統計数理（1990）
第38巻 第1号 47-60

非可換解析学と相対エントロピー

統計数理研究所　吉　田　裕　亮

（1989年10月　受付）

1. はじめに

1920年代後半，量子力学が誕生し，それはその後の数学に非常に大きな影響をおよぼした．作用素環論は，その最たるものといえる．量子化ということを数学的に定式化，あるいは基礎付けるためにvon Neumannはヒルベルト空間上の作用素の研究を行なった．この一連の研究の中で作用素環論がはじめて登場し，これらの成果の下で1932年に，有名な「量子力学の数学的基礎」が世に出た．このように作用素環論は量子力学を数学的に基礎付けるために生れてきた分野とも考えることができる．

さて表題に用いた，非可換解析学とは一体どのような分野なのかという疑問が生じるだろうが，いまでは量子化された世界を記述する解析学といった意味で，多くの分野にまたがった概念だと解釈しておいた方がよいと思われる．しかし，量子化を数学的に定式化する過程で現われた作用素環論は，今日でも最も本質的な非可換解析学の地位を占めている．

C^*環やフォン・ノイマン環の総称として作用素環という用語を用いることも多いが，ここでは主にフォン・ノイマン環を扱うことにする．可換なフォン・ノイマン環の関数空間への表現を考慮すれば，一般に可換とは限らないフォン・ノイマン環を扱うことは量子化された測度空間を考察するのに対応していることがわかる．さらに，特に有限型と呼ばれるフォン・ノイマン環は量子化された確率空間，非可換確率空間に対応していることもわかるであろう．

ここでは，主として有限型フォン・ノイマン環上にPimsner and Popa（1986）によって導入された相対エントロピーに関しての研究詳解を行なう．まず，この相対エントロピーが古典的，すなわち，確率論での相対エントロピーの拡張になっていることを見て，その値の評価に有用な幾つかの手法や公式を導く．それらの応用として，特にII_1型因子環と呼ばれる有限型フォン・ノイマン環への有限群の作用と相対エントロピーの関係を作用の不動点環を用いて考察する．さらに，具体的な有限群について，その作用の共役類をグラフィカルに表示する例を見ることにする．

作用素環論の用語は，まだまだ一般的なものとはなっていない．そこで，まずはじめは，この詳解で必要とされる作用素環論の用語や概念の準備を確率論と対比しながら始めていくことにする．

2. 有限型フォン・ノイマン環と条件付き期待値

まずはじめに，有限型フォン・ノイマン環とは何であるか，確率空間の非可換への拡張（量子化）といわれるのは何故か，そのあたりから見ていくことにする．

内積$(\cdot|\cdot)$をもつ複素ベクトル空間$\mathfrak{H}$が，その内積から誘導されるノルム$\|\xi\|=(\xi|\xi)^{1/2}$に関して完備であるとき$\mathfrak{H}$を複素ヒルベルト空間という．

有限次元ヒルベルト空間はベクトル空間として $\boldsymbol{C}^n$ と同型であるので，ヒルベルト空間は $\boldsymbol{C}^n$ のもつ複素ベクトル空間の構造を無限次元も含むように拡張したものであるといえる．無限次元のヒルベルト空間にも正規直交基底が存在するが，基底の濃度が高々可算であるとき，ヒルベルト空間は可分であるという．以降，ここで扱うヒルベルト空間は可分であるものとする．

ヒルベルト空間からそれ自身への線形写像を作用素という．有限次元ヒルベルト空間は $\boldsymbol{C}^n$ と同型なので，この同型を通して作用素は $n\times n$ の行列と同一視可能であり，この場合作用素は自動的に連続になる．一方，無限次元になると，連続な作用素と連続でない作用素がある．しかし，線形性により，連続であることと有界であることとは，同値となる．ここで，作用素 x が有界であるとは

$$\|x\|=\sup\{\|x\xi\|:\|\xi\|\leqq 1\}<\infty \tag{2.1}$$

が成り立つことである．以下，ヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ 上の有界線形作用素の全体を $B(\mathfrak{H})$ で表わすことにする．

$B(\mathfrak{H})$ には，作用素の通常の和，積，スカラー倍のほかに

$$(x\xi\mid\eta)=(\xi\mid x^*\eta),\qquad \xi,\eta\in\mathfrak{H} \tag{2.2}$$

で定義される $*$-演算 $x\mapsto x^*$ がある．$*$-演算は行列の転置共役にあたる．$B(\mathfrak{H})$ の部分集合で通常の演算および $*$-演算で閉じたものを $*$-代数という．

