{-\frac{N+1}{2}}\cdot\left[1-\frac{1-\frac{1}{K}}{\left(1+\frac{T^2}{NK}\right)\left(1+\frac{n'}{n}F\right)}\right]^{-\frac{N+1}{2}}$$

玆で $\frac{1}{2}<K<\infty$ の範囲のKに対しては $\left|1-\frac{1}{K}\right|<1$ であるから T,F に関して一様に次の様に書く事が出来る.

(6) $f_A(T,F)$

$$=\frac{\frac{n'}{n}\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{N\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)K^{(n+1)/2}}\left[\frac{n'}{n}F\right]^{\frac{n'}{2}-1}\left[1+\frac{n'}{n}F\right]^{\frac{1}{2}}\left[\left(1+\frac{T^2}{NK}\right)\left(1+\frac{n'}{n}F\right)\right]^{-\frac{N'+1}{2}}\cdot$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)i!}\left(1-\frac{1}{K}\right)^i\left(1+\frac{T^2}{NK}\right)^{-i}\left(1+\frac{n'}{n}F\right)^{-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}a_i(n;K)\,h_i(N,K;T)\,g_i(n,n';F)$$

但し $\frac{1}{2}<K<\infty$, 且つ

$$(7)\quad a_i(n;K)=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)i!}\left(\frac{1}{K}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{K}\right)^i$$

$$(8)\quad h_i(N,K;T)=\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}+i\right)}{\sqrt{N\pi K}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+i\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{T^2}{NK}\right)^{\frac{N+1}{2}+i}}$$

$$(9)\quad g_i(n,n';F)=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+i\right)}\left(\frac{n'}{n}\right)\frac{\left(\frac{n'}{n}F\right)^{\frac{n'}{2}-1}}{\left(1+\frac{n'}{n}F\right)^{\frac{N}{2}+i}}$$

とおいた.

同様の手続きを変換（B）に対して行へば $0<K<2$ の範囲のKに対して T,F に関して一様に

$$(10)\quad f_B(T,F)=\sum_{i=0}^{\infty}a'_i(n';K)h'_i(N;T)g'_i(n,n';F)\qquad(0<K<2)$$

と書ける.

但し

$$a'_i(n';K)=\frac{\Gamma\left(\frac{n'}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)i!}K^{\frac{n'}{2}}(1-K)^i$$

$$h'_i(N;T)=\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}+i\right)}{\sqrt{N\pi}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}+i\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{T^2}{N}\right)^{\frac{N+1}{2}+i}}$$

$$g'_i(n,n';F)=\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'}{2}+i\right)}\left(\frac{n'}{n}\right)\frac{\left(\frac{n'}{n}F\right)^{\frac{n'}{2}+i-1}}{\left(1+\frac{n'}{n}F\right)^{\frac{N}{2}+i}}$$

特に $K=1$ 即ち $\sigma^2=\sigma'^2$ の時は T, F は独立になり

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} f(T,F)&=h_0(N,1;\,T)\,g_0(n,n';\,F)\\ &=h_0'(N;\,T)\,g_0'(n,n';\,F)\\ &=\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sqrt{N\pi}\,\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{T^2}{N}\right)^{\frac{N+1}{2}}}\right\}\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'}{2}\right)}\left(\frac{n'}{n}\right)\frac{\left(\frac{n'}{n}F\right)^{\frac{n'}{2}-1}}{\left(1+\frac{n'}{n}F\right)^{\frac{N}{2}}}\right\}\end{aligned}$$

即ち自自由度 N の t-分布の密度と，自由度 (n', n) の F-分布の密度との積になる.

4. $F\leqslant F_n^{n'}(0.05)$ なる條件の下に於ける T の分布及び條件を考へない時の T の分布

(i) $0<K<2$ の場合

$$\text{(12)}\qquad f_B(T|F\leqslant F_n^{n'}(0.05))=\frac{\int_0^{F_n^{n'}(0.05)}f_B(T,F)dF}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{F_n^{n'}(0.05)}f_B(T,F)dF\,dT}=\frac{\sum_{i=0}^{\infty}a'_i(n';K)h'_i(N;T)I_{M'}\left(\frac{n'}{2}+i,\,\frac{n}{2}\right)}{\sum_{i=0}^{\infty}a'_i(n';\,K)I_{M'}\left(\frac{n'}{2}+i,\,\frac{n}{2}\right)}$$

但し $\qquad M'=\frac{n'}{n}F_n^{n'}(0.05)\Big/\left(1+\frac{n'}{n}F_n^{n'}(0.05)\right)$

$I_{M'}(p,q)=$Pearson の Incomplete Beta Function Ratio

條件を考へない時のTの密度函数は $M'=1$ とおけばよく，$\sum_{i=0}^{\infty}a'_i(n';K)=1$ であるから

$$\text{(13)}\qquad f_B(T)=\sum_{i=0}^{\infty}a'_i(n';\,K)h'_i(N;\,T)$$

となる.

