十分統計量は (T, U), θ の MLE は T, U は補助統計量である．(x, y) における肥沃度を $f(x, y)$, θ を水位とすると，再配分は U を用いればよい．U が与えられた条件の下で T の条件付分布で θ の推論を行えばよい．

θ の MLE は標本の全情報を持たないが，その回復は補助統計量によって部分的になされるという筋書きで，この一例はナイル河問題のあてはまりが極めてよい．不完備なモデルであるが故に不偏推定量を定める問題 (Sibuya (1977)) の例や補助統計量の役割を示す例として，また母数間に関数関係のある問題の推測の例として等々，多くの統計学の理論の展開に利用されてきた．しかしナイル河問題で何を主張したかったのか．Tan (1973, 1983), Barnard and Sprott (1983) 等は補助統計量をみつけることが問題であると述べている．Iwase and Setô (1986), Joshi and Nabar (1987), Kariya (1989)等は上の一例の θ を推定する問題として扱っている．

標題に関した今年度の研究では，この問題の経緯について調べ，上記モデルを一般化し，その母数の推定についていくつかの知見を得た．

参 考 文 献

Barnard, G.A. and Sprott, D.A. (1983). The generalised problem of the Nile: Robust confidence sets for parametric functions, *Ann. Statist.*, **11**, 104-113.

Fisher, R.A. (1956). *Statistical Methods and Scientific Inference*, Oliver and Boyd, Edinburgh. (1959年の 2nd ed. の訳書，『統計的方法と科学的推論』，渋谷・竹内訳，岩波書店).

Iwase, K. and Setô, N. (1986). Incomplete sufficient unbiased estimators in the problem of the Nile, *Comm. Statist. Theory Methods*, **15**, 279-289.

Joshi, S. and Nabar, S. (1987). Estimation of the parameter in the problem of the Nile, *Comm. Statist. Theory Methods*, **16**, 3149-3156.

Kariya, T. (1989). Equivariant estimation in a model with an ancillary statistic, *Ann. Statist.*, **17**, 920-928.

Sibuya, M. (1977). 不完備十分・不偏推定量，シンポジウム「不偏推定量の現段階」のレジュメ．

Tan, P. (1973). On Fisher's problem of the Nile in uncertain inference, *Comm. Statist. Theory Methods*, **2**, 45-58.

Tan, P. (1983). Fisher's problem of the Nile, *Encyclopedia of Statistical Sciences* (eds. S. Kotz and N.L. Johnson), Vol. 3, 128-130, Wiley, New York.

ブートストラップ信頼区間の構成

小 西 貞 則

観測されたデータに基づいて，母集団の特性を数値的に探る一つの統計的手法がブートストラップ法である．この手法の特徴は，極めて緩やかな仮定のもとでより複雑な問題を取り扱える点にある．ここでは，ブートストラップ法に基づいて信頼区間を構成する問題を，ノンパラメトリックなモデルのもとで理論的に検討し，手法の持ついくつかの性質および特徴を明らかにした．

いま未知の確率分布 F からの n 個の無作為標本に基づく推定量 $\hat{\theta}$ を用いて，パラメータ θ を推定する．ここで，経験分布関数 $\hat{F}$ に対して，$\theta=T(F)$ および $\hat{\theta}=T(\hat{F})$ となる汎関数 T が存在するものと仮定する．いま θ^* を $\hat{F}$ からのブートストラップ標本に基づく推定量とし，その分布関数を $\hat{G}(x)=P(\hat{\theta}^*<x)$ と置く．$\hat{G}(x)$ の分布を理論的に導くことができる場合はまれで，これを数値的に近似するための計算法がブートストラップ法といえる．最も基本的な形の信頼係数 $1-2\alpha$ の信頼区間は $[\hat{G}^{-1}(\alpha), \hat{G}^{-1}(1-\alpha)]$ で与えられる．