$B(\mathfrak{H})$ には先のノルム $\|\ \|$ から定まるノルム位相のほかにセミノルム系を用いたいろいろな位相が考えられるが，$*$-代数を考えるには次の弱位相を考えておけばよい．すなわち，弱位相とは $\mathfrak{H}$ の任意の 2 元 ξ, η に対して，$B(\mathfrak{H})$ 上の関数 $x\mapsto|(x\xi,\eta)|$ が連続となる最も弱い位相である．これは行列でいえば，弱収束とは成分毎に収束することを意味する．

$B(\mathfrak{H})$ の部分 $*$-代数のうち，弱位相で閉じていて，恒等作用素を含むものをフォン・ノイマン環あるいは W^* 環という．フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ に対し $\mathscr{M}'=\{x\in B(\mathfrak{H}):\ xy=yx, y\in\mathscr{M}\}$ を $\mathscr{M}$ の可換子環という．$*$-代数 $\mathscr{M}$ がフォン・ノイマン環であることと，$\mathscr{M}=(\mathscr{M}')'$ とは同値である(第二可換子定理)．このように作用素環論の結果は代数的な結果が多いが，その証明は非常に解析的に行なわれる．

$\mathscr{M}$ のすべてと交換可能な元の全体 $\mathscr{M}\cap\mathscr{M}'$ を $\mathscr{M}$ の中心といい，$Z(\mathscr{M})$ と書く．この中心が恒等作用素のスカラー倍だけからなるフォン・ノイマン環を因子環，あるいはファクターという．行列環 $M_n(\boldsymbol{C})$ は有限次元の因子環である．また，後に見るように，この因子環がフォン・ノイマン環の最小構成単位となる．

さて，$B(\mathfrak{H})$ の部分 $*$-代数のうち，ノルム位相で閉じているものを C^* 環という．もちろん，フォン・ノイマン環は C^* 環になる．実は，可換 C^* 環は，以下のように連続関数環として表現可能である．

局所コンパクト Hausdorff 空間 Ω 上の無限遠で 0 となる複素数値連続関数の全体 $C_\infty(\Omega)$ は，関数の各点和，積，スカラー倍および複素共役 $f^*(\omega)=\overline{f(\omega)}$ なる $*$-演算とノルム

$$\|f\|=\sup\{|f(\omega)|:\ \omega\in\Omega\} \tag{2.3}$$

の下で可換 C^* 環となる．逆にゲルファント (Gelfand) 表現によって，可換 C^* 環はある局所コンパクト空間 Ω 上の $C_\infty(\Omega)$ と同型になり，C^* 環が単位元をもつことと Ω がコンパクトであることが同値であり，さらに $C_\infty(\Omega_1)$ と $C_\infty(\Omega_2)$ が同型であることと Ω_1 と Ω_2 が同相であることが同値である．すなわち，ゲルファント表現を通して，可換 C^* 環の研究と局所コンパクト

空間の研究は同値であることがわかる．

また可換フォン・ノイマン環の場合には，先の Ω としては，超ストーン空間（正規なラドン測度が十分たくさん存在するストーン空間）が対応し，さらに議論を進めることにより，ある局所コンパクト Hausdorff 空間 Γ と Γ 上の正値ラドン測度 μ が存在し，測度空間 (Γ, μ) 上の関数環 $L^\infty(\Gamma, \mu)$ と同型になることがわかる．ここで $L^\infty(\Gamma, \mu)$ とは，本質的に有界な μ-可測関数全体のなす関数環である．すなわち，Γ 上で，ほとんど至るところ $|f(\omega)| \leqq \alpha$ となる正の数 α が存在するとき，$f(\omega)$ は本質的に有界であるといい，このような α の下限を f の本質的上限といい，$\|f\|_\infty$ と表わす．したがって $L^\infty(\Gamma, \mu)$ とは $\|f\|_\infty < \infty$ となる可測関数の全体である．もちろん，ほとんど等しい関数は同じ関数と考える．

これらより，可換 C^* 環の研究は局所コンパクト Hausdorff 空間に，可換フォン・ノイマン環の研究は測度空間の研究に，それぞれ対応することがわかるであろう．

一般のフォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ に対して，その中心 $Z(\mathscr{M}) = \mathscr{M} \cap \mathscr{M}'$ は可換フォン・ノイマン環なので，ある測度空間 (Γ, μ) が対応し $Z(\mathscr{M}) \cong L^\infty(\Gamma, \mu)$ となる．これに付随して

$$\mathscr{M} \cong \int_\Gamma^\oplus \mathscr{M}(\gamma) d\mu(\gamma) \tag{2.4}$$

