統計数理 (1994)
第 42 巻 第 1 号 131-145

非線型可積分系とじゃんけんモデル*

統計数理研究所・総合研究大学院大学　伊　藤　栄　明

(1993 年 12 月　受付)

1. じゃんけんモデルと競合粒子系

戸田格子 (Toda (1967))，剛体回転の Euler 方程式等におけるように，可積分性は決定論的な系に関する性質である (Henon (1974), Flashka (1974), Manakov (1976))．もとの系が確率的である場合に可積分性に対応する性質はどのようにあらわれてくるのであろうか．ここではじゃんけんモデル，およびそれを発展させた競合粒子系について考える．じゃんけんは日常生活の様々な場面で行われる．じゃんけんに勝つためには相手の手を読む能力，乱数発生能力などが必要であり，ゲームの理論のよい例題になっている．本稿においてはじゃんけんというゲームから確率モデルをつくり，自然に可積分系に導かれることを示したい．考える系は確率的であるが粒子数無限大の極限においては決定論的であり非線型可積分系となる．粒子数が有限の場合，保存量が時間によらないという性質に対応する性質があり，それは条件付き期待値を用いて表される．非線型可積分系の確率モデルと言うことができると思う．

気体分子運動論において Boltzmann は各粒子の持つエネルギーの確率分布の変化を記述する方程式を導き，エントロピー増大の法則を導いた．Boltzmann (1872) はエネルギーは有限個の離散的な値をとるとした単純なモデルも考えている．各粒子が持つのはエネルギーではなく，石，紙，はさみのいずれかの手であると考え，粒子相互の衝突により，弱い手を持つ粒子は強い手を持つ粒子に変化するという系を考える．

石，紙，はさみの 3 つの手はそれぞれ他のひとつの手より強く，残りのひとつの手より弱い．じゃんけんは奇数個の手のある場合に自然に拡張される．$2r+1$ 個の手のあるじゃんけんの場合，強弱関係は regular tournament といわれている有向グラフにより定めるのが自然である．$2r+1$ 個の node のある regular tournament においては，各 node は他の r 個の node よりも強く，残りの r 個の node よりも弱い．日常行われているじゃんけんの場合は $r=1$ である．

Boltzmann の H 定理をわかりやすく説明するモデルとして Ehrenfest の urn model が知られている．Ehrenfest のモデルにおいては 2 個の箱を考え各ステップで粒子を 1 個ランダムに指定する．3 個の箱を考え，各ステップで 2 個の粒子をランダムに指定するというモデルを考えると，上記じゃんけんモデルの離散確率モデルとなる．有限個の粒子が相互に衝突するとし，時間が離散的であるとする．石，紙，はさみ，という 3 つの箱があり，それぞれに n_1, n_2, n_3 個の粒子がはいっていたとする．n 個の粒子には 1 から n まで番号がふってあり，各時点で等確率でまずひとつの粒子を指定し，さらにもうひとつの粒子を等確率で指定する．指定された 2 つが石とはさみにはいっていたとすれば指定されたはさみの粒子が石に移るものとする．はさみと紙なら紙からはさみに，はさみと石ならはさみから石に移動がおきるとする．石と石，はさ

* 本稿は統計数理研究所 共同研究 (3-共会-4)，及び (5-共会-7) における発表に基づくものである．

みとはさみ, 紙と紙というように同じものの組みあわせである場合移動はおこらないとする. この操作を繰り返して行く. 粒子の指定はすべて互いに独立に行われるとする. 時点 t での石, 紙, はさみの個数はそれぞれ確率変数 $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ で表される. このモデルを 5 個の手のあるじゃんけんに拡張してシミュレーションを行った結果を図 1 に示す. これは 5 個の箱には時点 0 でそれぞれ 20 個の粒子がはいっているとしてある.

この系を考えて行くことを通して Lotka-Volterra 系, Fisher-Wright モデル等の基本的なモデルに自然に導かれる. またじゃんけんというゲームの持つ対称性より可積分系にも自然につながって行く (伊藤 (1973, 1977, 1993), Itoh (1971, 1973, 1979, 1987, 1988, 1989, 1993, 1994)).

じゃんけんモデルは自然なものであり, 当然再発見の繰り返しが様々な場面で行われる. このような粒子を, Bramson and Griffeath (1989) が再発見し cyclic particle system と命名している. 手の数が一般の m, 粒子数無限大の場合の系の可積分性は Bogoyavlensky (1988) により一般的な形で再発見されている. Bogoyavlenskiǐ (1989, 1991a, 1991b) は戸田格子, 剛体回転の Euler 方程式と, 我々の系, 相互の関係についても調べている.

じゃんけんモデルについて非線型可積分系という視点から述べる.

2. じゃんけんモデルと保存量

型 1 の粒子数は型 1 と型 3 の粒子数の積に比例して増加し, 型 1 と型 2 の粒子数の積に比例して減少すると考えられる. この事より, $P_i=n_i/n$ とし, 次のような Lotka-Volterra 方程式が得られる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P_1=P_1(-P_2+P_3)\\
(2.1)\qquad &\frac{d}{dt}P_2=P_2(P_1-P_3)\\
&\frac{d}{dt}P_3=P_3(-P_1+P_2)
\end{aligned}
$$

この方程式は Fisher の自然淘汰の基本定理についての議論に Kimura (1958) が用いている.

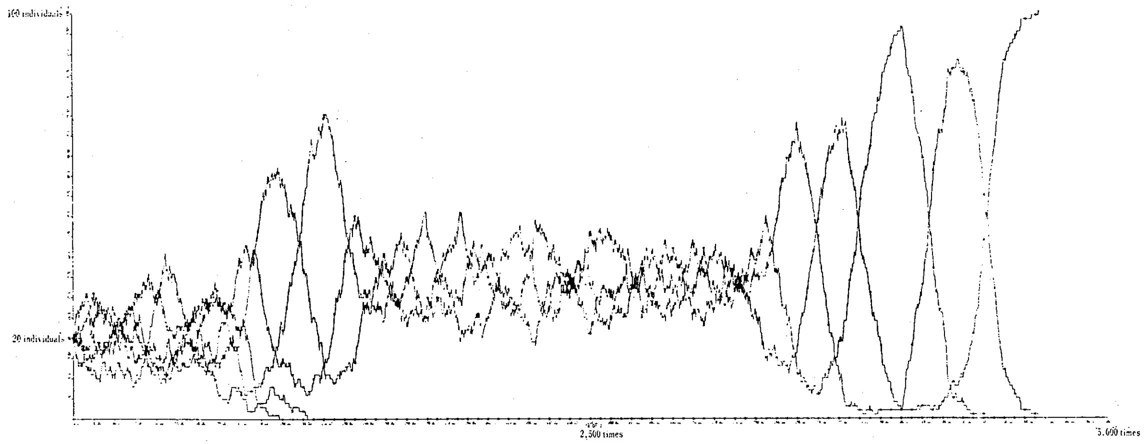

図 1.　Itoh (1973).