(ii) $\frac{1}{2}<K<\infty$ の場合

$$f_A(T|F\leqslant F_n^{n'}(0.05))=\frac{\int_0^{F_n^{n'}(0.05)}f_A(T,F)dF}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{F_n^{n'}(0.05)}f_A(T,F)\,dF\,dT}$$

$$(14)\qquad = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n;K)\, h_i(N,K;T)\, I_M\left(\frac{n}{2}+i, \frac{n'}{2}\right)}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n;K) I_M\left(\frac{n}{2}+i, \frac{n'}{2}\right)}$$

但し

$$M = 1\Big/\left(1+\frac{n'}{n}F_n^{n'}(0.05)\right)$$

條件附きを考へない時は $M=1$ とおけば .

$$(15)\qquad f_A(T) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n;K)\, h_i(N,K;T)$$

を得る.

5. $F_n^{n'}(0.05)$ なる條件が及ぼす影響

吾々が高次の交互作用を検定にかけ，有意な結果を得なければ，此れを error mean square に合して，(1) なるTに基いて二つの処理平均の差の検定を行ふ事になるが，その時はTは自由度Nの t-分布に従ふとしている. そこで $F \leqq F_n^{n'}(0.05)$ なる條件を考慮に入れた時と入れない時とを比較するのに，基準になる臨界点を $t_N(0.05)$ にとり $P\{|T|>t_N 0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\}$, $P\{|T|>t_N(0.05)\}$ を計算し両者を比較することにする.

(i) $0<K<2$ の場合

$$P_B\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\}$$

$$(16)\qquad = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i'(n';K) I_{M'}\left(\frac{n'}{2}+i, \frac{n}{2}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} a'_i(n';K) I_{M'}\left(\frac{n'}{2}+i, \frac{n}{2}\right) \int_{|T|>t_N(0.05)} h_i(N;T)\,dT$$

$$= \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i'(n';K) I_{M'}\left(\frac{n'}{2}+i, \frac{n}{2}\right) I_{D'}\left(\frac{N}{2}+i, \frac{1}{2}\right)}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i'(n';K) I_{M'}\left(\frac{n'}{2}+i, \frac{n}{2}\right)}$$

但し $$D' = N/(N+t_N^2(0.05))$$

$F\leqq F_n^{n'}(0.05)$ なる條件を考へない時には $M'=1$ として

$$(17)\qquad P_B\{|T|>t_N(0.05)\} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i'(n';K) I_{D'}\left(\frac{N}{2}+i, \frac{1}{2}\right)$$

を得る.

(ii) $\frac{1}{2}<K<\infty$ の場合

$$(18)\qquad P_A\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} a^i(n;K) I_{D'}\left(\frac{n}{2}+i, \frac{1}{2}\right) I_M\left(\frac{n}{2}+i, \frac{n'}{2}\right)}{\sum_{i=0}^{\infty} a_i(n;K) I_M\left(\frac{n}{2}+i, \frac{n'}{2}\right)}$$

但し $$D = NK/(NK+t_N^2(0.05))$$

條件を考へない時には $M=1$ として

$$(19)\qquad P_A\{|T|>t_N(0.05)\} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(n;K) I_D\left(\frac{n}{2}+i, \frac{1}{2}\right)$$

6. 数　表

前節に導いた $P\{|T|>t_N(0.05)\}$, $P\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\}$ を数値計算して表を作成した. 数値計算に於ては K. PEARSON の不完全ベータ函数表［5］を使用た。なほ表を使用する時，各 argument に対する $I_x(p,q)$ の値を求めるのにグラフに依る補間を使用した. 得られ

た最後の値の小数点以下4桁目を四捨五入した．更に F–検定に合格したといふ條件附きの影響を見るため相対的量として

$$(20)\qquad d=\frac{P\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\}-P\{|T|>t_N(0.05)\}}{P\{|T|>t_N(0.05)\}}\times 100$$

を求め表にした．第 1·1～3·3 表第表は此等の結果であり，$P\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\}$ に対してはグラフを描いておいた．

7. 結 び

数表 1·3, 2·3, 3·3 を見れば容易に分る如く $K=\frac{\sigma^2}{\sigma'^2}$ の値が1より大きい時には $F\leqq F_n^{n'}(0.05)$ なる條件附きの影響は殆んどないと言つて差支へない程度のものである．しかし $K<1$ の時には條件附きの影響はやゝ大きくなつて来る．所で $P\{|T|>t_N(0.05)\}$ の 10%位の影響は問題にならないといふのであれば，$K=\sigma^2/\sigma'^2$ が 0.5 より大きいと見当のつけられる場合，$F\leqq F_n^{n'}(0.05)$ の影響は無視して差支へない．普通の二つの平均の差の検定に於ける第一次検定たる F–検定の影響も系統的に数値を求めていないが，今得られた表の程度の様である．