ブートストラップ法の理論的研究が進み，より精度の高い信頼区間を構成するには，推定量の分布の偏りと歪の補正が必要であることが指摘された．これに答えて Efron (1987)は，これらの修正を施したいわゆる BC_a 法と呼ばれるブートストラップ信頼区間を提唱した．実際，提唱された方法は，

$$\{g(\hat{\theta})-g(\theta)\}/\{1+ag(\theta)\}+z$$

が漸近的に平均0，分散1の正規分布にしたがうような変換gの存在の上に構成された．一母数モデル(Efron (1987))，推定量が標本平均ベクトルの滑らかな関数として表わされるモデル（Hall (1988)）において，$\mathrm{BC_a}$信頼区間の良さが証明された．この良さは一般に二次の精度を持つといわれ，次のように定義される．すなわち，信頼係数$1-2\alpha$の精密な信頼限界を$\theta_{EX}[\alpha]$，これに対して$\mathrm{BC_a}$法に基づく信頼限界を$\theta_{BC}[\alpha]$とすると

$$\theta_{BC}[\alpha]-\theta_{EX}[\alpha]=O_p(n^{-3/2}) \qquad \text{または} \qquad P(\theta<\theta_{BC}[\alpha])=\alpha+O(n^{-1})$$

となるときと定義する．

本研究では，ノンパラメトリックなモデルのもとで統計的汎関数のテーラー展開に基づくEdgeworth近似を用いて，(1) 変換形を分散安定化変換と正規化変換の合成関数として構成し，(2) 偏りと歪の修正項a, zの推定方法を与え，(3) $\mathrm{BC_a}$区間推定が二次の精度を持つことを証明した．この結果をパラメトリックなモデルのもとで適用すると，変換に基づく区間推定の問題を統一的に扱うことができた．さらに，多変量解析における推測問題に適用し，二次の精度を持つことが保証される信頼区間を構成することができた．

参考文献

Efron, B. (1987). Better bootstrap confidence intervals, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 171-200.
Hall, P. (1988). Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals, *Ann. Statist.*, **16**, 927-985.

最尤法による空間点配置などのフラクタル次元の推定

尾 形 良 彦

空間における自己相似なランダム図形のフラクタル次元を求めるには，通常以下のような二対の量の両対数グラフのプロットが直線上に並んでいるのを確認し，その傾きを測ることが主である．まずbox-counting法と呼ばれるもので，空間を正方形のピクセルに分割したとき，図形と交わっているピクセルの数とそのときのピクセルの一辺の長さとの対をプロットするものがある．次によく使われているのはwalking-divider法と呼ばれるもので，連続な線などの長さをディバイダーによって測るとき，ディバイダーの幅と測られた線の長さの対をプロットするものである．Mandelbrotの本にこれらの例が載って以来，自然科学の多くの分野でこれらの方法に基づく論文や報告が頻出している．

以上の方法以外に，確率場（多次元確率過程）の自己相関やスペクトルによる方法も以前から報告されている．もしランダム図形が自己相似ならば自己相関関数やスペクトルが逆ベキの減衰を示すので，両対数表示によってその傾きを求める．軌跡が一次元確率過程ならばこれは非常に容易である．例えば，Ogata and Abe (1988) は世界と日本における長期間の地震活動が時間に関してほぼ自己相似であることを，Palm-intensity (自己相関と同値)，スペクトル，dispersion-time-diagram，そしてR/S統計量によって示した．特にピリオドグラムに基づく尤度を考えてフラクタル次元（またはHurst数）の最尤推定値を求めると，それぞれどの方法から求められる推定値に対しても調和的なものであることが認められた．

一般に最尤法は客観的な推定法であるだけでなく，限られたデータでも効率的な推定量を与えることが期待されており，推定値の誤差も見積ることが容易であるので，空間のフラクタル図形に対しても適用できることが望まれる．本報告では，平面上の点配置や線図形の集合に対する最尤法を開発したことを述べた．すなわち，以下に示す二種類の尤度が近似的な意味で定義される．一つはPalm確率測度に対応する点配置を原点からの距離にのみ依存する非一様(non-homogeneous) Poisson点過程と仮定して，このintensityをパラメタ化して尤度を考える．2次元空間内の配置のフラクタル次元をDとするとき