粒子のランダムな衝突に基づいて系が変化してゆくことから Boltzmann 方程式と同様な考えで導くこともできる．この系は次の保存量をもつ．

$$P_1+P_2+P_3=C_0 \tag{2.2}$$

$$P_1P_2P_3=C_1 \tag{2.3}$$

この 2 つの保存量は Volterra (1931) がより一般的な系について述べているものである．$2s<m$, $P_0=P_m$ とし，巡回的な系

$$\frac{dP_i}{dt}=P_i\left(\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j}\right), \tag{2.4}$$

$i=1,2,\ldots,m$ を考える．5 個の手のあるじゃんけんは $m=5$, $s=2$ の場合に対応し，つぎの保存量をもつ．

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5=C_0, \tag{2.5}$$

$$P_1P_2P_4+P_2P_3P_5+P_3P_4P_1+P_4P_5P_2+P_5P_1P_3=C_1, \tag{2.6}$$

$$P_1P_2P_3P_4P_5=C_2. \tag{2.7}$$

解の動きを 3 次元空間でみると図 2 のようになる (伊藤・上田 (1975, 1981)).

いま，係数 a_{ij} を次の式によりさだめる．

$$\sum_{j=1}^{m}a_{ij}P_j\equiv\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j} \tag{2.8}$$

すなわち $a_{ij}=1$ のとき型 i は型 j より強く ($j<i$), $a_{ij}=-1$ のとき型 i は型 j より弱い ($i<j$) ということにする．$a_{ij}=0$ のとき型 i は型 j に中立であるとする ($i\sim j$, $j\sim i$). l 個の型のおのおのがのこりの $l-1$ 個の型について中立であるとき，l 個の型 $i_1, i_2, \ldots, i_l$ は相互に中立であると言うことにする．m 個の型のいずれかからなる l 個の型 $i_1, i_2, \ldots, i_l$ を考える．$i_j-i_k\equiv 1, 2, \ldots, s \pmod{m}$ のとき $i_k<i_j$ であり，$i_j-i_k\equiv s+1, s+2, \ldots, m-s-1 \pmod{m}$ のとき $i_j\sim i_k$ である．(2.4) 式の保存量を考える．

l 個の型の各々が q 個の型より強く，q 個の型より弱いという l 個の型の組をすべて考え，それを $R_l(q)$ とする．l 個の粒子を系からランダムにとりだし，l 粒子の属する型が l 個あり，その各々の型が q 個の型より強く q 個の型より弱いという確率を $I_{l,q}$ とする．そのとき

$$I_{l,q}=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_l)\in R_l(q)}P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_l} \tag{2.9}$$

は (2.4) 式の保存量である (伊藤 (1977), Itoh (1979, 1987, 1994)).

相互に中立な l 個の型の組をすべて考え，それを S_l とする．l 個の粒子を系からランダムにとりだし，l 粒子の属する型が相互に中立である確率を J_l とする．そのとき

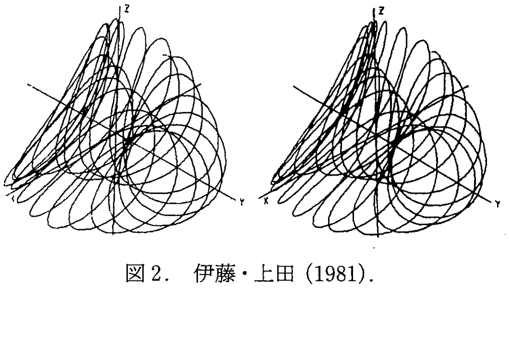

図 2. 伊藤・上田 (1981).

(2.10)
$$J_l=\sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_l)\in S_l}P_{i_1}P_{i_2}\cdots P_{i_l}$$

は (2.4) 式の保存量である (Itoh (1994)).

(1) $m=2s+1$ の時，$I_{2r+1,r}$, $r=0,1,\ldots,s$ は保存量である．

(2) $s=1$ の時，$I_{m,1}$ およびJ$_l$, $l=1,2,\ldots,[m/2]$ は保存量である．

(3) $m=6$, $s=2$ のとき

$$\begin{aligned}&I_{1,0}=J_1=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6,\\&J_2=P_1P_4+P_2P_5+P_3P_6,\\&I_{3,1}=P_1P_3P_5+P_2P_4P_6,\\&I_{4,1}=P_1P_2P_4P_5+P_1P_3P_4P_6+P_2P_3P_5P_6,\\&I_{6,2}=P_1P_2P_3P_4P_5P_6\end{aligned}$$

は保存量である．

非線型可積分系の保存量は次の章で述べるように，Lax 形式による表現を発見することによりもとめることが多い．本章における保存量は組合せ論的な考え方によるものである．計算機ソフト Mathematica をもちいた数式処理により，両者の関係を m が 9 以下の場合にもとめてみたが，m が一般の場合にどのようになるかは興味ある問題である．

式 (2.4) についての離散系を考えることができて，可積分系という視点から保存量が求められる (Hirota (1981)，広田・辻本 (1994)).

3. Lax 形式

式 (2.4) の Lax 形式は Bogoyavlensky (1988) により得られている．m 行 m 列の行列

(3.1)
$$A=\{a_{i,j}\},\qquad B=\{b_{i,j}\},\qquad H=\{h_{i,j}\}$$

を考える．ここで $a_{i,i-r+1}=P_i$, それ以外の $a_{i,j}$ は 0, $h_{i,i+1}=1$, それ以外の $h_{i,j}$ は 0 とし，添え字は巡回的になっている．

(3.2)
$$\frac{d}{dt}(A+xH)=[A+xH,\ b-xH^r]$$

を考える．x^0, x^1, x^2 の係数を両辺くらべると

(3.3)
$$\frac{d}{dt}A=[A,B]$$

(3.4)
$$\frac{d}{dt}H=[H,B]-[A,H^r]=0$$

が得られる．ここで $r=1-s$ とおくと $B=-\sum_{k=0}^{s}H^{-s+k}AH^{-k}$ は $[H,B]-[A,H^{1-s}]=0$ を満たす．B の非対角成分は 0 であり，

(3.5)
$$b_{i,i}=-\sum_{k=0}^{s}P_{i-k}$$

(3.6)
$$\frac{d}{dt}P_i=P_i\left(\sum_{k=0}^{s}P_{i-k}-\sum_{k=0}^{s}P_{i+k}\right)$$

を得る．$T_r(A+xH)^l$ の x^k の係数より保存量がえられる．この系は Liouville の意味で可積分系であることが示されている (Bogoyavlenskiĭ (1991a, 1991b)).

