$$\Sigma := E_P[|(\boldsymbol{\Delta})_k\rangle\langle(\boldsymbol{\Delta})_k|],\qquad \boldsymbol{I} := E_P[|(\boldsymbol{S})_k\rangle\langle(\boldsymbol{S})_k|],\qquad \boldsymbol{J}^t := E_P[|(\boldsymbol{\Delta})_k\rangle\langle(\boldsymbol{S})_k|],$$
$$\boldsymbol{J} := E_P[|(\boldsymbol{S})_k\rangle\langle(\boldsymbol{\Delta})_k|],\qquad \boldsymbol{K} := \boldsymbol{I}(\boldsymbol{J}^t)^{-1}.$$

次のノンパラメトリックな統計的不確定性関係及び統計基礎方程式が成立する．

定理． $\forall \boldsymbol{y}\in R^k$ に対して

$$\boldsymbol{y}^t\Sigma\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{y}^t\boldsymbol{J}^t\boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{y}$$

が成立する．ここに等号が成立するための必要十分条件は

$$(*)\qquad \partial\ln p(\boldsymbol{A};\Lambda)/\partial\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Xi}(\Lambda)\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{A};\Lambda)\qquad (\mu\text{-a.e.})$$

となる $\boldsymbol{I}(\boldsymbol{J}^t)^{-1}\neq\boldsymbol{0}$ に対応する行列 $\boldsymbol{\Xi}(\Lambda)$ の存在，又は $\Sigma=\boldsymbol{0}_{k\times k}$ となることである．

上の関係式は「観測対象量と統計的モデル（観測装置）からなる統計的複合システムに於いてこれら両者を同時に厳密に（決定論的因果関係によって）記述することは出来ない」ことを意味しており，単なる分散の大きさの評価と言うことだけではなく，モデル分布型をも規制する統計学における根本的な不等式である．また上式（＊）或はベクトル表現

$$(**)\qquad |(\boldsymbol{\Delta})_k\rangle p = \boldsymbol{K}^{-1}|(\nabla_A p)_k\rangle\qquad \text{with } \boldsymbol{K}=\boldsymbol{I}(\boldsymbol{J}^t)^{-1},\ \nabla_A=\partial/\partial|(\boldsymbol{A})_k\rangle$$

はノンパラメトリックモデルの特定化を可能にする基礎方程式と見做せる（詳細略）．

点過程 ETAS モデルについて：尤度計算の高速化

尾 形 良 彦

余震活動の経験法則によると余震の単位時間当りの発生頻度は本震直後からの推移時間tについて$\lambda(t)=K/(t+c)^{-p}$の様に逆べきに従って減衰することになっている．これは改良大森の公式と呼ばれるものである．しかし，余震活動を細かくみると，余震の余震（二次余震）などがあり，単純な本震余震系列は実際には少ないことが分かる．その他にも，前震，群発地震などがあり，特に活動が活発な地域では，本震と思われていたものが他の地震の余震（広義余震）であったり，他地域の活動と関係があったりして，本震と余震の区別をつけるのが困難になることが多い．にもかかわらず，これらの複雑な地震活動も，実は一つ一つの地震に対する改良大森関数の重ね合わせを用いて良く表現される．

点過程 ETAS モデルは，大森公式を始めとする伝統的な地震統計研究の重要な成果を，ダイナミックな見地から表現する地震活動計測用モデルであり，単位時間当りの発生頻度の時間推移が

$$\lambda_\theta(t)=\mu+\sum_{i:t_i<t}\frac{K_0e^{\alpha(M_i-M_0)}}{(t-t_i+c)^p}$$

によって表現されるものである．但し，μは定常地震活動レベルを示す定数であり，総和$\sum$は時刻t以前に発生した全ての地震iについて本震と余震の区別を問わずに取るものである．ここでt_i, M_iはi番目の地震の発生時刻とマグニチュード，M_0は考慮している地震データの足切りマグニチュードである．通常の地震活動の特徴は ETAS モデルの5つのパラメータ（μ, K_0, c, α, p）によって量的に表現される．これらのパラメータの最尤推定値は対数尤度関数

$$\log L(\mu, K_0, c, \alpha, p)=\sum_{i=1}^{n}\log\lambda(t_i)-\int_0^T\lambda(t)dt$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\mu+\sum_{j=1}^{i-1}\frac{K_0e^{\alpha(M_j-M_0)}}{(t_i-t_j+c)^p}\right\}-\mu T-\sum_{i=1}^{n}K_0e^{\alpha(M_i-M_0)}\left\{\int_0^{T-t_i}\frac{dt}{(t+c)^p}\right\},$$

を最大化して得られるものである．ところが，この尤度計算に於て第一項は i と j に関する二重和であるために，データ数 n について $O(n^2)$ のオーダーで増えるのに，第二項は $O(n)$ である．n が大きければ尤度計算の殆どが第一項に費やされる．

これに対処するために改良大森関数の積分形

$$\frac{1}{(t+c)^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-(t+c)x}dx$$

を用いることにした．ただし $\Gamma(p)$ は指数 p のガンマ関数である．変数変換 $y=cx$ を施すと対数尤度の第 1 項は

$$\sum_{i=1}^{n}\log\lambda(t_i)=\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\mu+\frac{K_0c^{-p}}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty}y^{p-1}e^{-y}F_i(y)dy\right\},$$