更に $P\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F_n^{n'}(0.05)\}$ の表は次の注意を喚起するのに役に立つ．即ち F–検定に合格した，即ち考へる統計量Fの実現値が棄却域に落ちなかつたといふ事から，直ちに等分散仮設を採択し，此れを次の段階に使用するのは危険であるといふ事である．実際には等分散でなくとも，F–検定に合格する事は有り得るので，細心の注意を払つて実際的見地から検討して見なければならない．若し等分散でなければ，Tを使ふ次の段階に於て，表に示す如く5%水準と言つても実際にはさうでなく或は小さく，或は大きい水準になつているのである．特に interaction に対する mean square のもつ自由度が大きい時は重大である．

最後に数表を作る時，数値計算を手伝つていたゞいた養成所の高瀬浜子嬢に感謝する．

（統計数理研究所）

参 考 文 献

〔1〕 STEIN. C., "A two samples test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance," Ann. Math. Stat., Vol. 16, 1945

〔2〕 BENNETT B.M., "Estimation of Means on the Basis of Preliminary Tests of Significance" Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol. 4, 1952

〔3〕 KITAGAWA. T., "Successive Process Of Statistical Inference." Memoirs of the Faculty of Science, Kyusyu Uniuersity. Ser. A, Vol. 5, I, 1950; II, 1951; Vol. 6, III, 1952

〔4〕 KITAGAWA, T., "Succssive Process of Statistical Inferences (4)" The Bulletin of Mathematical Statistics, Research Association of Statistical Sciences, Vol. 5, 1952

〔5〕 *Jables of the Incomplete Beta-Function,* edited by K. PEARSON, The "Biometrika" Office, London. 1948

第 1·1 表　$P\{|T|>t_N(0.05)|F\leq F_n^{n'}(0.05)\}$

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
	2	0.015	0.026	0.031	0.035	0.043	0.050^e	0.056	0.062	0.065	0.067	0.072	0.077
	4	0.022	0.031	0.035	0.038	0.045	0.050^e	0.055	0.059	0.061	0.063	0.066	0.068
	6	0.027	0.034	0.037	0.040	0.046	0.050^e	0.054	0.057	0.058	0.060	0.062	0.064
	8	0.030	0.037	0.039	0.042	0.046	0.050^e	0.053	0.056	0.057	0.058	0.060	0.062
	10	0.033	0.038	0.041	0.043	0.047	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.057	0.058	0.060
	12	0.035	0.040	0.042	0.044	0.047	0.050^e	0.052	0.054	0.055	0.056	0.057	0.058
	14	0.036	0.041	0.043	0.045	0.048	0.050^e	0.052	0.054	0.054	0.055	0.056	0.057
2	16	0.038	0.042	0.044	0.045	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.054	0.055	0.056
	18	0.039	0.043	0.044	0.046	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.054	0.055	0.056
	20	0.040	0.043	0.045	0.046	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.053	0.054	0.054	0.055
	22	0.041	0.044	0.045	0.046	0.048	0.050^e	0.051	0.053	0.053	0.053	0.054	0.055
	24	0.041	0.044	0.045	0.047	0.048	0.050^e	0.051	0.052	0.053	0.053	0.054	0.055
	26	0.042	0.045	0.046	0.047	0.049	0.050^e	0.051	0.052	0.053	0.053	0.054	0.054
	28	0.042	0.045	0.046	0.047	0.049	0.050^e	0.051	0.052	0.052	0.053	0.053	0.054
	38	0.044	0.046	0.047	0.048	0.049	0.050^e	0.051	0.051	0.052	0.052	0.052	0.053
	58	0.046	0.048	0.048	0.049	0.049	0.050^e	0.050	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051

第 1·2 表　$P\{|T|>t_N(0.05)\}$

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
	2	0.013	0.024	0.029	0.034	0.043	0.050^e	0.057	0.063	0.066	0.068	0.073	0.078
	4	0.016	0.027	0.032	0.037	0.044	0.050^e	0.055	0.059	0.061	0.063	0.066	0.069
	6	0.018	0.030	0.035	0.039	0.045	0.050^e	0.054	0.057	0.059	0.060	0.063	0.065
	8	0.020	0.032	0.036	0.040	0.046	0.050^e	0.053	0.056	0.057	0.058	0.060	0.062
	10	0.022	0.034	0.038	0.041	0.046	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.057	0.059	0.060
	12	0.024	0.035	0.039	0.042	0.047	0.050^e	0.053	0.055	0.055	0.056	0.057	0.058
	14	0.025	0.036	0.040	0.043	0.047	0.050^e	0.052	0.054	0.055	0.055	0.056	0.057
2	16	0.027	0.038	0.041	0.044	0.047	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.055	0.055	0.056
	18	0.028	0.038	0.042	0.044	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.054	0.055	0.056
	20	0.029	0.039	0.042	0.044	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.053	0.054	0.055	0.055
	22	0.030	0.040	0.043	0.045	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.053	0.054	0.054	0.055
	24	0.030	0.040	0.043	0.045	0.048	0.050^e	0.051	0.053	0.053	0.053	0.054	0.052
	26	0.031	0.041	0.043	0.045	0.048	0.050^e	0.051	0.052	0.053	0.053	0.054	0.054
	28	0.032	0.041	0.040	0.046	0.048	0.050^e	0.051	0.052	0.052	0.053	0.053	0.054
	38	0.035	0.043	0.045	0.047	0.049	0.050^e	0.051	0.052	0.052	0.052	0.052	0.053
	58	0.039	0.045	0.047	0.048	0.049	0.050^e	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051