行列の固有値をもとめるものとしてLRアルゴリズムがある．これを連続化した力学系のLax形式として，式 (2.4) の非周期的な場合をとらえることができる (永井・薩摩 (1993), Nagai (1993))．

4. マルコフ連鎖と保存量の確率的挙動

競合粒子系の2体衝突モデルとして次の i), ii), iii) による系を考える．

i) m 個のタイプ $1, 2, \ldots, m$ のそれぞれの粒子数は時刻 t においてそれぞれ $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t)$ とする．粒子の総数を n とする．

ii) Δt 時間にランダムに選ばれた2粒子の間の衝突が1回起きる．衝突する2粒子の組は ${}_nC_2$ 個のなかから等確率で選ばれる．

iii) タイプ i の1粒子とタイプ j の1粒子の衝突により，2粒子は確率 $1/2+a_{ij}$ で i の2粒子になり確率$1/2+a_{ji}$ で j の2粒子になる．ここで $a_{ij}+a_{ji}=0$ である．

時刻 t における各型の粒子数を

(4.1) $$\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t), X_2(t), \ldots, X_m(t))$$

とする．本章では，a_{ij} を式 (2.8) により定める．

$m=3$, $s=1$ の場合を考える．時刻 t で

(4.2) $$\Pr(\boldsymbol{X}(t)=(n_1, n_2, n_3))=P(n_1, n_2, n_3\,;\ t)$$

とおくと

(4.3) $$\begin{aligned} &P(n_1, n_2, n_3\,;\ t+\Delta t)\\ &\quad=\frac{1}{n(n-1)}\{(n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1))P(n_1, n_2, n_3\,;\ t)\\ &\quad+2(n_1+1)(n_2-1)P(n_1+1, n_2-1, n_3\,;\ t)\\ &\quad+2(n_2+1)(n_3-1)P(n_1, n_2+1, n_3-1\,;\ t)\\ &\quad+2(n_3+1)(n_1-1)P(n_1-1, n_2, n_3+1\,;\ t)\} \end{aligned}$$

となる．

時刻 t で (n_1, n_2, n_3) であったとすれば，時刻 $t+\Delta t$ での系の状態は

$$\text{確率 } \frac{2n_1n_2}{n(n-1)} \text{ で } (n_1-1,\ n_2+1,\ n_3)$$

$$\text{確率 } \frac{2n_2n_3}{n(n-1)} \text{ で } (n_1,\ n_2-1,\ n_3+1)$$

$$\text{確率 } \frac{2n_3n_1}{n(n-1)} \text{ で } (n_1+1,\ n_2,\ n_3-1)$$

$$\text{確率 } \frac{n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+n_3(n_3-1)}{n(n-1)} \text{ で } (n_1,\ n_2,\ n_3)$$

となり3種の粒子数の積の期待値は $\left(1-2\dfrac{{}_3C_2}{n(n-1)}\right)n_1n_2n_3$ となる．このことより $m=3$, $s=1$ の場合 (2.9) 式で定義した量

(4.4) $$I_{3,1}(t)=\frac{X_1(t)}{n}\frac{X_2(t)}{n}\frac{X_3(t)}{n}$$

について，時刻 t での値を与えたとき，時刻 $t+\Delta t$ での期待値は

$$(4.5)\qquad E(I_{3,1}(t+\Delta t)\mid I_{3,1}(t))=\left(1-2\frac{{}_3C_2}{n(n-1)}\right)I_{3,1}(t)$$

となる．

一般の m の場合に $I_{l,q}$ についての条件付期待値は

$$(4.6)\qquad E(I_{l,q}(t+k\Delta t)\mid I_{l,q}(t+(k-1)\Delta t))=\left(1-\frac{2{}_lC_2}{n(n-1)}\right)I_{l,q}(t+(k-1)\Delta t)$$

であり

$$(4.7)\qquad E(I_{l,q}(t+k\Delta t)\mid I_{l,q}(t))=\left(1-\frac{2{}_lC_2}{n(n-1)}\right)^k I_{l,q}(t)$$

となる．$\eta_l=\left(1-\frac{2{}_lC_2}{n(n-1)}\right)^{(n-1)/2}$, $\Delta t=\frac{2}{n-1}$ とおくと

$$(4.8)\qquad E(I_{l,q}(t+u)\mid I_{l,q}(t))=\eta_l^u I_{l,q}(t)$$

を得る．これが保存量に対応する関係である．同様に

$$(4.9)\qquad E(J_l(t+u)\mid J_l(t))=\eta_l^u J_l(t)$$

が得られる (Itoh (1973, 1979, 1994))．

$m=2s+1$ とし，式 (2.8) でさだまる a_{ij} による系を考える．

各型の粒子数を

$$(4.10)\qquad \boldsymbol{X}(t)=(X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$$

によりあらわす．遷移確率を

$$(4.11)\qquad \Pr[\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{n}_{ij}\mid \boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{n}]=\frac{2n_in_j}{n(n-1)}$$

$$(4.12)\qquad \Pr[\boldsymbol{X}(t+\Delta t)=\boldsymbol{n}\mid \boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{n}]=\sum_{i=1}^{2s+1}\frac{n_i(n_i-1)}{n(n-1)}$$

であたえる．ここで

$$(4.13)\qquad \boldsymbol{n}_{ij}=(n_1, \dots, n_i+a_{ij}, \dots, n_j+a_{ji}, \dots, n_{2s+1})$$

$$(4.14)\qquad \boldsymbol{n}=(n_1, n_2, \dots, n_{2s+1})$$

とする．

$F_r=\{(n_1, n_2, \dots, n_r):\ n_i$ は $\sum_{i=1}^r n_i=n$ であるような正の整数$\}$, L_r は F_r の要素の数とする．

$n_1n_2\cdots n_{2s+1}=0$ である状態を 0 であらわすと，$\{\boldsymbol{X}(t), t=0, 1, 2, \dots\}$ は状態空間を $F_{2s+1}\cup\{0\}$ とするマルコフ連鎖である．固有値 1 は $(1, 0, 0,\dots, 0)$ なる固有ベクトルに対応し 2 番目に大きい固有値 $\left(1-\frac{2{}_{2s+1}C_2}{n(n-1)}\right)$ は単根であり，固有ベクトルは d を適切にさだめると，$(d, L_{2s+1}^{-1}, L_{2s+1}^{-1}, \dots, L_{2s+1}^{-1})$ となる．

