Massachusetts.
Tsuchiya, T. (1989). Global convergence property of the affine scaling methods for primal degenerate linear programming problems, Research Memo., No. 367, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo (to appear in *Math. Oper. Res.*).
Tsuchiya, T. (1990). Global convergence of the affine scaling methods for degenerate linear programming problems, Research Memo., No. 373, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
Vanderbei, R.J., Meketon, M.S. and Freedman, B.A. (1986). A modification of Karmarkar's linear programming algorithm, *Algorithmica*, **1**, 395-407.

Centered Newton Method for Nonlinear Programming

田 辺 國 士

外点法による線形計画問題の一解法として中心化ニュートン法を先に提案したが，ここではこれを非線形計画問題の解法に拡張する．この反復解法は，ほとんど任意の初期値から反復を開始することができ，内点法における初期値設定の困難を解消することができる．

次の非線形計画問題を考える．

問題． 条件 $g_1(\boldsymbol{x})\leqq 0,\ g_2(\boldsymbol{x})\leqq 0,\dots,\ g_m(\boldsymbol{x})\leqq 0$ のもとで $f(\boldsymbol{x})$ を最小化せよ．

ただし，$\boldsymbol{x}$ は n-項列（位置）ベクトルとし，$f(\boldsymbol{x}),\ g_i(\boldsymbol{x})$ は十分滑らかな関数とする．また，条件を満足する可能集合は空でないと仮定する．この問題を解くためには連立非線形方程式・不等式系

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{J}^t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}+\nabla f(\boldsymbol{x})\\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}\\ [\boldsymbol{y}]\boldsymbol{z}\end{pmatrix}=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{y}\geqq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}\geqq\boldsymbol{0} \tag{1}$$

を解くことが必要である．ただし，$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=(g_1(\boldsymbol{x}),\ g_2(\boldsymbol{x}),\dots,\ g_m(\boldsymbol{x}))^t$ は $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^m$ への写像とし，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ は写像 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ のヤコビ行列とし，$[\boldsymbol{y}]$ は $\boldsymbol{y}$ の要素と(順序をふくめて)同じ要素をもつ対角行列とし，$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ は m-項列ベクトルとする．$\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m_+\times\boldsymbol{R}^m_+$ から $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^m_+$ への写像 $\boldsymbol{\Phi}$ をこの問題の中心平坦化写像とよぶ．中心多様体（曲線） $\boldsymbol{C}$ を線形集合 $\boldsymbol{D}=\{(0,\ 0,\ u):\ u_1=\cdots=u_m\geqq 0\}$ の写像 $\boldsymbol{\Phi}$ による原像 $\boldsymbol{C}\equiv\boldsymbol{\Phi}^{-1}(\boldsymbol{D})$ と定義し，中心化ニュートン法をこの系に適用すると，中心化ニュートンベクトル $\boldsymbol{\Delta}_\rho\equiv\boldsymbol{\Delta}_\rho(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})\equiv(\boldsymbol{\Delta x},\ \boldsymbol{\Delta y},\ \boldsymbol{\Delta z})$ が連立一次方程式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) & \boldsymbol{J}^t(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{0} & [\boldsymbol{z}] & [\boldsymbol{y}]\end{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}_\rho=-\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})+\rho\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \sigma\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$$

の解として決定される．ただし $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\nabla^2 f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^m y_i\nabla^2 g_i(\boldsymbol{x})$ はラグランジュ関数のヘッセ行列とし，u_i はベクトル $\boldsymbol{u}$ の第 i 要素とし，$\sigma=(y_1z_1+\cdots+y_mz_m)/m$, $\boldsymbol{1}$ は全ての要素が 1 である m-項列ベクトルとし，$(\boldsymbol{x}^t,\ \boldsymbol{y}^t,\ \boldsymbol{z}^t)^t$ を $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ などと略記する．このとき $\boldsymbol{\Delta}_0$ はニュートンベクトル，$\boldsymbol{\Delta}_1$ は中心化ベクトルであり，$\boldsymbol{\Delta}_\rho=(1-\rho)\boldsymbol{\Delta}_0+\rho\boldsymbol{\Delta}_1$ となる．「中心化ニュートンベクトルが定めるベクトル場はどのようなものであろうか」という問題を考察しよう．$(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{y}^0,\ \boldsymbol{z}^0)$ を初期値とする自励系 $d(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})/dt=\boldsymbol{\Delta}_\rho(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})$ の解を $(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{z}(t))$ $(0\leqq t<M)$ と記すとき，次の定理が成り立つ．