第 1·3 表　d (%)

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
	2	17.6	6.2	4.1	2.4	0.7	0.0^e	−0.5	−1.0	−1.1	−1.2	−1.3	−1.4
	4	39.1	11.3	7.1	4.1	1.4	0.0^e	−0.7	−1.0	−1.1	−1.1	−1.2	−1.2
	6	47.2	13.3	7.8	4.7	1.3	0.0^e	−0.7	−0.9	−1.0	−1.0	−1.0	−1.1
	8	50.0	14.1	8.9	4.8	1.3	0.0^e	−0.6	−0.9	−0.8	−0.9	−0.8	−0.9
	12	49.4	13.6	7.9	4.6	1.1	0.0^e	−0.6	−0.7	−0.7	−0.7	−0.7	−0.8
	10	47.5	13.4	7.4	4.5	1.1	0.0^e	−0.4	−0.7	−0.7	−0.5	−0.5	−0.6
	14	45.6	12.4	7.3	4.0	1.1	0.0^e	−0.4	−0.6	−0.6	−0.5	−0.5	−0.5
2	16	43.0	11.7	6.6	3.9	1.1	0.0^e	−0.4	−0.6	−0.4	−0.4	−0.4	−0.5
	18	41.5	11.2	6.3	3.4	1.0	0.0^e	−0.4	−0.6	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	20	39.2	10.8	5.9	3.4	0.8	0.0^e	−0.4	−0.6	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	22	37.4	9.8	5.6	3.1	0.8	0.0^e	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	24	35.6	9.7	5.4	3.1	0.8	0.0^e	−0.2	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	26	34.0	9.1	5.3	2.9	0.6	0.0^e	−0.2	−0.4	−0.2	−0.2	−0.4	−0.4
	28	32.2	8.7	4.9	2.8	0.6	0.0^e	−0.2	−0.4	−0.2	−0.2	−0.4	−0.4
	38	25.9	7.0	3.8	2.4	0.6	0.0^e	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2
	58	18.7	4.9	2.8	1 5	0.4	0.0^e	−0.0	−0.0	−0.0	−0.0	−0.2	−0.2

第 2・1 表　$P\{|T|>t_N(0.05)|\leq F_n^{n'}(0.05)\}$

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
4	2	0.006	0.016	0.022	0.027	0.039	0.050^e	0.061	0.070	0.075	0.079	0.088	0.094
	4	0.010	0.020	0.026	0.031	0.041	0.050^e	0.058	0.065	0.069	0.072	0.078	0.083
	6	0.014	0.024	0.029	0.034	0.042	0.050^e	0.057	0.062	0.065	0.067	0.072	0.075
	8	0.017	0.027	0.031	0.036	0.043	0.050^e	0.056	0.060	0.063	0.065	0.068	0.071
	10	0.021	0.029	0.034	0.037	0.044	0.050^e	0.055	0.059	0.061	0.062	0.065	0.068
	12	0.023	0.031	0.035	0.039	0.045	0.059^e	0.054	0.058	0.059	0.061	0.062	0.066
	14	0.026	0.033	0.037	0.040	0.045	0.050^e	0.054	0.057	0.058	0.059	0.061	0.064
	16	0.028	0.035	0.038	0.040	0.046	0.050^e	0.054	0.056	0.058	0.059	0.061	0.063
	18	0.029	0.036	0.039	0.041	0.046	0.050^e	0.053	0.056	0.057	0.058	0.059	0.061
	20	0.031	0.037	0.040	0.042	0.047	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.057	0.059	0.061
	22	0.032	0.038	0.040	0.043	0.047	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.057	0.058	0.060
	24	0.033	6.038	0.041	0.043	0.047	0.050^e	0.053	0.054	0.055	0.056	0.057	0.059
	26	0.034	0.039	0.042	0.044	0.047	0.059^e	0.052	0.054	0.055	0.055	0.057	0.058
	36	0.038	0.042	0.044	0.045	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.053	0.054	0.054	0.055
	56	0.042	0.045	0.046	0.047	0.049	0.050^e	0.051	0.052	0.052	0.052	0.052	0.053