$[R(t)]$ を時刻 t において共存する型の間の強弱関係の有向グラフとする．$[T_r]$ を (2.8) 式において $m=2r+1, s=r$ としてさだまる有向グラフであるとする．$[R(t)]$ が $[T_r]$ に同型である確率を次のように評価することができる．$r=1, 2,\dots, s$ について

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Pr([R(t)]\cong[T_r]\mid \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{\alpha})}{I_{2r+1,r}(\boldsymbol{\alpha})\eta_{2r+1}^{t}Q_{2r+1}^{-1}}=1 \tag{4.15}$$

ここで$\eta_{2r+1}=\theta_{2r+1}^{(n-1)/2}$, $\theta_{2r+1}=1-\dfrac{{}_{2r+1}C_2}{n(n-1)}$ および$Q_{2r+1}=\dfrac{1}{L_{2r+1}}\sum_{n\in F_{2r+1}}\dfrac{n_1}{n}\dfrac{n_2}{n}\cdots\dfrac{n_{2r+1}}{n}$ とする.

$[R(t)]$ を時刻 t において共存する型の間の強弱関係の有向グラフ（トーナメント）とすると

$$\lim_{t\to\infty}E(I_{2s+1,s}(t)\mid[R(t)]\cong[T_s])=Q_{2s+1} \tag{4.16}$$

$$E(I_{2s+1,s}(t)\mid \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{\alpha})=I_{2s+1,s}(\boldsymbol{\alpha})\eta_s^t \tag{4.17}$$

もし $[R(t)]\ncong[T_s]$ であれば $I_{2s+1,s}(t)=0$ である. したがって

$$\begin{aligned}&E(I_{2s+1,s}(t)\mid \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{\alpha})\\&=E(I_{2s+1,s}(t)\mid[R(t)]\cong[T_s])\Pr([R(t)]\cong[T_s]\mid \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{\alpha})\end{aligned} \tag{4.18}$$

よって $r=s$ の場合に (4.15) 式は成り立つ. 一般の r の場合 $[R(t)]$ が $[T_r]$ に同型なトーナメントを含む場合は $[R(t)]\cong[T_r]$ の場合にくらべて, ある意味で不安定であることから (4.15) 式を証明できる (Itoh (1979)).

式 (2.8) において, 一般の m, s でさだまる a_{ij} による系でも同様な議論で, 上と同様に共存の確率を評価できると予想される. とくに $i, j=1,2,\ldots,m$ について $a_{ij}=0$ である場合, すなわち式 (2.8) において $s=0$ の場合, には強弱関係はなく $i=1,2,\ldots,m$ について

$$\frac{dP_i}{dt}=0 \tag{4.19}$$

である. この場合は集団遺伝学における Fisher-Wright モデルのべつの表現である Moran モデルにあたる (Moran(1958)). Fisher-Wright モデルについては, 遺伝子の共存についての漸近確率が求められている (Kimura (1955)).

5. 競合粒子系と Fisher-Wright モデル

競合粒子系の 2 体衝突モデルについて,

$$E(\Delta P_i)=P_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}P_j\right)\frac{2}{n-1} \tag{5.1}$$

$$E(\Delta P_i\Delta P_j)=P_i(\delta_{ij}-P_j)\frac{1}{n}\frac{2}{n-1} \tag{5.2}$$

が成り立つ. ここで $P_i(t)=X_i(t)/n$, $\Delta P_i(t)=P_i(t+\Delta t)-P_i(t)$ とする. 前章の Moran モデルは, 各ステップでランダムに選ばれた粒子が, もうひとつのランダムに選ばれた粒子におきかわるというものである. Moran モデルは, 世代交代が一度に行われるということでなく, 1 粒子ずつ行われ, Fisher-Wright モデルにおける random sampling 効果をべつのかたちで表現したものと考えられる. 我々の系においては粒子に強弱があり, 多様なモデルを構成できる.

Moran モデルを考える. 時刻 t で系が $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ であったとすると, $i\neq j$であれば

$$\text{確率 }\frac{n_in_j}{n(n-1)}\text{ で }(n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_j-1,\ldots,n_m)$$

$$\text{確率 }\frac{n_in_j}{n(n-1)}\text{ で }(n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_j+1,\ldots,n_m)$$

となる. このことより, 互いにことなる $i_1, i_2, \ldots, i_k$ について

(5.3)
$$E(X_{i_1}(t+\varDelta t)X_{i_2}(t+\varDelta t)\cdots X_{i_k}(t+\varDelta t)\mid X_{i_1}(t)X_{i_2}(t)\cdots X_{i_k}(t))=\left(1-2\frac{{}_kC_2}{n(n-1)}\right)X_{i_1}(t)X_{i_2}(t)\cdots X_{i_k}(t)$$

なる関係を得る．また

(5.4)
$$E(\varDelta P_i)=0$$

(5.5)
$$E(\varDelta P_i\varDelta P_j)=P_i(\delta_{ij}-P_j)\frac{1}{n}\frac{2}{n-1}$$

を得る．

集団の繁殖個体数を N とし対立遺伝子 A_1 および A_2 を考える．この集団を構成している個体の間では完全に機会的な交配が行われており，したがって次世代集団はこの集団中からランダムに取り出された N 個の精子と N 個の卵子との受精によって構成されるものとする．遺伝子 A_1 および A_2 の相対頻度をそれぞれ P_1 および $P_2=1-P_1$ とすると，P_i は

(5.6)
$$0,\frac{1}{2N},\frac{2}{2N},\ldots,1-\frac{1}{2N},1$$

なる値だけをとる離散確率変数であり一代あたりの P_i の変化 $\varDelta P_i$ は平均 0，分散 $P_i(1-P_i)/2N$ の 2 項分布にしたがう．$2N=n$ とおき，P_i が k/n から l/n になる確率は

(5.7)
$${}_nC_l\left(\frac{k}{n}\right)^l\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-l}$$

によって与えられる．m 個の対立遺伝子がある場合，世代交代が $(t,\ t+\varDelta t)$ の間に行われる確率を $\varDelta t$ とすると $\varDelta t$ あたりの P_i の変化 $\varDelta P_i$ については

(5.8)
$$E(\varDelta P_i)=0$$

(5.9)
$$E(\varDelta P_i\varDelta P_j)=\frac{P_i(\delta_{ij}-P_j)}{n}\varDelta t$$

