統計数理 (1994)
第 42 巻 第 2 号 239-246

関数空間上の線形計画問題に対する内点法*

統計数理研究所　伊　藤　　聡

(1993 年 12 月　受付)

1. はじめに

1984 年に Karmarkar が多項式オーダーの新しい解法を発表して以来，内点法と呼ばれる一連のアルゴリズムは線形計画問題その他に対する有力な計算手法として認識されている．内点法は反復法であり，各反復において連立 1 次方程式を解くことにより探索方向を求める．計算時間の多くがこの連立 1 次方程式を解くことに費やされるため，これを如何に効率的に解くかが内点法の実装の鍵となる．また大規模な問題に対しては係数行列の疎構造を積極的に利用することも必要不可欠である．

一方，ここ数年集中定数系や分布定数系における離散時間の最適制御問題を SQP（逐次 2 次計画法）の枠組みのなかで，各反復に現われる 2 次計画問題に内点法を用いることにより解こうとする試みもいくつか行なわれている (S. Wright (1993) および Leibfritz and Sachs (1994) 参照)．対象となっている問題は連続時間の最適制御問題を時間的・空間的に離散化して得られたものであり，潜在的に大規模な最適化問題である．彼らは SQP の各反復に現われるラグランジュ関数のヘシアン行列および制約関数のヤコビアン行列の疎構造を利用したアルゴリズムを提案している．

本稿では，連続時間の最適制御問題に直接適用することを目的として，まず関数空間上の線形計画問題に対する内点法アルゴリズム（特に主双対内点法）の可能性について論じる（主双対内点法については，Megiddo (1989), Kojima et al. (1989), Monteiro and Adler (1989) 等を参照)．ヒルベルト空間 L^2 の正錐および負錐は内点を持たないため，内点の定義として通常の定義とは異なるものを用いる必要がある．また無限次元空間上で考えているため，内点法の各反復における連立 1 次方程式を直接法で厳密に解くことはもはや意味を持たず，反復法を用いて近似的に解くことが必要となる．本稿では特に Zhang et al. (1992) および Zhang and Tapia (1992, 1993) の主双対内点法を取り上げ，その関数空間への拡張を試みる．

2. 関数空間における主双対内点法

次のようなヒルベルト空間上の線形計画問題を考える．

$$
(2.1)\qquad \begin{aligned} &\min_x \ (c,\ x) \\ &\text{subj. to}\quad Ax=b,\quad x\geq 0 \end{aligned}
$$

ただし，$c,\ x\in H_1=L^2(\Omega_1,\ R^{M_1})$ および $b\in H_2=L^2(\Omega_2,\ R^{M_2})$ とする．ここで Ω_i は R^{N_i} のコン

* 本稿はノース・キャロライナ州立大学 C.T. Kelley 教授およびドイツ・トリア大学 E.W. Sachs 教授との共同研究に基づく．

パクトな部分集合である.(集中定数系の最適制御問題の場合 Ω_i は R のコンパクト部分区間となり，その要素 $t\in\Omega_i$ は時間に相当する（4章参照). 分布定数系の場合には Ω_i は空間領域と時間区間の直積となる.）また A は H_1 から H_2 への有界線形作用素とする. ヒルベルト空間 H_i の内積として正規化された内積すなわち

$$(x,\ y)_i=\frac{1}{|\Omega_i|M_i}\sum_{j=1}^{M_i}\int_{\Omega_i}x_j(t)y_j(t)dt$$

を用いる. ここで $|\Omega_i|$ は Ω_i のルベーグ測度を意味する. 内積記号の添字 i は以後省略する. さらに H_i における順序を

$$x\geq 0 \text{ if and only if } x_j(t)\geq 0 \text{ for all } 1\leq j\leq M_i \text{ and almost all } t\in\Omega_i$$

により定義する. また L^2 の枠組みにおいては上式で定義される錐は内点を持たないため，

$$x_j(t)\geq\sigma>0 \text{ for all } 1\leq j\leq M_i \text{ and almost all } t\in\Omega_i$$

なる σ が存在するとき，$x>0$ と書くことにする.