第 2・2 表　$P\{|T|>t_N(0.05)\}$

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
4	2	0.005	0.015	0.021	0.027	0.039	0.050^e	0.061	0.071	0.075	0.080	0.069	0.096
	4	0.007	0.018	0.024	0.030	0.040	0.050^e	0.059	0.066	0.069	0.073	0.079	0.084
	6	0.008	0.021	0.027	0.032	0.042	0.050^e	0.057	0.063	0.066	0.068	0.072	0.076
	8	0.010	0.023	0.029	0.034	0.043	0.050^e	0.056	0.061	0.063	0.065	0.068	0.071
	10	0.011	0.025	0.030	0.035	0.044	0.050^e	0.055	0.059	0.061	0.063	0.066	0.068
	12	0.013	0.026	0.032	0.037	0.044	0.050^e	0.055	0.058	0.060	0.061	0.064	0.066
	14	0.014	0.028	0.033	0.038	0.045	0.050^e	0.054	0.057	0.058	0.059	0.062	0.064
	16	0.015	0.029	0.034	0.039	0.045	0.050^e	0.054	0.057	0.058	0.059	0.061	0.063
	18	0.016	0.031	0.035	0.040	0.046	0.050^e	0.053	0.056	0.057	0.058	0.060	0.061
	20	0.018	0.032	0.036	0.040	0.046	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.057	0.059	0.061
	22	0.019	0.032	0.037	0.041	0.046	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.057	0.058	0.060
	24	0.020	0.033	0.038	0.042	0.046	0.050^e	0.053	0.055	0.056	0.056	0.058	0.059
	26	0.021	0.034	0.039	0.042	0.047	0.050^e	0.052	0.054	0.055	0.056	0.057	0.058
	36	0.025	0.037	0.041	0.044	0.048	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.054	0.054	0.055
	56	0.031	0.041	0.044	0.046	0.048	0.050^e	0.051	0.052	0.052	0.052	0.052	0.053

第 2・3 表　d (%)

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
4	2	18.4	6.0	3.8	1.9	0.8	0.0^e	−0.4	−0.7	−0.8	−0.9	−1.0	−1.1
	4	47.7	12.2	7.1	4.0	1.2	0.0^e	−0.7	−0.8	−0.9	−1.0	−1.0	−1.1
	6	69.3	16.0	8.7	5.0	1.2	0.0^e	−0.7	−0.8	−0.8	−0.9	−0.8	−0.9
	8	79.3	17.1	9.8	5.3	1.4	0.0^e	−0.5	−0.7	−0.6	−0.7	−0.6	−0.7
	10	84.0	19.1	10.2	5.4	1.4	0.0^e	−0.4	−0.7	−0.6	−0.6	−0.5	−0.6
	12	84.0	19.0	10.0	5.2	1.4	0.0^e	−0.4	−0.5	−0.5	−0.5	−0.5	−0.6
	14	84.0	18.5	9.9	5.0	1.3	0.0^e	−0.4	−0.4	−0.4	−0.5	−0.5	−0.5
	16	81.0	18.1	9.6	4.9	1.1	0.0^e	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.5
	18	78.8	17.1	9.1	4.8	1.1	0.0^e	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	20	75.5	16.5	8.8	4.7	1.1	0.0^e	−0.2	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	22	72.5	16.0	8.6	4.4	0.9	0.0^e	−0.2	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	24	69.8	15.3	8.2	4.4	0.9	0.0^e	−0.2	−0.2	−0.4	−0.4	−0.4	−0.4
	26	66.2	14.6	7.8	4.3	0.9	0.0^e	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.4	−0.4
	36	53.5	12.1	6.6	3.4	0.8	0.0^e	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.4	−0.4
	56	35.6	9.0	4.6	2.6	0.6	0.0^e	−0.0	−0.0	−0.0	−0.0	−0.2	−0.2

第 3・1 表　$P\{|T|>t_N(0.05)|F\leqq F^{m'}_n(0.05)\}$

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
	2	0.001	0.007	0.013	0.019	0.034	0.050^e	0.066	0.081	0.088	0.096	0.109	0.117
	4	0.002	0.010	0.015	0.022	0.036	0.050^e	0.064	0.076	0.082	0.088	0.098	0.108
	6	0.003	0.012	0.018	0.024	0.037	0.050^e	0.062	0.073	0.078	0.082	0.091	0.100
	8	0.005	0.014	0.020	0.026	0.039	0.050^e	0.060	0.069	0.072	0.075	0.081	0.087
	10	0.006	0.016	0.022	0.028	0.039	0.050^e	0.059	0.068	0.071	0.074	0.079	0.084
10	12	0.008	0.018	0.024	0.029	0.040	0.050^e	0.059	0.066	0.069	0.072	0.076	0.081
	14	0.010	0.020	0.026	0.031	0.041	0.050^e	0.058	0.065	0.067	0.070	0.075	0.078
	16	0.012	0.022	0.027	0.032	0.042	0.050^e	0.057	0.064	0.066	0.069	0.073	0.076
	18	0.014	0.023	0.028	0.033	0.042	0.050^e	0.057	0.062	0.065	0.067	0.070	0.073
	20	0.016	0.025	0.029	0.034	0.043	0.050^e	0.056	0.061	0.062	0.065	0.067	0.069
	30	0.019	0.030	0.034	0.038	0.044	0.050^e	0.054	0.057	0.058	0.059	0.060	0.061
	50	0.026	0.037	0.039	0.042	0.047	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.055	0.056	0.057