定理． 任意の $\boldsymbol{x}^0$, 非負条件を満たす任意の $\boldsymbol{y}^0>0,\ \boldsymbol{z}^0>0$ に対して自励系の解が $0\leqq t<M$ で存在して，次の第一積分が成り立ち，これにより解曲線が定まる．

$$\boldsymbol{J}^t(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{y}(t)+\nabla f(\boldsymbol{x}(t))=e^{-t}\{\boldsymbol{J}^t(\boldsymbol{x}^0)\boldsymbol{y}^0+\nabla f(\boldsymbol{x}^0)\},$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{z}(t)=e^{-t}\{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0)+\boldsymbol{z}^0\},$$

$$y_i(t)z_i(t)-y_j(t)z_j(t)=e^{-t}(y_i^0z_i^0-y_j^0z_j^0)\ (i,\ j=1,\dots,m),$$

$$y_1(t)z_1(t)+\cdots+y_m(t)z_m(t)=e^{-(1-\rho)t}(y_1^0z_1^0+\cdots+y_m^0z_m^0)$$

解曲線が自励系の特異集合に近づかなければ $\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t)$ は非線形計画問題の Kuhn-Tucker 点である．

外点法的中心化ニュートン法のアルゴリズム：定理の条件を満たす任意の初期値から出発して，反復公式：

$$(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1},\ \boldsymbol{z}^{k+1})=(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{z}^k)+\alpha\boldsymbol{\Delta}_0(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{z}^k)+\beta\boldsymbol{\Delta}_1(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{z}^k)$$

によって系列 $\{(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成する．ステップ巾 α,β は，条件

$$\boldsymbol{y}^{k+1}>0,\qquad \boldsymbol{z}^{k+1}>0,\qquad 0<\alpha\leqq 1,\qquad 0\leqq\beta,$$

$$\mu(\boldsymbol{x}^{k+1},\ \boldsymbol{y}^{k+1},\ \boldsymbol{z}^{k+1})<(1-\delta)\mu(\boldsymbol{x}^k,\ \boldsymbol{y}^k,\ \boldsymbol{z}^k)$$

を満たす組み合せの中で α の値が(実際計算においては近似的に)最大になるように選ぶ．ただし，δ は小さな正数とし，

$$\log\mu(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})\equiv(\omega/m)\log\left\{\left(\sum_{i=1}^m y_iz_i\right)^m\Big/\left(\prod_{i=1}^m y_iz_i\right)\right\}$$
$$+\log\left(\|\boldsymbol{J}^t(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}+\nabla f(\boldsymbol{x})\|_1+\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}\|_1+y_1z_1+\cdots+y_nz_n\right)$$

とし，$\|\cdot\|_1$ は 1-ノルムとし，ω は適当な正数とする．

参 考 文 献

Tanabe, K. (1987a). Centered Newton method for linear programming and quadratic programming, *Proceedings of the 8th Mathematical Programming Symposium, Japan,* 131-152.

Tanabe, K. (1987b). Complementality-enforcing centered Newton method for mathematical programming: Global method, ISM Cooperative Research Report, **5**, 118-144.

Tanabe, K. (1988a). Centered Newton method for mathematical programming, *System Modelling and Optimization* (eds. M. Iri and K. Yajima), 197-206, Springer, Berlin.

Tanabe, K. (1988b). Algorithms for computing search directions of the interior point methods for linear programming, ISM Cooperative Research Report, **10**, 121-128.

田辺國士 (1989a). 中心化ニュートン法，オペレーションズ・リサーチ，**3**, 135-138.

田辺國士 (1989b). Centered Newton method for linear programming: Exterior point method, 統計数理，**37**, 146-148.

センタード・ニュートン法のインプリメンテイションについて

荒 畑 恵美子

連立非線形方程式を

$$\begin{cases} f_1(z)=0\\ f_2(z)=0\\ \quad\vdots\\ f_n(z)=0\end{cases}$$

とする（但し，$z\in R^n$ とする)．これを次のようにして解く．

計算手順

1．関数 $f_i(z)$ が与えられたとき，それを正規化した $r_i(z)=f_i(z)/\|f_i(z)\|^{1/2}$ を計算する．