問題 (2.1) の双対は

$$\begin{aligned}&\max_{y,z}\ (b,\ y)\\ &\text{subj. to}\quad A^*y+z=c,\quad z\geq 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

で与えられる. ここで $y\in H_2$, $z\in H_1$, また A^* は A のヒルベルト共役作用素である. 適当な制約想定のもとでは，主問題 (2.1) と双対問題 (2.2) の解 x および y, z は次の方程式系の解である.

$$F(x,\ y,\ z)=\begin{pmatrix}Ax-b\\ A^*y+z-c\\ Xz\end{pmatrix}=0$$

ここで，線形作用素 X は有限次元の場合の自然な拡張として次で定義されるものとする.

$$(Xz)_j(t)=x_j(t)z_j(t) \text{ for all } 1\leq j\leq M_1 \text{ and almost all } t\in\Omega_1$$

以下に現われる線形作用素 Z および D も同様に定義する.

ヒルベルト空間 $H_1\times H_2\times H_1$ の部分空間として次の集合

$$L=L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})\times L^\infty(\Omega_2,\ R^{M_2})\times L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})$$

を定義し(以下ではこれらの部分空間に対しても常に L^2 ノルムを考えていることに注意されたい.)，$\mathscr{F}=\{(x,\ y,\ z)\in L\,|\,x,\ z>0\}$ とおく. 多くの主双対内点法と同じように，試行点 $(x,\ y,\ z)\in\mathscr{F}$ において方程式系

$$F_\mu(x,\ y,\ z)=\begin{pmatrix}Ax-b\\ A^*y+z-c\\ Xz-\mu e\end{pmatrix}=0\tag{2.3}$$

にニュートン法の1ステップを適用する. ここで μ は正数であり，$e\in H_1$ は次で定義される.

$$e_j(t)=1 \text{ for all } 1\leq j\leq M_1 \text{ and almost all } t\in\Omega_1$$

$x\in L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})$ かつ $x>0$ のとき線形作用素 X は H_1 上の強正定（したがって正則な）有界線形作用素となることに注意されたい. またこのとき F_μ は $H_2\times H_1\times H_1$ への写像となり，F_μ はフレッシェの意味で微分可能である.

$\mu_c>0$ が与えられたとき，現在の試行点 $w_c=(x_c,\ y_c,\ z_c)\in\mathscr{F}$ における方程式系 (2.3) のニュートン方向 $\Delta w=(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$ は次の線形方程式系の解である．

$$
\begin{aligned}
A\Delta x&=-\xi_c\\
A^*\Delta y+\Delta z&=-\zeta_c\\
Z_c\Delta x+X_c\Delta z&=-r_c
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ここで

$$
\xi_c=Ax_c-b,\qquad \zeta_c=A^*y_c+z_c-c,\qquad r_c=X_cz_c-\mu_ce
\tag{2.5}
$$

はそれぞれ方程式系 (2.3) の各項の w_c における残差を表わす．$x,\ z\in L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})$ かつ $x,z>0$ のとき，$D^2=XZ^{-1}$ によって H_1 上の強正定な有界線形作用素 D を定義する．ここで作用素 A およびベクトル $b,\ c$ に対して以下の仮定をおく．

仮定 2.1. $A:L^\infty(\Omega_1,R^{M_1})\to L^\infty(\Omega_2,\ R^{M_2})$ かつ $A^*:L^\infty(\Omega_2,\ R^{M_2})\to L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})$ であり，任意の $d\in L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})$, $d>0$ に対して AD^2A^* は $L^\infty(\Omega_2,\ R^{M_2})$ 上で正則である．また $b\in L^\infty(\Omega_2,\ R^{M_2})$, $c\in L^\infty(\Omega_1,\ R^{M_1})$ である．

この仮定のもとでは，線形方程式系 (2.4) の解すなわちニュートン方向 $\Delta w=(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$ は以下のように与えられる．

$$
\begin{aligned}
\Delta y&=(AD_c^2A^*)^{-1}(-\xi_c-AD_c^2\zeta_c+AZ_c^{-1}r_c)\\
\Delta z&=-\zeta_c-A^*\Delta y\\
\Delta x&=-D_c^2\Delta z-Z_c^{-1}r_c
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

