統計基礎研究系

確率分布の決定と関数方程式

清 水 良 一

確率変数の系列 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ を $Z_1 = X_1$,

$$Z_{n+1} = U_n Z_n + X_{n+1}, \qquad n \geq 1$$

によって定義する．ただし，$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ および $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ は互いに独立で U は区間 $(0, 1)$ 上の一様分布，X は何か共通の分布 G に従う変数とする．G に関する適当な条件の下で Z_n は確率変数 Z に収束する．Z の分布 F を決定することが問題である．F, G の特性関数をそれぞれ ϕ, ξ とすると容易に分るように問題は関数方程式

$$\phi(t) = \xi(t)\psi(t), \qquad \text{ただし } \psi(t) = \int_0^1 \phi(ut)\,du$$

を解くことに帰着され，この $\psi(t)$ を求めればよいことになる．

本研究では $\lim x\Pr\{|X|>x\}=0$ という条件下で $\psi(t)$ を完全に決定した．$\psi(t)$ は単峰で，正規成分をもたない無限分解可能な分布である．分布 G を区間 $(0, \infty)$，一点 $\{0\}$ および $(-\infty, 0)$ に集中している分布 G^+, $\varepsilon(x)$, および G^- を使って

$$G(x) = pG^+(x) + (1-p-q)\varepsilon(x) + qG^-(x)$$

と書いたとき，$\psi(t)$ を Lévy 表現したときのスペクトル関数 M, N およびシフト・パラメタ μ はそれぞれ次の表現をもつ：

$$dM(x) = p^{-1}(1-G^+(x))x^{-1}dx, \qquad x>0,$$
$$dN(x) = q^{-1}G^+(x)x^{-1}dx, \qquad x<0$$

および

$$\mu = \int_0^\infty \frac{(1-G^+(x))}{1+x^2}\,dx - \int_{-\infty}^0 \frac{G^+(x)}{1+x^2}\,dx.$$

例えば，X が平均値 λ の指数分布に従うとき $G(x)=1-\exp\{-x/\lambda\}$, $x>0$, $\xi(t)=(1-i\lambda t)^{-1}$ である．このとき $\psi=\xi$ であり Z_n の極限分布は特性関数 $\phi(t)=(1-i\lambda t)^{-2}$ をもつガンマ分布（d.f. 4 のカイ 2 乗分布）であることが分る．（この研究は平成3年度科研費およびソ連邦高等教育省の援助を受けており，レニングラード建築研究所 L.B. Klebanov との共同研究の一部である．）

2状態マルコフ連鎖で連続して起こる事象についての分布

平 野 勝 臣

本年度の研究． (1) 正値連続分布の典型であるスケール分布族の代表的な分布について研究を行った．(2) 離散分布の研究では，2状態マルコフ連鎖で連続して起こる事象についてのいくつかの分布について調べ，これに関するいくつかの結果をまとめた (Aki and Hirano (1991), Hirano and Aki (1992))．当日は以上の共同研究を報告した．ここでは Aki and Hirano (1991) の要旨を述べる．

要旨． $X_0, X_1, X_2, \ldots$ を初期分布と推移確率が指定された，0 か 1 のいずれかの値をとる time-homogeneous なマルコフ連鎖とする．確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ の系列において，E_0 を長さ r の "0" の連の起こる

事象，E_1 を長さ k の“1”の連の起こる事象とする．このとき E_0, E_1 のいずれかが最初に起こるまでのwaiting time の分布の gpgf, 条件 $X_0=0$ と $X_0=1$ がそれぞれ与えられたときの条件付き waiting time 分布の gpgf, この3つを陽の形で与えた．また長さ k の“1”の連が起こるまでの waiting time の分布の pgf と pf を陽の形で与えた．

更に，E_0 と E_1 の両方が起こるまでの waiting time の分布の gpgf を陽の形で与えた．

最後に，条件 $X_0=0$ が与えられたときと，条件 $X_0=1$ が与えられたとき，n 回の試行で E_1 が起こる回数の条件付き確率分布の条件付き pgf をそれぞれ陽の形で与えた．

参考文献

Aki, S. and Hirano, K. (1991). Discrete distributions related to succession events in a two-state Markov chain, Research Memo. No. 419, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

Hirano, K. and Aki, S. (1992). On number of occurrences of success runs of length k in a two-state Markov chain, Research Memo. No. 432, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

ブートストラップと予測の誤差推定

小 西 貞 則

Efron (1979) によって紹介されたブートストラップ法は，統計解析に於ける様々の問題に適用され興味ある結果を生み出しつつある．予測の誤差を確率分布に基づきグローバルな観点から捉えた情報量規準 AIC に於ける，対数尤度のバイアス補正の研究もその一つである．

未知の確率分布関数 $G(x)$ からの大きさ n の無作為標本を $\boldsymbol{X}_n$ とする．分布関数 $G(x)$ の密度関数を $g(x)$ とし，これに対して想定したモデルの密度関数を $f(x\,|\,\boldsymbol{\theta})$ とする．情報量規準に於ける推定量のバイアス補正とは，推定されたモデルの平均対数尤度を対数尤度で推定したときのバイアス

$$b(G)=E_G\left[\frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\log f(X_\alpha\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}})-\int g(z)\log f(z\,|\,\hat{\boldsymbol{\theta}})dz\right]$$

の補正である．

Ishiguro and Sakamoto (1991) は，モデルに含まれるパラメータの推定を，最尤法に限定せずに推定した場合の情報量規準の導出を目的として，バイアス $b(G)$ の推定をブートストラップ法により数値的に行う方法を提案した．さらに北川 (1991) は，このブートストラップバイアス推定の変動を減少させるための一方法を提案した．

ここでは，未知のパラメータベクトル $\boldsymbol{\theta}$ を統計的汎関数で定義される推定量に基づいて推定したとき，ある正則条件のもとで漸近的なバイアスは

$$b(G)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}\int T_i^{(1)}(z\,;\,G)\frac{\partial\log f(z\,|\,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}dG(z)+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となることを示し，ブートストラップ法との関係を検討した．ただし，$T_i^{(1)}(z\,;\,G)$ は，推定量 $\hat{\theta}_i$ の影響関数とする．漸近的バイアスは，例えば未知の確率分布 G を経験分布関数 $\hat{G}$ で置き換えた

$$b_K^{(1)}(\hat{G})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{\alpha=1}^{n}T_i^{(1)}(X_\alpha\,;\,\hat{G})\left.\frac{\partial\log f(X_\alpha\,|\,\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}}$$

で推定する．

ブートストラップ法を適用した数値的アプローチは，極めて緩やかな仮定のもとで適用できる．しかし，バイアス推定の確率的変動の大きさには，本研究の解析的アプローチと同様に十分注意を払う必要がある．この点に関しては今後の研究課題である．