となる．$\varDelta t=2/(n-1)$ とおくと Moran モデルと一致することがわかる．

6. 競合粒子系と非線型可積分系の確率モデル

粒子数有限で時間が連続であるとする．競合粒子系における各種の粒子数の変化を記述する式として，時間変更をもちいた表現を提案する．

n 個の粒子は m 個のタイプ $1,2,\ldots,\ m$ からなり，それぞれの粒子数は，$X_1(t),X_2(t),\ldots,X_m(t)$ であるとする．粒子のあいだのランダムな出会いが，各粒子について平均的に cdt 回，時間 $(t,\ t+dt)$ の間に起きるものとする．互いに独立な m^2 個の Poisson 分布に従う確率変数 $N_{ij}(c_{ij})$，$i,j=1,2,\ldots,m$を時刻 t において考える．ここで c_{ij} は Poisson 分布のパラメーターとする．タイプ i の粒子数 X_i はタイプ j の粒子との出会いにより Poisson 分布 $\Pr(N_{ij}(c_{ij})=k)=(c_{ij}^k/k!)e^{-c_{ij}}$ に従う確率変数 $N_{ij}(c_{ij})$ だけ増加し $N_{ji}(c_{ji})$ だけ減少する．ここで $c_{ij}=c(1/2+a_{ij})X_i(t)(X_j(t)/n)dt$ である．従って X_i の変化は $N_{ij}(c_{ij})-N_{ji}(c_{ji})$ となり $2(c/n)\cdot a_{ij}X_i(t)X_j(t)dt+\sqrt{(c/n)X_i(t)X_j(t)}\,db_{ij}(t),\ i,j=1,2,\ldots,m$ により近似される．ここで$a_{ij}+a_{ji}=0$, 及び $b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$, である．$b_{ij}(t)$ $(i>j)$ は互いに独立な 1 次元 Wiener 過程であり，平均 0 および分散 t である．$P_i=X_i/n,\ i=1,2,\ldots,m$とおくと

(6.1)
$$dP_i(t)=\sum_{j=1}^{m}[2ca_{ij}P_iP_jdt+\sqrt{(c/n)P_i(t)P_j(t)}\,db_{ij}(t)],$$

が得られる．$c=1$ の場合，(5.1), (5.2) 式において $\Delta t=2/(n-1)$ とおいたものと同様な関係が得られる．Poisson 分布についてのうえの議論より m^2 個の Poisson 過程の時間変更を用いた表現に導かれる (Itoh (1981b)).

$$dP_i(t)=\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{1}{n}\,dN_{ij}\left(cn\left(\frac{1}{2}+a_{ij}\right)\int_0^t P_i(t)P_j(t)\,dt\right)-\frac{1}{n}\,dN_{ji}\left(cn\left(\frac{1}{2}+a_{ji}\right)\int_0^t P_j(t)P_i(t)\,dt\right)\right) \tag{6.2}$$

この表現は上記のモデルを方程式として見やすくするものである．

式 (6.1) より伊藤の公式をもちいれば $dP_idP_j=(c/n)P_i(t)(\delta_{ij}-P_j(t))dt$, $i, j=1, 2, \ldots, k$ となり，各 i, j について a_{ij} の値が 0 である場合，系は Fisher-Wright モデルを表す．この表現より，Fisher-Wright モデルと球面上の等方な拡散は変数変換によりむすびついていることに気が付く (丸山･伊藤 (1991))．じゃんけんモデルにおける粒子数の変化は，式 (6.2) の表現をもちいれば

$$\begin{aligned}
dP_1&=\frac{1}{n}\,dN_{31}\left(n\int_0^t P_3P_1\,dt\right)-\frac{1}{n}\,dN_{12}\left(n\int_0^t P_1P_2\,dt\right)\\
dP_2&=\frac{1}{n}\,dN_{12}\left(n\int_0^t P_1P_2\,dt\right)-\frac{1}{n}\,dN_{23}\left(n\int_0^t P_2P_3\,dt\right)\\
dP_3&=\frac{1}{n}\,dN_{23}\left(n\int_0^t P_2P_3\,dt\right)-\frac{1}{n}\,dN_{31}\left(n\int_0^t P_3P_1\,dt\right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

となる．ここで $N_{ij}(t)$ は互いに独立な標準 Poisson 過程とする．式 (6.1) のかたちでかくと，

$$\begin{aligned}
dP_1&=P_1(P_3-P_2)\,dt+\sqrt{\frac{P_1P_3}{n}}\,db_{13}(t)+\sqrt{\frac{P_1P_2}{n}}\,db_{12}(t)\\
dP_2&=P_2(P_1-P_3)\,dt+\sqrt{\frac{P_2P_1}{n}}\,db_{21}(t)+\sqrt{\frac{P_2P_3}{n}}\,db_{23}(t)\\
dP_3&=P_3(P_2-P_1)\,dt+\sqrt{\frac{P_3P_2}{n}}\,db_{32}(t)+\sqrt{\frac{P_3P_1}{n}}\,db_{31}(t)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

となる．ここで $b_{ij}(t)$ $(i>j)$ は互いに独立な標準 Brown 運動とし，$b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$ とする．$i=1, 2, \ldots, m$ について，

$$dP_i(t)=P_i(t)\left(\sum_{k=0}^{s}P_{i-k}(t)-\sum_{k=0}^{s}P_{i+k}(t)\right)dt+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{n}P_i(t)P_j(t)}\,db_{ij}(t) \tag{6.5}$$

より伊藤の公式をもちいて前記の式 (4.8), (4.9) に対応する

$$E(I_{l,r}(t+u)\,|\,I_{l,r}(t))=I_{l,r}(t)\exp\left(-{}_lC_2\frac{u}{n}\right) \tag{6.6}$$

$$E(J_l(t+u)\,|\,J_l(t))=J_l(t)\exp\left(-{}_lC_2\frac{u}{n}\right) \tag{6.7}$$

が示される (Itoh (1979, 1993, 1994))．離散変数の系（確率差分系）と確率微分方程式という連続変数の系と同様な関係が得られたということになる．式 (6.6), (6.7) は，確率解析にもとづいており，導くアルゴリズムは単純であるが，数学的な基礎には準備が必要である．式 (4.8), (4.9) はエレメンタリーな数学を積み重ねていって得られる．差分学（広田 (1993)）が有効であるよい例になっていると思われる．

deterministic な場合，2 つの保存量の和，積ともに保存量である．系が確率的な場合，式 (4.8), (4.9)，あるいは式 (6.6), (6.7) の性質は，deterministic な場合の保存量をもってきたと

き，満たされるとは限らない．例えば，Lax 形式からみちびかれる量を考えると，満たされない場合がある．すなわち $m=6,\ s=2$ の場合

$$T_r(A+xH)^4=2x^2(a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+2a_2a_3+a_3^2+2a_3a_4+a_4^2+2a_4a_5+a_5^2+2a_5a_6+a_6^2+2a_6a_1)$$