最後に μ_c の選び方と Δw 方向へのステップサイズを決定する必要がある．ここでは，Zhang et al. にならい，以下のように μ_c および次の試行点 $w_+=(x_+,\ y_+,\ z_+)$ を定めることにする．

$$
\mu_c=\sigma_c(x_c,\ z_c)\ \text{for some}\ \sigma_c\in(0,1)
\tag{2.7}
$$

$$
\alpha_c=\min\left(1,\ \frac{-\tau_c}{\min\ (X_c^{-1}\Delta x,\ Z_c^{-1}\Delta z)}\right)\ \text{for some}\ \tau_c\in(0,1)
\tag{2.8}
$$

$$
w_+=w_c+\alpha_c\Delta w
\tag{2.9}
$$

仮定 2.1 のもとで，初期点 $w_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)\in\mathscr{F}$ に対して (2.7), (2.5), (2.6), (2.8), (2.9) により定まるアルゴリズムが実行可能であることは容易に確かめられる．

3. 反復法による近似的な実装

各反復における探索方向 $\Delta w=(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$ は (2.6) 式により求めるが，その第 1 式は関数空間上の 1 次方程式であり，直接法を用いてこれを正確に解くことは不可能である．そこで反復法を用いて近似的に解かざるを得ない．また試行点が最適解から遠く離れている場合は粗く，最適解に近づいていくにつれて高い精度で解いていくのが得策である．ここでは Dembo et al. (1982) の考えを取り入れ，相対誤差を制御することにより内点法の近似的な実装を試みる．

(2.6) 式の第 1 式を近似的に解くとき，探索方向 $\Delta w=(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)$ は残差 η_c を含む次式のように書ける．

$$
(3.1)\qquad
\begin{aligned}
\Delta y &= (AD_c^2A^*)^{-1}(-\xi_c - AD_c^2\zeta_c + AZ_c^{-1}r_c + \eta_c)\\
\Delta z &= -\zeta_c - A^*\Delta y\\
\Delta x &= -D_c^2\Delta z - Z_c^{-1}r_c
\end{aligned}
$$

この解 Δw が次式を満たしていることは容易に確かめられる.

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
A\Delta x &= -\xi_c + \eta_c\\
A^*\Delta y + \Delta z &= -\zeta_c\\
Z_c\Delta x + X_c\Delta z &= -r_c
\end{aligned}
$$

Δy に関する1次方程式を近似的に解いた影響が主問題の実行可能条件のみに現われているのは興味深い. したがって, 初期点として双対問題に対する許容解を選べば, 上述の意味での近似的な実装を行なっても, その許容性は維持されることがわかる. 以下では簡単のため, 初期点として双対問題に対する許容解を用いるものとする. このとき (見かけ上の) 双対ギャップ (x, z) に与える効果は次のように評価できる.

補助定理 3.1. 仮定2.1が成り立つとする. また $w_c=(x_c,\ y_c,\ z_c)\in\mathscr{F}$, $\zeta_c=0$ とし, $\tau_c\in(0, 1)$, $\sigma_c\in(0,\ 1)$ とする. このとき, (2.7), (2.5), (3.1), (2.8), (2.9) により η_c に依存して $w_+=(x_+,\ y_+,\ z_+)\in\mathscr{F}$ が定まり,

$$
(3.3)\qquad \xi_+ = (1-\alpha_c)\xi_c + \alpha_c\eta_c, \qquad \zeta_+ = 0
$$

が成立する. また双対ギャップ $(x_+,\ z_+)$ は

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
(x_+,\ z_+) = &((1-\alpha_c)+\alpha_c\sigma_c)(x_c,\ z_c)\\
&-\alpha_c^2(-\xi_c+\eta_c,\ (AD_c^2A^*)^{-1}(-\xi_c+AZ_c^{-1}r_c+\eta_c))
\end{aligned}
$$

で与えられる.

証明. 仮定2.1のもとで w_+ が存在し, $w_+\in\mathscr{F}$ となることは容易に確かめられる. また(3.3)式は (3.2) 式を用いて直ちに得られる. (3.4) 式を示す. (2.9), (3.2) の第3式, (2.5) の第3式, (2.7) を順に用いて次式を得る.

$$
(3.5)\qquad (x_+,\ z_+) = ((1-\alpha_c)+\alpha_c\sigma_c)(x_c,\ z_c) + \alpha_c^2(\Delta x,\ \Delta z)
$$

ここで (3.1) の第2式, (3.2) の第1式および (3.1) の第1式を順に用いると,

$$
\begin{aligned}
(\Delta x,\ \Delta z) &= (\Delta x,\ -A^*\Delta y) = -(A\Delta x,\ \Delta y) = -(-\xi_c+\eta_c,\ \Delta y)\\
&= -(-\xi_c+\eta_c,\ (AD_c^2A^*)^{-1}(-\xi_c+AZ_c^{-1}r_c+\eta_c))
\end{aligned}
$$

を得る. これを (3.5) に代入すると (3.4) が得られる.■

これを用いて双対ギャップ列の収束に関する次の定理を得る.