と，因子環 $\mathscr{M}(\gamma)$ の直積分に分解される．つまり因子環はフォン・ノイマン環の最小構成の単位であるといえる．ここで直積分とは，直和の連続版とでも考えて頂いて差し支えない．

$p^2 = p$, $p^* = p$ なる作用素 p を射影作用素，あるいは射影子という．フォン・ノイマン環には十分多くの射影作用素があり，フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ は，その射影作用素全体 $\mathscr{M}^p$ で生成される．すなわち，$\mathscr{M} = (\mathscr{M}^p)''$ である．

フォン・ノイマン環はその射影作用素によって幾つかの型に分類されるが，ここで扱うフォン・ノイマン環は，特に有限型のみであるので詳しい型の分類の議論は避け，有限型の特徴付けだけを行なうことにする．

フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ が有限型のフォン・ノイマン環であるとは，$\mathscr{M}$ 上に線形汎関数 τ が存在し，次の条件

$$\tau(h) \geqq 0 \quad (h \in \mathscr{M}^+), \qquad \tau(1) = 1 \tag{2.5}$$

$$\tau(x^*x) = \tau(xx^*) \tag{2.6}$$

を満たすときをいう．また，このような線形汎関数 τ をトレースという．

ただし，(2.5) の $\mathscr{M}^+$ とは $\mathscr{M}$ の正値エルミート作用素全体を意味する．すなわち，$h \in \mathscr{M}^+$ であるとは，$\mathscr{M}$ のある元 y が存在して $h = y^*y$ とできることである．一般のフォン・ノイマン環では，恒等作用素 1 のトレースの値が有限値になるとは限らないが，有限型と呼ばれる所以は (2.5) のように恒等作用素 1 のトレースの値が有限値（通常は 1 に規格化しておく）となるところにある．

また，トレース τ が正規であるとは $x_\alpha \nearrow x$ $(x_\alpha \in \mathscr{M}^+)$ ならば常に $\tau(x_\alpha) \nearrow \tau(x)$ を満たすことであり，トレース τ が忠実であるとは $\tau(x^*x) = 0$ ならば常に $x = 0$ が成り立つときをいう．

有限次行列環 $M_n(\boldsymbol{C})$ は有限型因子環であるが，このように有限次行列環 $M_n(\boldsymbol{C})$ に同型な因子環を I_n 型因子環という．そうでないような有限型因子環を II_1 型因子環という．

有限型因子環においては規格化されたトレース τ は，ただひとつ存在する．この τ を用いて $\mathscr{M}$ 上に新しいノルム $\| \ \|_2$ が $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{1/2}$ $(x \in \mathscr{M})$ で定義される．$\mathscr{M}$ はノルム $\| \ \|_2$ に関して，前ヒルベルト空間となる．

$\mathscr{M}$ を II_1 型因子環とする．任意の正の数 ε と，$\mathscr{M}$ の任意の有限個の元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して，$\mathscr{M}$ の中に有限次元の $*$-部分代数 $\mathscr{N}$ と $\mathscr{N}$ に属す元 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ が存在して $\| x_i - y_i \|_2 < \varepsilon$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ とできるならば，$\mathscr{M}$ は超有限型(hyperfinite)であるという．超有限 II_1 型因子環は，同型を除いて，ただひとつ存在することが知られている．ここでは，超有限 II_1 型因子環は $\mathscr{R}$ と書くことにする．

$\mathscr{M}$ を II_1 型因子環，n を任意の自然数とすると，$\mathscr{M}$ には I_n 型因子環が部分因子環として含まれることがわかり，また任意の II_1 型因子環 $\mathscr{M}$ は，超有限 II_1 型因子環 $\mathscr{R}$ を部分因子環としてもつ．つまり，超有限 II_1 型因子環 $\mathscr{R}$ は，II_1 型因子環で最小のものである．実際，超有限 II_1 型因子環 $\mathscr{R}$ は，有限次行列環 $M_n(\boldsymbol{C})$ の無限テンソル積で構成することができる．

さて，ここで確率論との関係を簡単に見ておくことにする．

確率空間を $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ とし，その上の $L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ を考える．これには各点毎の和，積，スカラー倍および複素共役をとる $*$-演算で $*$-代数の構造が入る．実は，この関数環はヒルベルト空間 $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の可換なフォン・ノイマン環と見ることができる．すべての $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ に対してヒルベルト空間 $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の有界線形作用素 T_f が

$$(T_f \xi)(\omega) = f(\omega)\xi(\omega), \quad \xi \in L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu) \tag{2.7}$$