となり x^2 の係数 $a_1^2+2a_1a_2+a_2^2+2a_2a_3+a_3^2+2a_3a_4+a_4^2+2a_4a_5+a_5^2+2a_5a_6+a_6^2+2a_6a_1$ は保存量であるが，式 (4.8)，(4.9)，あるいは式 (6.6)，(6.7) の性質を満たさない．

(6.4) 式の場合に

$$I_{3,1}(t)=P_1(t)P_2(t)P_3(t) \tag{6.8}$$

を考える．伊藤の公式より

$$dI_{3,1}(t)=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial P_i}P_1P_2P_3\right)dP_i+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2}{\partial P_i\partial P_j}P_1P_2P_3\right)dP_idP_j \tag{6.9}$$

$dP_idP_j=(1/n)P_i(t)(\delta_{ij}-P_j(t))dt$ であるから，

$$\begin{aligned} dI_{3,1}(t)&=P_1P_2dP_3+P_2P_3dP_1+P_3P_1dP_2\\ &\quad+P_1dP_2dP_3+P_2dP_3dP_1+P_3dP_1dP_2\\ &=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\sqrt{\frac{1}{n}P_iP_j}\,db_{ij}(t)\right)-{}_3C_2P_1P_2P_3\frac{dt}{n} \end{aligned} \tag{6.10}$$

が得られ，条件付き期待値をとることにより，(4.5) 式に対応する結果が得られる．

本章におけるように時間が連続である場合には，数学的には基礎付けが問題となる (Okabe et al. (1993))．Einstein (1905) の Brown 運動の研究にみられる考え方，すなわち複雑な挙動をする現象も定常状態では，その時間発展を記述する運動方程式は，ランダムな動の部分（揺動項）と力学的な静の部分（散逸項）にわけられ，両項の間にはある関係式が成り立つ（岡部 (1991))，という視点がある．式 (6.5) に定常状態はないが，式 (6.6)，(6.7) は散逸項が揺動項に適合していることを示す (Okabe et al. (1993))．この立場から非線型可積分系の確率モデルをみるというのは，興味ある今後の方向とおもわれる（高崎 (1993))．

7. 競合粒子系の 3 体衝突モデルの H 定理

2 粒子の間の出会いだけを考えるということは，粒子の密度が希薄であるという仮定に基づいている．3 粒子の出会いを考えにいれたモデルを調べる．競合粒子系においては 2 粒子の出会いの後にどちらの粒子になるかは確率的に定まっている．すなわち種 i の 1 粒子が種 j の 1 粒子より強い確率が $1/2+a_{ij}$ となっている ($a_{ij}+a_{ji}=0,\ |a_{ij}|\le 1/2$)．

m 個の型からなるシステムの状態を表すために，$E_i,\ i=1,2,\dots,m$ を基底とする実数体上の線型空間を考える．

基底の間の積を上記の衝突規則に対応させて $E_i\circ E_j=(1/2+a_{ij})E_i+(1/2+a_{ji})E_j$ により定める．

これによる演算は分配法則をみたし $\{E_i\}$ の一次結合は非結合的代数となる．これを用いると定式化及び演算が見通しよくなる．

$p_i(t)$ を種 i の粒子数の時刻 t における比率とし $p(t)=\sum_{i=1}^{m}p_i(t)E_i$ とおく．2 粒子の出会いのモデルからは

$$\frac{d}{dt}p(t)=p(t)\circ p(t)-p(t) \tag{7.1}$$

が得られる．3粒子の出会いは連続して起きる2粒子の出会いと考えて，

$$\frac{d}{dt}p(t)=(p(t)\circ p(t))\circ p(t)-p(t) \tag{7.2}$$

が導かれる．(7.1) 式は，成分でかくと $i=1, 2,\ldots, m$ について

$$\frac{d}{dt}p_i(t)=p_i\sum_{j=1}^{m}a_{ij}p_j \tag{7.3}$$

である．粒子の密度が希薄である場合には2体の相互作用のみ起こり，2体衝突モデルにより記述できるが，密度が高くなるにつれ，3体の相互作用を無視できなくなる．(7.1) 式及び (7.2) 式は一方のみで記述された典型的な場合である．各粒子について dt 時間に2体の相互作用が c_1dt 回，3体の相互作用が c_2dt 回起きるとすると

$$\frac{d}{dt}p(t)=c_1(p(t)\circ p(t)-p(t))+c_2((p(t)\circ p(t))\circ p(t)-p(t)) \tag{7.4}$$

となる．いま $q\circ q-q=0$ かつすべての i について $q_i>0$ であるような $\sum_{i=1}^{m}q_iE_i$ が存在すると，

$$\frac{d}{dt}H(t)=\sum_{i=1}^{m}q_i\log p_i(t)=2c_2\sum_{i=1}^{m}q_i\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}p_j\Big)^2 \tag{7.5}$$

が得られる．$c_2=0$ であれば $H(t)$ は保存量となるが，$c_2>0$ であれば $H(t)$ はシステムが平衡状態 q に達するまで増加し続ける．この事実は上に定義した非結合的代数を用いて示される (Itoh (1975, 1981a))．(7.4) 式の解 $p(t)$ と $r(t)$ が平衡状態 q の近くにある場合，2つの trajectory, $p(t)$ と $r(t)$ の相対エントロピーについての H 定理が示される (Itoh and Cohen (1994))．平方格子の各点に石，紙，はさみのいずれかの粒子があり，ランダムに指定された粒子の対が，じゃんけんの規則により変化するという格子モデルを考えることができる (Tainaka (1988, 1989), Tainaka and Itoh (1994))．この格子モデルのシミュレーション結果に，3体衝突のモデルと類似の性質が観察され (Tainaka and Itoh (1991))，確率的なリミットサイクルが観察される (Itoh and Tainaka (1994))．