第 3・2 表　$P\{|T|>t_N(0.05)\}$

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
	2	0.001	0.007	0.013	0.019	0.034	0.050^e	0.066	0.082	0.089	0.097	0.110	0.119
	4	0.001	0.009	0.015	0.021	0.036	0.050^e	0.064	0.077	0.083	0.088	0.099	0.109
	6	0.002	0.010	0.016	0.023	0.037	0.050^e	0.062	0.073	0.078	0.083	0.092	0.100
	8	0.002	0.012	0.018	0.025	0.038	0.050^e	0.060	0.069	0.072	0.076	0.082	0.087
	10	0.003	0.013	0.020	0.026	0.039	0.050^e	0.060	0.068	0.071	0.075	0.080	0.085
10	12	0.003	0.015	0.021	0.028	0.040	0.050^e	0.059	0.066	0.069	0.072	0.077	0.081
	14	0.004	0.016	0.023	0.029	0.040	0.050^e	0.058	0.065	0.068	0.070	0.075	0.079
	16	0.004	0.017	0.024	0.030	0.041	0.050^e	0.058	0.064	0.067	0.069	0.074	0.077
	18	0.005	0.018	0.025	0.031	0.042	0.050^e	0.057	0.062	0.065	0.067	0.072	0.073
	20	0.006	0.019	0.026	0.032	0.042	0.050^e	0.056	0.061	0.063	0.064	0.067	0.069
	30	0.008	0.024	0.030	0.036	0.044	0.050^e	0.054	0.057	0.058	0.059	0.059	0.060
	50	0.013	0.030	0.036	0.040	0.046	0.050^e	0.052	0.053	0.054	0.055	0.056	0.057

第 3・3 表　d (%)

n'	n \ K	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.0
	2	44.4	4.2	2.4	2.1	0.6	0.0^e	−0.2	−0.6	−0.9	−1.0	−1.3	−1.4
	4	91.6	10.3	4.8	2.8	0.8	0.0^e	−0.3	−0.5	−0.6	−0.7	−0.8	−1.0
	6	100.0	15.5	8.5	4.3	1.1	0.0^e	−0.3	−0.5	−0.5	−0.6	−0.7	−0.7
	8	127.4	20.1	10.4	5.2	1.3	0.0^e	−0.3	−0.4	−0.4	−0.6	−0.7	−0.7
	10	136.8	23.5	11.7	5.7	1.5	0.0^e	−0.3	−0.4	−0.4	−0.5	−0.6	−0.6
10	12	143.8	25.4	12.3	6.1	1.8	0.0^e	−0.5	−0.3	−0.4	−0.4	−0.5	−0.6
	14	181.2	27.2	13.3	6.6	1.5	0.0^e	−0.3	−0.3	−0.3	−0.4	−0.4	−0.5
	16	181.4	27.6	13.7	6.7	1.5	0.0^e	−0.3	−0.3	−0.2	−0.4	−0.4	−0.5
	18	174.3	27.5	13.7	6.5	1.4	0.0^e	−0.2	−0.3	−0.2	−0.4	−0.4	−0.4
	20	148.4	27.2	13.5	6.5	1.8	0.0^e	−0.2	−0.3	−0.2	−0.4	−0.4	−0.4
	30	136.9	26.0	12.6	5.9	1.2	0.0^e	−0.2	−0.2	−0.2	−0.3	−0.4	−0.4
	50	99.5	22.5	10.1	5.0	0.9	0.0^e	−0.0	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2	−0.2