によって対応する．$\mathscr{A}(\Omega) = \{T_f ;\ f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)\}$ とおくと，$\mathscr{A}(\Omega)$ は $L^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ 上の可換なフォン・ノイマン環となり，$L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ と $\mathscr{A}(\Omega)$ とは，対応 $f \mapsto T_f$ によって $*$-同型となる．さらに

$$\tau(T_f) = \int_\Omega f(\omega) d\mu(\omega) \tag{2.8}$$

とおくと τ は $\mathscr{A}(\Omega)$ 上の有限な忠実，正規トレースとなる．対応 $f \mapsto T_f$ によって Ω 上の μ による積分は $\mathscr{A}(\Omega)$ 上の τ による値の評価と一致する．

また，完全加法族 $\mathfrak{B}$ に属す各集合 E の特性関数 χ_E を考えると，これは先の対応により $\mathscr{A}(\Omega)$ の元と見れば，射影作用素になっているのは明らかである．すなわち，フォン・ノイマン環の射影作用素の全体は，確率空間の完全加法族 $\mathfrak{B}$ に対応する．

ところで，次に確率論における条件付き期待値を見て，これと今までのことを踏まえてフォン・ノイマン環へ条件付き期待値を拡張するとどうなるかを見る．$\mathfrak{B}_0$ を $\mathfrak{B}$ の部分完全加法族とする．$L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}_0, \mu)$ で $\mathfrak{B}_0$-可測な $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ の全体とする．ここで $f \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ を取る．このとき，任意の $E \in \mathfrak{B}_0$ に対して，Radon-Nikodym の定理により

$$\int_E f_0(\omega) d\mu(\omega) = \int_E f(\omega) d\mu(\omega) \tag{2.9}$$

となる $f_0 \in L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}_0, \mu)$ が f にのみ依存して，μ-測度0集合を除いて一意に定まる．そのひとつを $f' = E(f \mid \mathfrak{B}_0)$ とおき，f の $\mathfrak{B}_0$ に関する条件付き期待値という．この対応 $f \mapsto E(f \mid \mathfrak{B}_0)$ は，$L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ をその部分環 $L^\infty(\Omega, \mathfrak{B}_0, \mu)$ の上に線形に写し，いろいろな代数的な性質をもっている．この概念は，以下のようにフォン・ノイマン環に拡張することができる．

$\mathscr{M}$ を有限型フォン・ノイマン環とし，その上の忠実，正規トレースを τ とする．ただし，τ は $\tau(1)=1$ と規格化しておく．$\mathscr{N}$ を $\mathscr{M}$ の部分フォン・ノイマン環とする．このとき，任意の $x \in \mathscr{M}$ と任意の $y \in \mathscr{N}$ に対して，条件

$$\tau(E(x)y) = \tau(xy) \tag{2.10}$$

を満たす$\mathscr{M}$から$\mathscr{N}$への線形写像Eがトレースτに依存して，一意に定まる．この線形写像Eを$\mathscr{M}$から$\mathscr{N}$へのτ-不変な条件付き期待値といい，$E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}$と表わす．特に，$\mathscr{M}$が明らかな場合には，単に$E_{\mathscr{N}}$と書く．もちろん，確率論の方でも条件付き期待値は，測度μに依存していたわけである．

(2.9)と(2.10)が同じ意味をもっている式であることに気付くはずであろう．これには先に述べた幾つかの点に注目しなければならない．つまり，確率空間の方で積分することは，フォン・ノイマン環の方でいえばトレースで評価することに他ならないということ，フォン・ノイマン環はその射影作用素全体で生成され，射影作用素全体は確率空間の完全加法族に対応していることである．すなわち，(2.9)で積分域を任意の$E\in\mathfrak{B}_0$に制限することは，(2.10)式において任意の$y\in\mathscr{N}$を掛けてからトレースの値を評価することに相当する．

このτ-不変な条件付き期待値$E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}$は，以下のような代数的な性質をもっている．

(2.11) $$E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(axb)=aE_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x)b,\quad x\in\mathscr{M},\quad a,b\in\mathscr{N}$$

(2.12) $$E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x^*)=E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x)^*,\quad x\in\mathscr{M}$$

(2.13) $$E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x^*)E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x)\leqq E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x^*x),\quad E_{\mathscr{N}}^{\mathscr{M}}(x^*x)=0\ \text{ならば}\ x=0$$