8. 競合粒子系の4体衝突モデルと Karmarkar アルゴリズムの力学系

集団遺伝学においては適応度という量をもちいて自然淘汰の効果が記述される．Fisher (1930) の自然淘汰の方程式はこれに基づいている．各遺伝子型の適応度をあらわすのにその遺伝子型に属する任意の一個体が残す子供の平均数をもってする．ヘテロ接合体の適応度がホモ接合体の適応度よりある一定量だけ高いと仮定したモデルは超優性モデルといわれ，集団遺伝学で重要なもののひとつである ((Fisher (1922), 丸山 (1981), Maruyama and Nei (1981))．超優性モデルによる系の遺伝子頻度を記述する方程式は，集団遺伝学に於て議論されてきたが，適応度という量にもとづいたモデル化を行っており，やや複雑である．2倍体生物を考える場合それぞれ2粒子からなる2組の間のランダムな出会いにもとづいた4体衝突モデルは自然なものであると思われる (Itoh (1984))．方程式は適応度にもとづいたものより単純であり，多くの場合数値的には同様な結果をあたえる．m 個のタイプ，$A_1, A_2, \ldots, A_m$ の粒子が n 個ある．4粒子の出会いによるモデルを考える．4粒子は系からランダムに選ばれるものとする．その4粒子はタイプ A_i, A_j, A_k, および A_l であったとする．A_i の1粒子と A_j の1粒子は 結合して2粒子の組 A_iA_j となり，A_k の1粒子と A_l の1粒子は結合して2粒子の組 A_kA_l となるとする．A_iA_j と A_kA_l が出会うことにより，確率 $1/2+s_{ij,kl}$ で2個の A_iA_j となり確率 $1/2+s_{kl,ij}$ で2

個の A_kA_l となるものとする．ここで $s_{ij,kl}=-s_{kl,ij}$ とする．2個の A_iA_j ができた場合，分裂して2個の A_i および2個の A_j となる．2個の A_kA_l ができた場合も，分裂して2個の A_k および2個の A_l となる．この過程が次々にくりかえされて行くというモデルを考える．$s_{ij,kl}$ を

$$s_{ij,kl}=\begin{cases} s/2 & \text{if } i\neq j \text{ and } k=l \\ -s/2 & \text{if } i=j \text{ and } k\neq l \\ 0 & \text{if } i\neq j \text{ and } k\neq l \text{ or } i=j \text{ and } k=l, \end{cases}$$

により定める．各粒子は4粒子の出会いに時間 $[t, t+dt]$ の間に平均的に dt 回参加するものとする．時刻 t における m 個のタイプ，$A_1, A_2, \ldots, A_m$ それぞれの粒子数を $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ とし，時刻 t における変化の期待値 $E(\varDelta X_i(t))$ および分散共分散 $E(\varDelta X_i(t)\varDelta X_j(t))$ をもとめる．前章でのべた非結合的代数の考え方を用いる事により見通しよく計算を行うことができて

$$E(\varDelta X_i)=s\varDelta t\cdot X_i\left(\frac{-n(X_i-1)+\sum_{k=1}^{m}X_k(X_k-1)}{(n-1)(n-2)}\right) \tag{8.1}$$

および

$$E(\varDelta X_i\varDelta X_j)=\frac{1}{n-1}\varDelta tX_i(n\delta_{ij}-X_j) \tag{8.2}$$

が得られる (Itoh (1984))．$i, j=1, 2, \ldots, m$ について $X_i/n=P_i$ とおけば

$$E(\varDelta P_i)=sP_i\left(-P_i+\sum_{k=1}^{m}P_k^2\right)\varDelta t \tag{8.3}$$

$$E(\varDelta P_i\varDelta P_j)=\frac{1}{n-1}P_i(\delta_{ij}-P_j)\varDelta t \tag{8.4}$$

となる．式 (8.3), (8.4) の性質を持つ確率微分方程式として

$$dP_i(t)=sP_i\left(-P_i+\sum_{k=1}^{m}P_k^2\right)dt+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{n-1}P_i(t)P_j(t)}\,db_{ij}(t) \tag{8.5}$$

が得られる．ここで $b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$ とする．これは n 無限大では

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=sP_i\left(-P_i+\sum_{k=1}^{m}P_k^2\right) \tag{8.6}$$

となり，線型計画法問題の内点法 (Karmarkar (1984)) のアルゴリズムを無限小化して得られる力学系として考えた方程式 (Karmarkar (1990)),

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=P_i\left(-c_iP_i+\sum_{k=1}^{m}c_kP_k^2\right) \tag{8.7}$$

の特別な場合であり，Lax 形式および解が与えられている (中村 (1992), Nakamura (1992))．Fisher (1930) の自然淘汰の基本方程式 (江口 (1993) 参照) は，競合粒子系の4体衝突モデルからも導く事ができる．すなわち $i, j, k, l=1, 2, \ldots, m$ について $s_{ij,kl}=a_{ij}-a_{kl}$, $a_{ij}=a_{ji}$ とし，n を無限大とおけば

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=P_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}P_j-\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}P_kP_j\right) \tag{8.8}$$

が得られる．また確率微分方程式として

$$dP_i(t)=P_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}P_j-\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}P_kP_j\right)+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{n}P_i(t)P_j(t)}\,db_{ij}(t) \tag{8.9}$$

が考えられる (伊藤 (1993), Nakamura (1994)).

謝　辞

Fisher の自然淘汰の基本方程式は，競合粒子系の 4 体衝突モデルからも導く事ができることは，江口真透氏との討論の際に気がついたものである．本研究における保存量の議論は，栗原恵子さんによる数式処理プログラムによるところが大きい．査読者の方からは有益な助言をいただいた．以上，厚く感謝する．

参考文献

Bogoyavlensky, O.I. (1988). Integrable discretizations of the *KdV* equation, *Phys. Lett. A,* **134**, 34-38.

Bogoyavlenskiĭ, O.I. (1989). Algebraic constructions of certain integrable equations, *Math. USSR-Izv.,* **33**, 39-65.

Bogoyavlenskiĭ, O.I. (1991a). A theorem on two commuting automorphisms, and integrable differential equations, *Math.USSR-Izv.,* **36**, 263-279.

Bogoyavlenskiĭ, O.I. (1991b). Algebraic constructions of integrable dynamical systems —— extensions of the Volterra system, *Russian Math. Surveys,* **46**(3), 1-64.

Boltzmann, L. (1872). 『気体分子間の熱平衡についてのさらに進んだ研究』，物理学古典双書 6，東海大学出版会，東京.

Bramson, M. and Griffeath, D. (1989). Flux and fixation in cyclic particle systems, *Ann. Probab.,* **17**, 26-45.

江口真透 (1993). 情報幾何と数理進化，統計数理研究所共同研究リポート，No. 48, 125-132.

Einstein, A. (1905). 熱の分子論から要求される静止液体中の懸濁粒子の運動について，『アインシュタイン選集 1』，218-229，共立出版，東京.

Fisher, R.A. (1922). On the dominance ratio, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A,* **42**, 321-341.

Fisher, R.A. (1930). *The Genetical Theory of Natural Selection,* The Clarendon Press, Oxford.

Flashka, H. (1974). The Toda lattice I, *Phys. Rev. B,* **9**, 1924-1925.

Henon, M. (1974). Integrals of the Toda lattice, *Phys. Rev. B,* **9**, 1921-1923.