となる．ただし関数 $F_i(y)$ は y に関して単調減衰で滑らかな関数であり，これが初期値が $F_1(y)=0$ として i に関して帰納的に

$$F_i(y)=\{F_{i-1}(y)+e^{\alpha(M_{i-1}-M_0)}\}e^{-y(t_i-t_{i-1})/c},$$

の様に表現されることが大切である．

次に被積分関数が $f(y)=y^{p-1}e^{-y}F_i(y)=f_0(y)e^{-y}$ の様な形であることに注目して y を二重指数変換 $y=g(x)\equiv\exp\{(\pi/2)(x-e^{-x})\}$ を施して $[0,\infty)$ にわたる定積分を $(-\infty,\infty)$ の台形公式

$$\int_0^{\infty}f(y)dy\approx\int_{-9}^{9}f(g(x))\frac{dg(x)}{dx}dx\approx\frac{\pi\Delta}{2}\sum_{j=-m}^{m}w_jf(g(j\Delta)),$$

で近似する．ただし重み $w_j=(1+e^{j\Delta})g(j\Delta)$, $j=-m,\ldots,m$, は前もって i に無関係に計算される．ガンマ関数 $\Gamma(p)$ はパデ近似（有理関数）を使う．同様な計算を対数尤度の微分についても実行し最尤推定値などを求める．

ETAS モデルによって生成された 2,500 個のデータについて統計数理研究所の大型計算機 HITAC M682H で得られた結果を表にする．$[-9, 9]$ を $2m$ 等分しているので $m\Delta=9$ である．

表から分かるように，それほど細かくない分割についても十分な精度が保証されて，計算時間は大幅

表.

Δ	μ ($\times10^{-1}$)	K_0 ($\times10^{-1}$)	c ($\times10^{-2}$)	α	p	log-likelihood	run time* (min : sec)
			Initial values				
Exact	.2000000000	.4000000000	.3000000000	.4000000000	1.300000000	−1837.98294044342	
1/16	—	—	—	—	—	−1837.98294044341	
1/8	—	—	—	—	—	−1837.982939	
1/4	—	—	—	—	—	−1837.980	
1/2	—	—	—	—	—	−1837.5	
1	—	—	—	—	—	−1819.	
			Maximized values				
Exact	.1670575615	.4021317130	.3181625756	.4157142805	1.300836265	−1840.42687312696	39 : 31.03
1/16	.1670575607	.402131715	.318162573	.415714274	1.300836265	−1840.42687312696	4 : 35.76
1/8	.167057565	.402131711	.318162574	.415714275	1.300836268	−1840.426871	2 : 43.31
1/4	.167054	.402129	.31810	.4157146	1.30082	−1840.421	1 : 20.53
1/2	.169	.401	.32	.4156	1.302	−1839.9	0 : 48.85
1	.2	.38	.39	.411	1.34	−1823.1	0 : 24.40

* Run times during the whole maximization of the log-likelihood.

に短縮されていることが分かる．この高速化は来るべき ETAS モデルの時空間版開発のための布石でもある．

このアルゴリズムの ETAS モデルを含む地震活動の同定，時間変換による異常の検出など，統計的方法の計算プログラムは，FORTRAN package として統計数理研究所の *Computer Science Monographs* で出版予定であるが，同時に国際地震学・地球内部物理学会ならびにアメリカ地震学会の求めに応じて，今から一年後に，Software Library として出版される予定である．

Regularly Varying Tail をもつ分布に従う確率変数の独立積について

志 村 隆 彰

X, Y をそれぞれ分布 μ, ν に従う正値の独立確率変数とする．このとき，これらの独立積 XY の分布を μ と ν の Mellin-Stieltjes convolution と呼び，$\mu\circ\nu$ で表す．さて，独立同分布に従う確率変数列に関する極限定理において，正則変動関数で特徴付けられる分布族がしばしば現れる．このような分布の Mellin-Stieltjes convolution について調べるのが目標である．独立和である通常の畳み込みについては，逆問題である分解問題を含めてある程度の解答が得られているが (Shimura (1991, 1992))，独立積についても興味深い問題である．具体的には，次のような分布族を扱う．

$D(\alpha)$ $(\alpha\geq 0)$: 正の台をもち，tail が指数 $-\alpha$ の正則変動をするもの．
D_2: truncated variance が緩慢変動するもの．

これらはいずれも極限定理に関係する分布族である．これらに対し，以下の様な結果が得られた．

1. $\mu\in D(\alpha)$, $\nu\in D(\beta)$ $(\alpha\leq\beta)$ ならば，$\mu\circ\nu\in D(\alpha)$．特に，$\alpha<\beta$ ならば，次の式が成り立つ．

$$\lim_{x\to\infty}\mu\circ\nu(x,\infty)/\mu(x,\infty)=\int_0^\infty t^\alpha\nu(dt).$$

2. $\mu,\nu\in D_2$ ならば，$\mu\circ\nu\in D_2$．

次に，同様な問題をガウスでない一般の安定分布の吸引域（台が両側に非有界）について考える．この場合も tail の正則変動性は，上記の結果からただちに分かる．しかしながら，もうひとつの条件である balance condition は極限の安定分布の指数が異なっていればよいが，指数が同じときは tail の精密な評価を得るのが困難なため，現在の所，一定の条件のもとでしかこれが満たされることを証明できていない．

参 考 文 献

Shimura, T. (1991). Decomposition of non-decreasing slowly varying functions and the domain of attraction of Gaussian distributions, *J. Math. Soc. Japan*, **43**, 775-793.
Shimura, T. (1992). Decomposition problem of probability measures related to monotone regularly varying functions (submitted to *Nagoya Math. J.*).

多 変 量 極 値 分 布 に つ い て

(客員) 神戸商船大学 商船学部　高 橋 倫 也

独立で同一分布 F に従う確率ベクトル列 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の成分ごとの最大値（多変量極値統計量）を Z_n とする．ここで，Z_n の成分ごとに基準化した統計量が非退化な分布 H に弱収束するとき，F は H の吸引領域に属すと言う．また，H を多変量極値分布と言う．