有限型フォン・ノイマン環においては，任意の部分フォン・ノイマン環への条件付き期待値が存在することが知られている．確率論で条件付き期待値が数々の極限定理に重要な働きをしたのと同様に，フォン・ノイマン環においても条件付き期待値の存在が環の構造を調べることに大きく役立つ．

3. 相対エントロピー

$\mathscr{M}$を可分なヒルベルト空間上の有限型フォン・ノイマン環とし，その忠実，正規，規格化されたトレースをτとする．また，$\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$を$\mathscr{M}$の部分フォン・ノイマン環とする．このとき，Pimsner and Popa (1986) は$\mathscr{N}_1$の$\mathscr{N}_2$に関する相対エントロピー$H(\mathscr{N}_1|\mathscr{N}_2)$を Connes and Størmer (1975) が定義した相対エントロピーを元に導入した．以下に，その定義を述べることにする．

$E_{\mathscr{N}_i}$はそれぞれ$\mathscr{M}$から$\mathscr{N}_i$ $(i=1,2)$へのτ-不変な条件付き期待値を表わすものとする．また，$S(\mathscr{M})$でもって$\mathscr{M}$の単位の有限分割全体の集合を表わすものとする．すなわち，

(3.1) $$S(\mathscr{M})=\left\{\varDelta=(x_i)_{i\in I};\ x_i\in\mathscr{M}^+,\ \sum_{i\in I}x_i=1,\ \text{ただし}\ I\ \text{は有限集合}\right\}$$

である．このとき$\mathscr{N}_1$の$\mathscr{N}_2$に関する相対エントロピー$H(\mathscr{N}_1|\mathscr{N}_2)$は

(3.2) $$H(\mathscr{N}_1|\mathscr{N}_2)=\sup_{\varDelta\in S(\mathscr{M})}\sum_i(\tau\eta E_{\mathscr{N}_1}(x_i)-\tau\eta E_{\mathscr{N}_2}(x_i))$$

と定義される．

ここでηは$\eta(t)=-t\log t$ $(t>0)$, $\eta(0)=0$で定義される$[0,\infty]$上の連続関数である．特に，$\mathscr{N}_2$が$\boldsymbol{C}$のときは，$H(\mathscr{N}_1|\boldsymbol{C})$を単に$\mathscr{N}_1$のエントロピーといい，$H(\mathscr{N}_1)$と書く．

ところで，$\mathscr{M}$が可換の場合には，$\mathscr{N}_1,\mathscr{N}_2$はある$\mathscr{M}$の単位の分割$P_1,P_2$から生成される$\mathscr{M}$の部分環であって，相対エントロピー$H(\mathscr{N}_1|\mathscr{N}_2)$は，古典的な相対エントロピー$h(P_1|P_2)$と一致する．このような意味で，いま定義した相対エントロピーは確率論でいうところの相対

エントロピーの拡張になっている.

もともと Connes and Størmer は，この相対エントロピーを非可換の Kolmogorov-Sinai 型の定理の証明の道具として用いた．また，彼等はこの相対エントロピーが2つの環の距離

$$(3.3) \qquad \delta(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) = \sup\{\|x - E_{\mathcal{N}_2}(x)\|_2;\ x \in \mathcal{N}_1,\ \|x\| \leqq 1\}$$

と両立する量であることを示している．しかし，ここでは2つの環 $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ の間に包含関係のある場合，すなわち $\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{N}_2$ の場合を考える．この場合には，相対エントロピー $H(\mathcal{N}_1 | \mathcal{N}_2)$ は，$\mathcal{N}_1$ の $\mathcal{N}_2$ に関する相対的な大きさ（サイズの比）を示す量として捉えることができる．以下，主として考察の対象とされるのは，$\mathcal{N}_1$ が $\mathcal{M}$ 自身で，$\mathcal{N}_2$ としては $\mathcal{M}$ の部分フォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ の場合である．すなわち，相対エントロピー

$$(3.4) \qquad H(\mathcal{M} | \mathcal{N}) = \sup_{\Delta \in S(\mathcal{M})} \sum_i (\tau\eta(x_i) - \tau\eta E_{\mathcal{N}}(x_i))$$