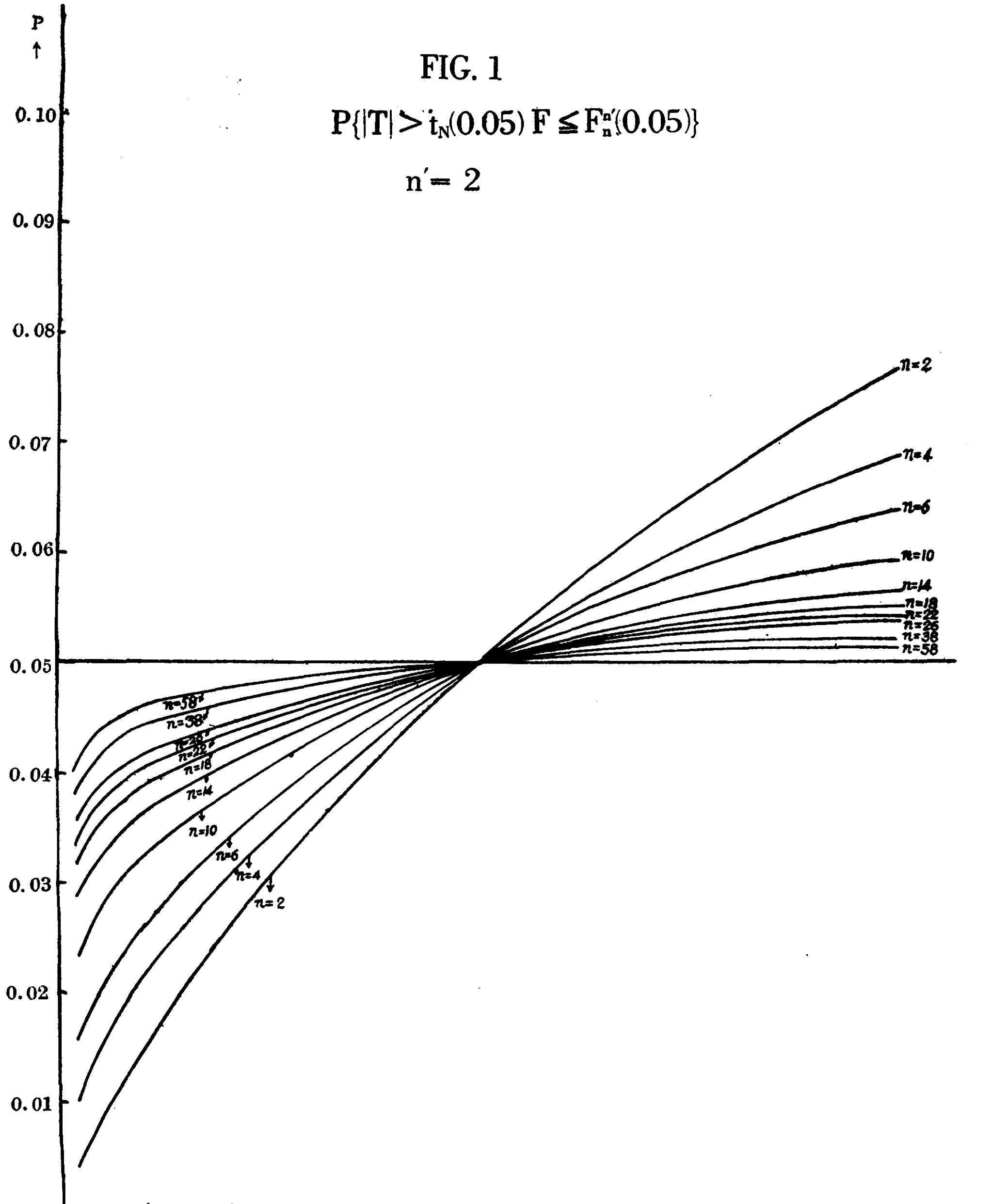


FIG. 1

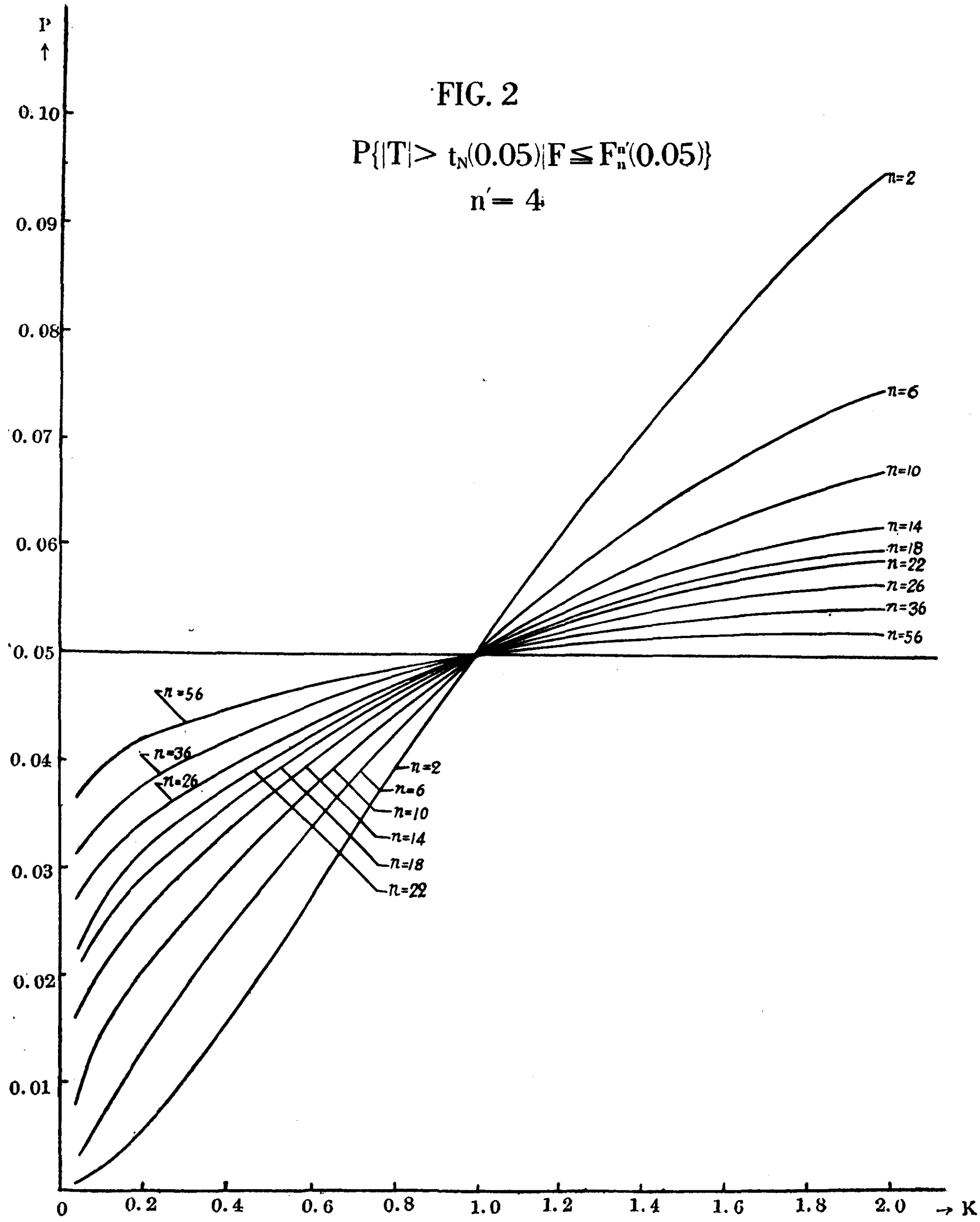
$P\{|T| > t_N(0.05)\ F \leqq F_n^{n'}(0.05)\}$