定理 3.1. 仮定2.1が成り立つとする. また $w_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)\in\mathscr{F}$, $\zeta_0=0$ とし, $\tau_k\in(0, 1)$ および $\sigma_k\in(0, \sigma)$, $k=0, 1, \ldots$ (ただし $\sigma<1$) に対して (2.7), (2.5), (3.1), (2.8), (2.9) により η_k, $k=0, 1, \ldots$ に依存して生成される点列を $\{w_k\}=\{(x_k,\ y_k,\ z_k)\}$ とする. いま (2.8) で与えられる $\{\alpha_k\}$ がある $\alpha>0$ に対して $\alpha_k\in(\alpha,\ 1]$ を満たすと仮定する. このとき, i) 点列 $\{\eta_k\}$ が $\varepsilon<1$ に対して

$$
(3.6)\qquad \|\eta_k\| \le \varepsilon \|\xi_k\|
$$

を満たすならば,$\{\xi_k\}$ は 0 に 1 次収束する．ii) すべての k に対して $r_k>0$ ならば,双対ギャップ列 $\{(x_k, z_k)\}$ は 0 に 1 次収束する．

証明. i) 補助定理 3.1 の (3.3) 式および (3.6) 式より

$$\|\xi_{k+1}\| \le (1-\alpha(1-\varepsilon))\|\xi_k\|$$

を得る．ii) 補助定理 3.1 の (3.4) 式を変形することにより

$$\begin{aligned}(x_{k+1}, z_{k+1}) &= ((1-\alpha_k)+\alpha_k\sigma_k)(x_k, z_k)\\ &\quad -\alpha_k^2\|D_kA^*(AD_k^2A^*)^{-1}(-\xi_k+\eta_k)\|^2\\ &\quad -\alpha_k^2(D_kA^*(AD_k^2A^*)^{-1}(-\xi_k+\eta_k), (X_kZ_k)^{-1/2}r_k)\\ &\le ((1-\alpha_k)+\alpha_k\sigma_k)(x_k, z_k)+\frac{\alpha_k^2}{4}\|(X_kZ_k)^{-1/2}r_k\|^2\end{aligned}$$

を得る．不等号は平方完成による．ここで，$r_k>0$ ならば

$$|(X_kZ_k)^{-1/2}r_k(t)|^2 = \frac{r_k(t)^2}{x_k(t)z_k(t)} = \frac{r_k(t)^2}{r_k(t)-\mu_k} \le r_k(t) \quad \text{a.e.}$$

故に

$$\|(X_kZ_k)^{-1/2}r_k\|^2 \le (r_k, e) = (x_k, z_k)-\mu_k = (1-\sigma_k)(x_k, z_k)$$

であるから,

$$\begin{aligned}(x_{k+1}, z_{k+1}) &\le \left((1-\alpha_k)+\alpha_k\sigma_k+\frac{\alpha_k^2}{4}(1-\sigma_k)\right)(x_k, z_k)\\ &= \left(1-\alpha_k\left(1-\frac{\alpha_k}{4}\right)(1-\sigma_k)\right)(x_k, z_k)\\ &\le \left(1-\alpha\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)(1-\sigma)\right)(x_k, z_k)\end{aligned}$$

を得る.■

Δy に関する 1 次方程式は実際には CG 法（共役勾配法）を用いて解くが，ここで述べたような近似的な実装を行なう際には作用素 AD^2A^* に対する前処理が不可欠である．最適制御問題に適用する場合,作用素 A には一般に状態方程式および状態制約条件に起因する密な部分と制御変数に関する制約条件に起因する疎な部分が存在し，後者を用いたプリコンディショナーの構成は容易である．

4. 数　値　例

例題として次のような線形最適制御問題を考える．

$$(4.1)\qquad \begin{aligned}&\min_{x,u}\int_0^1 x(t)dt\\ &\text{subj. to}\quad \dot{x}(t)=u(t),\quad x(0)=\delta/2\\ &\qquad\qquad 0\le x(t)\le\delta\\ &\qquad\qquad -\gamma\le u(t)\le\gamma\end{aligned}$$