を考えることにする．

Pimsner and Popa は $\mathcal{M}$ が有限型因子環，$\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ の部分因子環の場合について，相対エントロピー $H(\mathcal{M} | \mathcal{N})$ の値を Jones (1983) の指数を用いて記述することに成功している．さらに Pimsner and Popa (1988), Popa (1989) 等では基本構成 (basic construction) の反復により作られる環の列に付随して得られる相対交換子環と相対エントロピーとの関係等についても興味深い結果を得ている．

ここでは，まず一般の有限型フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}$ とその部分フォン・ノイマン環 $\mathcal{N}$ の場合に，どのようにして $\mathcal{M}$ が因子環の場合に帰着されるかということ，および実際に相対エントロピー $H(\mathcal{M} | \mathcal{N})$ の評価を行なうときは，$\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への条件付き期待値の分解が重要であることを見る．つまり，一般に $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の間に部分フォン・ノイマン環 $\mathcal{L}$ を挟むと，相対エントロピーの定義より $H(\mathcal{M} | \mathcal{N}) \leqq H(\mathcal{M} | \mathcal{L}) + H(\mathcal{L} | \mathcal{N})$ となってしまうが，都合のよい部分フォン・ノイマン環を挟むことにより等号を成り立たせるようにするのである．このようにして，相対エントロピーの計算に有用な幾つかの公式を導く．

さて，相対エントロピーに関して次の事柄が成り立つことは比較的容易にわかる．$Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$ の射影子の族 $(p_i)_{i=1}^n$（ただし，$\sum_{i=1}^n p_i = 1$）に対して，

$$(3.5) \qquad H(\mathcal{M} | \mathcal{N}) = \sum_{i=1}^n \tau(p_i) H(\mathcal{M}_i | \mathcal{N}_i)$$

である．ただし，$\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i$ は，それぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ の射影子 p_i による被約フォン・ノイマン環であり $H(\mathcal{M}_i | \mathcal{N}_i)$ は $\mathcal{M}_i$ の被約トレースに付随した相対エントロピーである．ここで，$\mathcal{M}$ の射影子 $p \in \mathcal{M}$ による被約フォン・ノイマン環 $\mathcal{M}_p$ とは $p\mathcal{M}p = \{pxp;\ x \in \mathcal{M}\}$ をヒルベルト空間 $p\mathfrak{H}$ 上のフォン・ノイマン環と見たものである．また，その上の被約トレース τ_p とは $\tau_p(x) = \tau(pxp)/\tau(p)$ で定義される．

まずは，このことの一般化を考える．簡単のために，固定された $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ に対して $Z(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{N})$ を $\mathcal{Z}$ と表わすことにする．このときフォン・ノイマン環の還元理論により $\mathcal{M}$ の可換な部分環 $\mathcal{Z}$ に対応する確率空間 (Γ, μ) および μ-可測なフォン・ノイマン環のフィールド $\gamma \to \mathcal{M}(\gamma)$ と $\gamma \to \mathcal{N}(\gamma)$，忠実，正規，規格化された $\mathcal{M}(\gamma)$ のトレースのフィールド $\gamma \to \tau^\gamma$ が存在し，$\mathcal{M}$ から $\int_\Gamma^\oplus \mathcal{M}(\gamma) d\mu(\gamma)$ への同型は $\mathcal{N}$ を $\int_\Gamma^\oplus \mathcal{N}(\gamma) d\mu(\gamma)$ に写し，$\tau(x) =$

$\int_\Gamma \tau^\gamma(x(\gamma))d\mu(\gamma)$, ただし $x=\int_\Gamma^\oplus x(\gamma)d\mu(\gamma)\in\mathscr{M}$ となる．このとき μ-測度0集合を除く $\gamma\in\Gamma$ で相対エントロピー $H(\mathscr{M}(\gamma)\,|\,\mathscr{N}(\gamma))$ はトレース τ^γ に付随して定義され，次の定理が成り立つ．

定理 3.1. 関数 $\gamma\in\Gamma\mapsto H(\mathscr{M}(\gamma)\,|\,\mathscr{N}(\gamma))\in[0,\infty]$ は μ-可測で

$$H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{N})=\int_\Gamma H(\mathscr{M}(\gamma)\,|\,\mathscr{N}(\gamma))d\mu(\gamma) \tag{3.6}$$

となる．

ここでは証明は割愛させて頂くが，Kawakami and Yoshida (1988)，Yoshida (1989) を参照して頂きたい．

ここで $\mathscr{M}$ が可換で $\mathscr{N}=\boldsymbol{C}$（つまり，$\mathscr{M}$ の自明な部分環）の場合について少し述べておくことにする．その前に用語の定義をしておく必要がある．フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ が原子的であるとは，すべての0でない射影子が直交射影子の和で表わせないときをいう．また，完全非原子的であるとは，原子的な射影子を全くもたないときをいう．これは，測度空間が原子的，非原子的であるという用語に全く対応している．