$n' = 2$

FIG. 2

$P\{|T| > t_N(0.05) | F \leqq F_n^{n'}(0.05)\}$

$n' = 4$



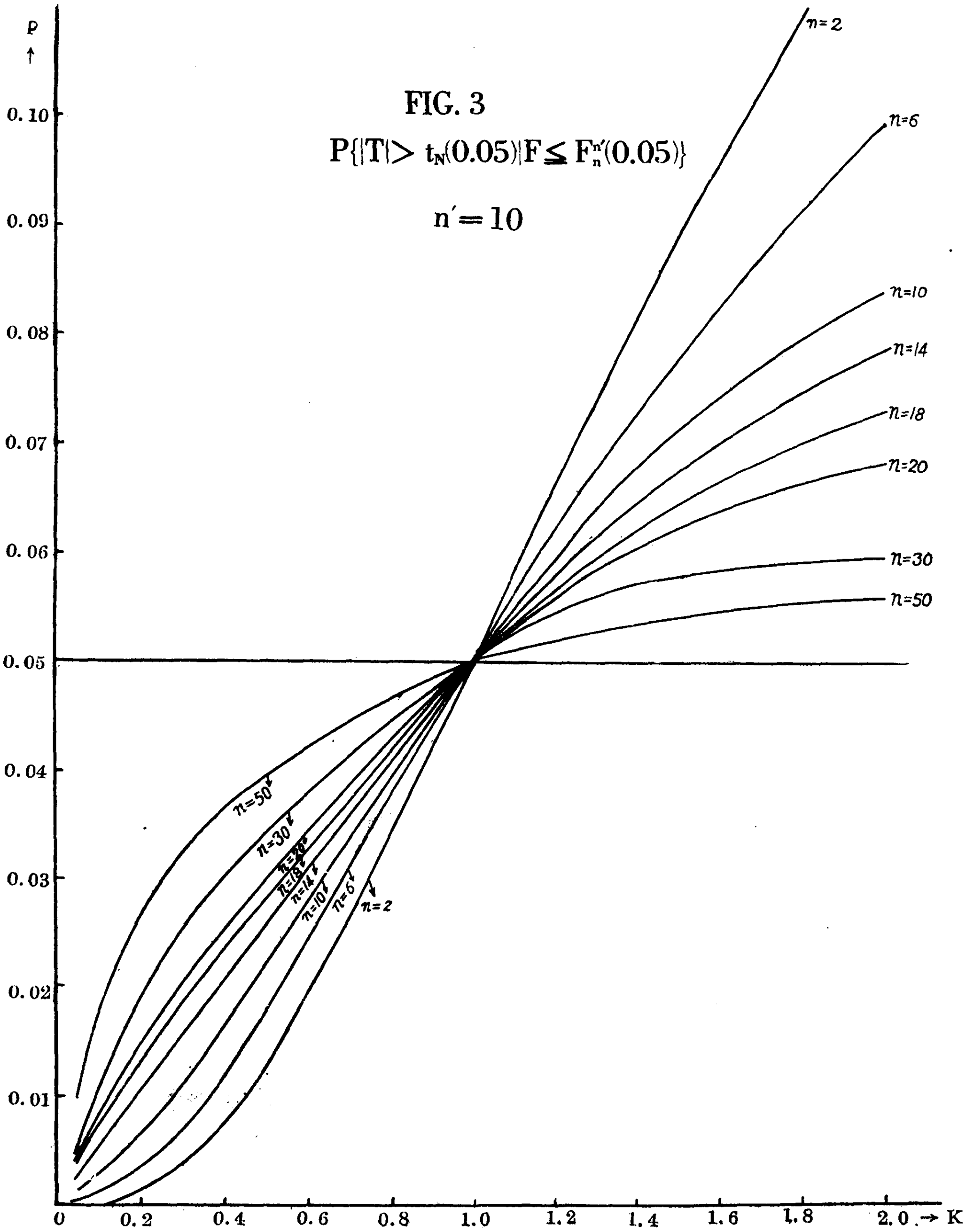


FIG. 3

$P\{|T| > t_N(0.05) | F \leq F_n^{n'}(0.05)\}$

$n' = 10$