統計基礎研究系

確率分布の決定と関数方程式

清 水 良 一

確率変数の系列 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ を $Z_1 = X_1$,

$$Z_{n+1} = U_n Z_n + X_{n+1}, \qquad n \geq 1$$

によって定義する．ただし，$U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ および $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ は互いに独立で U は区間 $(0, 1)$ 上の一様分布，X は何か共通の分布 G に従う変数とする．G に関する適当な条件の下で Z_n は確率変数 Z に収束する．Z の分布 F を決定することが問題である．F, G の特性関数をそれぞれ ϕ, ξ とすると容易に分るように問題は関数方程式

$$\phi(t) = \xi(t)\psi(t), \qquad \text{ただし}\ \psi(t) = \int_0^1 \phi(ut)du$$

を解くことに帰着され，この $\psi(t)$ を求めればよいことになる．

本研究では $\lim x\Pr\{|X| > x\} = 0$ という条件下で $\psi(t)$ を完全に決定した．$\psi(t)$ は単峰で，正規成分をもたない無限分解可能な分布である．分布 G を区間 $(0, \infty)$, 一点 $\{0\}$ および $(-\infty, 0)$ に集中している分布 G^+, $\varepsilon(x)$, および G^- を使って

$$G(x) = pG^+(x) + (1-p-q)\varepsilon(x) + qG^-(x)$$

と書いたとき，$\psi(t)$ を Lévy 表現したときのスペクトル関数 M, N およびシフト・パラメタ μ はそれぞれ次の表現をもつ：

$$\begin{aligned} dM(x) &= p^{-1}(1-G^+(x))x^{-1}dx, & x > 0, \\ dN(x) &= q^{-1}G^+(x)x^{-1}dx, & x < 0 \end{aligned}$$

および

$$\mu = \int_0^\infty \frac{(1-G^+(x))}{1+x^2}\,dx - \int_{-\infty}^0 \frac{G^+(x)}{1+x^2}\,dx.$$

例えば，X が平均値 λ の指数分布に従うとき $G(x) = 1-\exp\{-x/\lambda\}$, $x > 0$, $\xi(t) = (1-i\lambda t)^{-1}$ である．このとき $\psi = \xi$ であり Z_n の極限分布は特性関数 $\phi(t) = (1-i\lambda t)^{-2}$ をもつガンマ分布（d.f. 4 のカイ 2 乗分布）であることが分る．（この研究は平成3年度科研費およびソ連邦高等教育省の援助を受けており，レニングラード建築研究所 L.B. Klebanov との共同研究の一部である．）

2状態マルコフ連鎖で連続して起こる事象についての分布

平 野 勝 臣

本年度の研究． (1) 正値連続分布の典型であるスケール分布族の代表的な分布について研究を行った．(2) 離散分布の研究では，2状態マルコフ連鎖で連続して起こる事象についてのいくつかの分布について調べ，これに関するいくつかの結果をまとめた (Aki and Hirano (1991), Hirano and Aki (1992))．当日は以上の共同研究を報告した．ここでは Aki and Hirano (1991) の要旨を述べる．

要旨． $X_0, X_1, X_2, \ldots$ を初期分布と推移確率が指定された，0 か 1 のいずれかの値をとる time-homogeneous なマルコフ連鎖とする．確率変数 $X_1, X_2, \ldots$ の系列において，E_0 を長さ r の "0" の連の起こる