ここで x, u はそれぞれ状態変数および制御変数を表わし，ともに関数空間 $L^2([0, 1], R)$ に

属するものとする．積分作用素

$$(Tu)(t) \triangleq \int_0^t u(s)ds$$

を用いると，問題 (4.1) は次のように表わせる．

$$\begin{aligned} \min_{x,u} \ & (e, x) \\ \text{subj. to} \ & x = Tu + \delta/2 \\ & 0 \leq x \leq \delta \\ & -\gamma \leq u \leq \gamma \end{aligned}$$

ただし e は $L^2([0,1], R)$ 上の単位関数，また δ, γ はそのまま $L^2([0,1], R)$ 上の定値関数をも表わすものとする．これより状態変数 x を消去し目的関数中の定数項を除去すると以下のように書ける．

$$\begin{aligned} \max_{u} \ & (-T^*e, u) \\ \text{subj. to} \ & -Tu \leq \delta/2 \\ & Tu \leq \delta/2 \\ & -u \leq \gamma \\ & u \leq \gamma \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで T^* は T の随伴であり，次式で定義される．

$$(T^*v)(s) = \int_s^1 v(t)dt$$

いま $H_1 = L^2([0,1], R^4)$, $H_2 = L^2([0,1], R)$ とし

$$A^* = \begin{pmatrix} -T \\ T \\ -I \\ I \end{pmatrix}, \qquad b = -T^*e, \qquad c = \begin{pmatrix} \delta/2 \\ \delta/2 \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

とおくと，問題 (4.2) は双対形 (2.2) に相当する．正規化された内積のもとでは，A^* に対応する A は

$$A = \frac{1}{4}(-T^*, T^*, -I, I)$$

で与えられる．

$\delta=5$, $\gamma=3$ としてこの問題に対する数値実験を行なった．問題 (4.1) の最適目的関数値は $\delta^2/8\gamma$ であるから問題 (4.2) の最適値は $\delta/2-\delta^2/8\gamma=1.458\dot{3}$ となる．アルゴリズムのパラメータは k にかかわらず $\sigma_k=10^{-2}$, $\tau_k=0.99$ と設定した．初期推定 $w_0=(x_0, y_0, z_0)$ として $x_0=(3e, e, e, e)$, $y_0=0$, $z_0=c$ を選んだが，これは双対問題に対しては許容であり主問題に対しては非許容である．双対探索方向 Δy_k を求める際の CG 法に関しては，その初期推定として ($k=0$ の場合を除き) Δy_{k-1} を用い，終了判定は $\varepsilon=0.99$ として (3.6) 式を用いた．また作用素 AD^2A^* の前処理については，D^2 を $\mathrm{diag}(D_1, D_2, D_3, D_4)$ と表わしたとき AD^2A^* が

Table 1.

k	$\rho_k=(x_k, z_k)$	ρ_k/ρ_{k-1}	(c, x_k)	(b, y_k)	$\lVert\xi_k\rVert$	$\lVert\xi_k\rVert/\lVert\xi_{k-1}\rVert$	$\lVert\zeta_k\rVert$	$\lVert r_k\rVert$	CG iterations	α_k
0	4.000E+00		4.000E+00	0.000E+00	2.887E-01		0.000E+00	4.450E+00	1	4.933E-01
1	1.923E+00	4.806E-01	2.298E+00	5.033E-01	1.471E-01	5.095E-01	2.308E-16	2.344E+00	0	4.819E-01
2	9.886E-01	5.142E-01	1.766E+00	9.950E-01	1.266E-01	8.609E-01	5.236E-16	1.280E+00	2	4.591E-01
3	5.114E-01	5.173E-01	1.646E+00	1.289E+00	7.010E-02	5.536E-01	1.162E-15	6.944E-01	3	6.423E-01
4	1.764E-01	3.450E-01	1.546E+00	1.428E+00	2.556E-02	3.646E-01	1.220E-15	2.624E-01	4	7.122E-01
5	5.155E-02	2.922E-01	1.490E+00	1.452E+00	6.722E-03	2.630E-01	6.122E-16	8.081E-02	12	6.187E-01
6	2.000E-02	3.881E-01	1.472E+00	1.456E+00	2.823E-03	4.199E-01	1.110E-15	3.184E-02	25	5.407E-01
7	9.272E-03	4.635E-01	1.467E+00	1.457E+00	1.619E-03	5.736E-01	4.403E-16	1.484E-02	47	4.815E-01
8	4.846E-03	5.226E-01	1.464E+00	1.458E+00	1.230E-03	7.598E-01	4.400E-16	7.758E-03	61	4.845E-01
9	2.520E-03	5.200E-01	1.462E+00	1.458E+00	1.075E-03	8.740E-01	9.494E-16	4.031E-03	77	5.929E-01
10	1.040E-03	4.127E-01	1.461E+00	1.458E+00	9.245E-04	8.598E-01	6.541E-16	1.661E-03	101	6.453E-01
11	3.754E-04	3.609E-01	1.459E+00	1.458E+00	2.658E-04	2.875E-01	6.536E-16	5.963E-04	125	8.201E-01
12	7.056E-05	1.880E-01	1.459E+00	1.458E+00	8.634E-05	3.248E-01	8.430E-16	1.107E-04	173	9.196E-01
13	6.324E-06	8.962E-02	1.458E+00	1.458E+00	9.252E-06	1.072E-01	1.277E-15	9.475E-06	194	9.917E-01
14	1.153E-07	1.823E-02	1.458E+00	1.458E+00						