いま，フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ が原子的であるとし，それらの原子を $\{p_i\}_{i\in I}$ で表わすものとする．このとき相対エントロピーの定義より

$$H(\mathscr{M})=H(\mathscr{M}\,|\,\boldsymbol{C})=\sum_{i\in I}\eta\tau(p_i) \tag{3.7}$$

となる．これは離散的な確率空間における自己情報量と一致する．また，$\mathscr{M}$ が原子的でなければ p を完全非原子的な部分に対応する射影子とし，$\lambda=\tau(p)$ とすれば $\lambda>0$ となる．そして任意の自然数 n に対して $\tau(p_i)=\lambda/n\ (i=1,2,\ldots,n)$, $\tau(p_{n+1})=1-\lambda$ となる単位の分割 $\Delta=(p_i)_{i=1}^{n+1}$ を取ることができる．このとき $H(\mathscr{M})\geqq\lambda\log n$ となることがわかる．ところで n は任意だったので $H(\mathscr{M})=\infty$ といえる．したがって，$H(\mathscr{M}\,|\,\boldsymbol{C})<+\infty$ ならば $\mathscr{M}$ は原子的でなければならない．

さて，一般の場合，定理3.1に現われる成分環 $\mathscr{M}(\gamma)$ と $\mathscr{N}(\gamma)$ は μ-測度0集合を除く $\gamma\in\Gamma$ で $Z(\mathscr{M}(\gamma))\cap Z(\mathscr{N}(\gamma))=\boldsymbol{C}\cdot 1$ を満たしている．したがって，相対エントロピー $H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{N})$ を計算する場合には $Z(\mathscr{M})\cap Z(\mathscr{N})=\boldsymbol{C}\cdot 1$ であるような組 $\mathscr{M}\supset\mathscr{N}$ について行なえばよい．ここでは $Z(\mathscr{M})\cap Z(\mathscr{N})=\boldsymbol{C}\cdot 1$ よりも強い条件(以下の定理の条件（$*$）)の下で考えることにする．実際の応用のときには，この条件が成り立つような場合にのみ考えることになる．

定理 3.2. $\mathscr{M}$ を有限型のフォン・ノイマン環で，その忠実，正規，規格化されたトレースを τ とする．$\mathscr{N}$ を $\mathscr{M}$ の部分フォン・ノイマン環とする．さらに，$\mathscr{M}$ から $\mathscr{N}$ への条件付き期待値 E が次の条件を満たすものとする．

（$*$） 任意の $x\in Z(\mathscr{M})$ に対して $E(x)=\tau(x)\cdot 1$ が成り立つ．

このとき，次のことを得る．

（i） もし $H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{N})<+\infty$ ならば $Z(\mathscr{M})$ は原子的である．

（ii） $Z(\mathscr{M})$ が原子的であるとき，$Z(\mathscr{M})$ の原子を $\{p_i\}_{i\in I}$ で表わし，$\sum_{i\in I}p_i\mathscr{N}p_i$ を $\mathscr{L}$ とす

る．このとき

$$H(\mathscr{M}\mid\mathscr{N})=H(\mathscr{M}\mid\mathscr{L})+H(\mathscr{L}\mid\mathscr{N}) \tag{3.8}$$

となり

$$H(\mathscr{M}\mid\mathscr{L})=\sum_{i\in I}\tau(p_i)H(\mathscr{M}_{p_i}\mid\mathscr{N}_{p_i}) \tag{3.9}$$

$$H(\mathscr{L}\mid\mathscr{N})=\sum_{i\in I}\eta(\tau(p_i)) \tag{3.10}$$

である．

ここで定理3.2に関して少し注意を述べておくことにする．まず，定理の等式は無限大も含めて成り立っている．また，(ii) は $Z(\mathscr{M})$ の $\sum_{i\in I}p_i=1$ なる射影子の族 $\{p_i\}_{i\in I}$ についても同様に成り立つ．

さて，条件 ($*$) についてであるが，一般に ($*$) から $Z(\mathscr{M})\cap Z(\mathscr{N})=\boldsymbol{C}\cdot 1$ は導かれるが，逆は必ずしもいえない．しかし，以下のような場合には逆もいえる．