Hirota, R. (1981). Discrete analogue of a generalized Toda equation, *J. Phys. Soc. Japan,* **50**, 3785-3791.

広田良吾 (1993). 差分学のすすめ，応用数理，**3**, 48-57.

広田良吾，辻本　諭 (1994). Discrete Lotka-Volterra equation の保存量，数理解析研究所講究録，**868**, 31-38.

Itoh, Y. (1971). Boltzmann equation on some algebraic structure concerning struggle for existence, *Proc. Japan Acad.,* **47**, 854-858.

伊藤栄明 (1973). Volterra モデルについて，数理解析研究所講究録，**174**, 101-107.

Itoh, Y. (1973). On a ruin problem with interaction, *Ann. Inst. Statist. Math.,* **25**, 635-641.

Itoh, Y. (1975). An H-theorem for a system of competing species, *Proc. Japan Acad.,* **51**, 374-379.

伊藤栄明 (1977). 種競合のモデルとその性質，*Seminar on Probability,* **44**, 141-146.

Itoh, Y. (1979). Random collision models in oriented graphs, *J. Appl. Probab.,* **16**, 36-44.

Itoh, Y. (1981a). Non-associative algebra and Lotka-Volterra equation with ternary interaction, *Nonlinear Anal.,* **5**, 53-56.

Itoh, Y. (1981b). Representations for Wright model in population genetics, Research Memo., No. 201, The Institute of Statistical Mathematics.

Itoh, Y. (1984). Random collision model of random genetic drift and stochastic difference equation, *Ann. Inst. Statist. Math.,* **36**, 353-362.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Progr. Theoret.*

Phys., **78**, 507-510.
Itoh, Y. (1988). Integrals of a Lotka-Volterra system of infinite species, *Progr. Theoret. Phys.,* **80**, 749-751.
Itoh, Y. (1989). Configuration of random points on a circle associated with a generalized Lotka-Volterra equation, *J. Appl. Probab.,* **26**, 898-900.
伊藤栄明 (1993). 非線型可積分系の確率モデル，統計数理研究所共同研究リポート，No. 48, 99-117.
Itoh, Y. (1993). Stochastic model of an integrable nonlinear system, *J. Phys. Soc. Japan,* **62**, 1826-1828.
Itoh, Y. (1994). Stochastic model of an integrable nonlinear system (II) (submitted for publication).
Itoh, Y. and Cohen, J.E. (1994). Competitive ternary interactions and relative entropy of solutions, *J. Phys. A* (to appear).
Itoh, Y. and Tainaka, K. (1994). Stochastic limit cycle with power-law spectrum, *Phys. Lett. A*, **189**, 37-42.
伊藤栄明，上田澄江 (1975). 生存競争のモデルとシミュレーション，統数研彙報，**23**, 94-104.
伊藤栄明，上田澄江 (1981). 立体視の適用例，統数研彙報，**28**, 55-59.
Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming, *Combinatorica,* **4**, 373-395.
Karmarkar, N. (1990). Riemannian geometry underlying interior-point methods for linear programming, *Contemp. Math.,* **114**, 51-75.
Kimura, M. (1955). Random genetic drift in multi-allelic locus, *Evolution,* **9**, 419-435.
Kimura, M. (1958). On the change of population fitness by natural selection, *Heredity,* **12**, 145-167.
Manakov, A.V. (1976). A remark on integration of the Euler equation of an n-dimensional rigid body, *Functional Anal. Appl.,* **10**.
丸山貴志子，伊藤栄明 (1991). ライト・フィッシャーモデルの確率微分方程式，統計数理，**39**, 47-52.
丸山毅夫 (1981). 遺伝学における確率過程，日本物理学会誌，**36**, 226-235.
Maruyama, T. and Nei, M. (1981). Genetic variability maintained by mutation and overdominant selection in finite populations, *Genetics,* **98**, 441-459.
Moran, P.A.P. (1958). Random processes in genetics, *Proc. Camb. Phil. Soc.,* **54**, 60-71.
Nagai, A. (1993). Application of matrix eigenvalue algorithms to nonlinear integrable systems, Master Thesis, University of Tokyo.
永井 敦，薩摩順吉 (1993). QR 分解法と Lotka-Volterra 方程式，統計数理研究所共同研究リポート，No. 48, 119-124.
中村佳正 (1992). 非線形可積分系の応用解析の展開，応用数理，**2**, 34-46.
Nakamura, Y. (1992). A new nonlinear dynamical system that leads to eigenvalues, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics,* **9**, 133-139.
Nakamura, Y. (1994). Stochastic Lax representations and random collision models, *J. Phys. Soc. Japan*, **63**, 827-829.
岡部靖憲 (1991). Langevin 方程式と因果解析，数学，**43**, 322-346.
Okabe, Y., Mano, H. and Itoh, Y. (1993). Random collision model for interacting populations of two species and fluctuation-dissipation theorem —— the law of large numbers and the central limit theorem, *Hokkaido Math. J*. (to appear).
Tainaka, K. (1988). Lattice model for the Lotka-Volterra system, *J. Phys. Soc. Japan,* **57**, 2588-2590.
Tainaka, K. (1989). Stationary pattern of vortices or strings in biological systems: lattice version of the Lotka-Volterra model, *Phys. Rev. Lett.,* **63**, 2688-2691.
Tainaka, K. and Itoh, Y. (1991). Topological phase transition in biological ecosystems, *Europhys. Lett.,* **15**(4), 399-404.
Tainaka, K. and Itoh, Y. (1994). Glass effect in a prescribed marriage system, *Phys. Lett. A*, **187**, 49-53.
高崎金久 (1993). ノイズのある Burgers 方程式とくりこみ群の方法，統計数理研究所共同研究リポート，No. 48, 21-42.
Toda, M. (1967). Vibration of a chain with nonlinear interaction, *J. Phys. Soc. Japan,* **22**, 431-436.
Volterra, V. (1931). Lecon sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, *Cahiers Scientifiques VII*, Gauthiers-Villars, Paris.

Paper-scissors-stone Models of Nonlinear Integrable Systems

Yoshiaki Itoh

(The Institute of Statistical Mathematics and
the Graduate University for Advanced Studies)

A random collision model of cyclic dominance is studied for a nonlinear integrable system. For the case of infinite particles, the system is an integrable system. The conserved quantities of the system have a simple probabilistic meaning for this deterministic system. The conserved quantities are naturally extended to the stochastic system of finite particles by using conditional expectation. A four-particle random collision model is applied to make a stochastic model for an interior-point method of linear programing.

Key words: Paper-scissors-stone model, nonlinear integrable system, stochastic model, ternary collision model, four-particle collision model, Karmarkar algorithm.