$$
\begin{aligned}
AD^2A^* &= \frac{1}{4}(-T^*,\ T^*,\ -I,\ I)\begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & D_3 & \\ & & & D_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -T \\ T \\ -I \\ I \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\,T^*(D_1+D_2)T + \frac{1}{4}(D_3+D_4)
\end{aligned}
$$

と表わされることから，$(D_3+D_4)^{-1}$ をそのプリコンディショナーとして用いた．数値計算にあたって，すべての関数は N 点で離散化し，内積および作用素 T, T^* の定義中に現われる積分はすべて台形公式で近似した．$N=201$ の場合を Table 1 に示す．計算は Sun Sparc 2 上で f77 を用いて倍精度で行なった．

参 考 文 献

Dembo, R., Eisenstat, S. and Steihaug, T. (1982). Inexact Newton methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **19**, 400-408.

Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A. (1989). A primal-dual interior point algorithm for linear programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 29-47, Springer, New York.

Leibfritz, F. and Sachs, E.W. (1994). Numerical solution of parabolic state constrained control problems using SQP- and interior-point-methods, *Large Scale Optimization : State of the Art* (eds. W.W. Hager, D.W. Hearn and P.M. Pardalos), 251-264, Kluwer, Dordrecht.

Megiddo, N. (1989). Pathways to the optimal set in linear programming, *Progress in Mathematical Programming, Interior Point and Related Methods* (ed. N. Megiddo), 131-158, Springer, New York.

Monteiro, R.C. and Adler, I. (1989). Interior path following primal-dual algorithms, part 1 : linear programming, *Math. Programming*, **44**, 27-42.

Wright, S.J. (1993). Interior point methods for optimal control of discrete-time systems, *J. Optim. Theory Appl.*, **77**, 161-174.

Zhang, Y. and Tapia, R.A. (1992). Superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point methods for linear programming revisited, *J. Optim. Theory Appl.*, **73**, 229-242.

Zhang, Y. and Tapia, R.A. (1993). A superlinearly convergent polynomial primal-dual interior-point algorithm for linear programming revisited, *SIAM J. Optim.*, **3**, 118-133.

Zhang, Y., Tapia, R.A. and Dennis, J.E. (1992). On the superlinear and quadratic convergence of primal-dual interior point linear programming algorithms, *SIAM J. Optim.*, **2**, 304-324.

A Primal-dual Interior Point Method for Infinite-dimensional Linear Programming Problems

Satoshi Ito

(The Institute of Statistical Mathematics)

Recently there have been some approaches to the numerical solution of discrete-time optimal control problems by the use of interior point algorithms in the context of sequential quadratic programming. The problems are discretized versions of continuous-time problems and hence potentially very large. In this note, we consider a primal-dual interior point algorithm for linear programming problems in function spaces with the object of direct application to continuous-time linear optimal control problems. Since the problems are infinite-dimensional, it is impossible to solve exactly the linear equation for finding a search direction at each iteration. We consider an inexact implementation of the interior point algorithm and show some convergence results.

Key words: Interior point method, linear programming, infinite programming, inexact Newton method, optimal control problem.