## 統計教育・情報センター

### 非可換力学系と実階数次元

吉　田　裕　亮

位相空間において次元という不変量は最も基本的かつ重要なものである．位相空間 $X$ に対しての被覆次元（Lebesgue 次元）という概念を，位相空間の量子化（非可換化）にあたる $C^*$ 代数に拡張したものとして実階数次元と呼ばれる概念が 1988 年に L.G. Brown, G.K. Pedersen により導入された．$X$ がコンパクト Hausdorff 空間の場合には，$\dim X$ とは次のことが成り立つ最小の整数 $n$ のことである．

「$X$ から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への任意の連続関数 $f$ が零点を持たない連続関数 $g$ で十分近似される．」

$f, g$ を $C(X)$（$X$ 上の連続関数全体）の実関数の組と同一視すれば連続関数 $g=(g_1, g_2, \ldots, g_{n+1})$ が零点を持たないとは $\sum_k g_k(x)^2>0, x\in X$ のことである．

可換な単位元を持つ $C^*$ 代数はコンパクト集合上の連続関数全体のなす代数と見られるので，一般の（可換とは限らない）単位元を持つ $C^*$ 代数 $A$ の実階数次元 $RR(A)$ は以下のように定義される．すなわち $RR(A)$ とは次のことが成り立つ最小の整数 $n$ のことである．

「$n\leqq RR(A)+1$ で $A$ の自己共役な元の任意の $n$-組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ および任意の $\varepsilon>0$ に対して $A$ の自己共役な元の $n$-組 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ が存在して $\sum_k y_k^2$ が逆元を持ち $\|\sum_k(x_k-y_k)^2\|<\varepsilon$ となる．」

もちろん非可換への拡張になっているので $RR(C(X))=\dim X$ である．

この次元に関して次のことを中心に研究した．$C^*$ 代数 $A$ に群 $G$ の作用 $\alpha$ が与えられたときこの3つ組 $(A,G,\alpha)$ を $C^*$ 力学系という．この力学系より接合積と呼ばれる捩れの入った新しい $C^*$ 代数 $A\times G$ が構成できる．これは $A$ が可換であっても一般に可換ではない．そこで，実階数次元 $RR(A\times G)$ がどのような振る舞いをするかを研究した．特に $A$ が可換で，すなわち $A=C(X)$ で $G$ が有限群の場合に $RR(A\times G)$ は $\dim X$ に等しいであろうことが導かれ，また0次元のときは $RR(A\times G)=0$ と $\dim X=0$ が同値であること，1次元のときには，その例を検証できた．

## 領域統計研究系

### 推定方程式の理論からみたモーメント法

柳　本　武　美

#### 1．序

モーメント法は従来 quick and dirty な方法としてその計算の簡便性が強調されてきた．しかし計算の負担が大幅に軽減された現在ではその長所は重要ではない．一方モーメント法は直観的に分かり易い．またその式が簡単であることから，尤度法に比べてロバストであることが期待される．

#### 2．推定方程式の理論

尤度推定関数 $L(\boldsymbol{x};\theta)$ は次の正則条件を満たすことが多い．

a)　$E(L(\boldsymbol{x};\theta))=0$　　（不偏性）
b)　$E(L'(\boldsymbol{x};\theta))=-E(L^2(\boldsymbol{x};\theta))$　　（情報不偏性）
c)　$L(\boldsymbol{x};\theta)=0$ は $\theta$ に関して一意の解をもつ．$\hat{\theta}$ を根としたとき，$L(\boldsymbol{x};\theta)$ は $\theta<\hat{\theta}$ で正，$\theta>\hat{\theta}$ で負．

Godambe (1960) は不偏な推定関数 $g(\boldsymbol{x};\theta)$ について一つの criterion

$$M(g(\boldsymbol{x};\ \theta))=V(g(\boldsymbol{x};\ \theta))/E(g'(\boldsymbol{x};\ \theta))^2$$

を導入した．そして尤度推定関数が criterion $M(\cdot)$ を最小にするという意味で最適であることを示した．

### 3. 研究の方法

モーメント法を拡張するために次の方法で研究を行なっている．

a) 関心のある母数を簡単な低次のモーメントからなる方程式の解として与える．
b) 低次のモーメントに不偏な標本モーメントを代入して推定関数を得る．
c) 推定関数の良さを Godambe の規準で評価する．

更に次の方針も採用している．

d) すべての母数を推定する．
e) 対応する検定をも導出する．
f) 特定の分布族を仮定する．真の分布はその分布族に近い．

### 4. 研究の成果

イ) Mantel-Haenszel 推定量の最適性を与えた．また Mantel 検定との関連を与えた．
イ′) オッズ比が canonical link として現われることを指摘して，負の2項分布での同様の推定量，検定量が構成できることを示した．
ロ) 二つの指数分布の平均の比 $\theta=\lambda_1/\lambda_2$ の推測では

$$(m-1/m)(\bar{x}/\bar{y})-\theta=0$$

よりも

$$\bar{x}-\theta\bar{y}=0$$

が良い．
ハ) 変動係数 $\theta=\sigma^2/\mu^2$ の推定では

$$\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)-\theta\{\bar{x}^2-\sum(x_i-\bar{x})^2/n(n-1)\}=0$$

を根として推定する．

等が得られる．

## 参 考 文 献

Godambe, V.P. (1960). An optimum property of regular maximum likelihood estimation, *Ann. Math. Statist.*, **31**, 1208-1211.

# 生存競争系の確率微分方程式と保存量

伊 藤 栄 明

箱1，箱2，箱3という3つの箱を考える．(1は紙，2は鋏，3は石を表す．) それぞれに $n_1$, $n_2$, $n_3$ 個の粒子がはいっていたとする．$n$ 個の粒子には1から $n$ まで番号がふってあり，単位時間内にランダムに2つの粒子を指定する．指定された2つが1と2にはいっていたとすれば指定された1の粒子が2に移るものとする．2と3なら2から3に，3と1なら3から1に移動がおきるとする．1と1，2と2，3と