(i) $\mathscr{N}$ が $\mathscr{M}$ の部分因子環である．
(ii) $\mathscr{M}$ が可換なフォン・ノイマン環である．
(iii) $\mathscr{N}$ が $\mathscr{M}$ 上の局所コンパクト群の作用 α による不動点環 $\mathscr{M}^\alpha$ である．

ところで，定理3.2に現われる各被約フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}_{p_i}$ は因子環になる．したがって，以後相対エントロピー $H(\mathscr{M}\mid\mathscr{N})$ の計算においては，$\mathscr{M}$ は有限型因子環であり $\mathscr{N}$ はその部分環であるという場合を考えればよい．

定理3.3. $\mathscr{M}$ を有限型因子環で，その規格化された一意に定まるトレースを τ とする．また，$\mathscr{N}$ を $\mathscr{M}$ の部分フォン・ノイマン環とするとき次のことを得る．

(i) もし $H(\mathscr{M}\mid\mathscr{N})<+\infty$ ならば相対可換子環 $\mathscr{N}'\cap\mathscr{M}$ は原子的である．特に $Z(\mathscr{N})$ は原子的である．
(ii) $Z(\mathscr{N})$ が原子的であるとき，$Z(\mathscr{N})$ の原子を $\{q_j\}_{j\in J}$ で表わし，$\sum_{j\in J}q_j\mathscr{M}q_j$ を $\mathscr{L}$ とするとき

$$H(\mathscr{M}\mid\mathscr{N})=H(\mathscr{M}\mid\mathscr{L})+H(\mathscr{L}\mid\mathscr{N}) \tag{3.11}$$

となり，

$$H(\mathscr{M}\mid\mathscr{L})=\sum_{j\in J}\eta\tau(q_j) \tag{3.12}$$

$$H(\mathscr{L}\mid\mathscr{N})=\sum_{j\in J}\tau(q_j)H(\mathscr{M}_{q_j}\mid\mathscr{N}_{q_j}) \tag{3.13}$$

である．

これらの定理より，$\mathscr{M}$ が有限型因子環の場合に次のような系が導かれる．$\mathscr{M}$ が有限I型因子環の場合は Pimsner and Popa (1986) の結果を援用すればよいので，ここでは $\mathscr{M}$ が II_1 型因子環の場合についての結果をあげておくことにする．

系 3.1. $\mathscr{M}$ を II_1 型の因子環, $\mathscr{N}$ を $\mathscr{M}$ の部分フォン・ノイマン環とする. $\mathscr{N}'\cap\mathscr{M}$ を $\mathscr{C}$ とし, $\mathscr{C}$ の極大な可換部分環を $\mathscr{A}$ とする. また $\mathscr{L}=\mathscr{C}'\cap\mathscr{M}$, $\mathscr{B}=\mathscr{A}'\cap\mathscr{M}$ とおく. このとき $\mathscr{M}\supset\mathscr{B}\supset\mathscr{L}\supset\mathscr{N}$ となり, 次のことを得る.

(i) $H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{N})=H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{B})+H(\mathscr{B}\,|\,\mathscr{N})$

(ii) $H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{N})=H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{L})+H(\mathscr{L}\,|\,\mathscr{N})$

(iii) $\mathscr{C}$ が原子的なとき $Z(\mathscr{C})$ の原子を $\{f_\chi\}_{\chi\in X}$ とする. このとき, 各 $\mathscr{C}_{f_\chi}$ は I_{d_χ} 型因子環で $(d_\chi<\infty)$ あり, 各 $\mathscr{L}_{f_\chi}\supset\mathscr{N}_{f_\chi}$ は因子環-部分因子環の組になり, 以下のような公式を得る.

(a)
$$H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{L})=\sum_{\chi\in X}\tau(f_\chi)\log\left(d_\chi^2/\tau(f_\chi)\right)$$

(b)
$$H(\mathscr{L}\,|\,\mathscr{N})=\sum_{\chi\in X}\eta\tau(f_\chi)+\sum_{\chi\in X}\tau(f_\chi)\log\left[\mathscr{L}_{f_\chi}:\mathscr{N}_{f_\chi}\right]$$

ただし [:] は有限型因子環とその部分因子環の間で定義される Jones (1983) の指数である.

このようにして得られた数々の計算公式を用いて, 次章では群の作用と相対エントロピーの関係を, 特に有限群の場合について考察することにする.

4. 群の作用と相対エントロピー

この章では, 有限群 G の有限型フォン・ノイマン環 $\mathscr{M}$ への作用 α による不動点環 $\mathscr{M}^\alpha$ を考え, 相対エントロピー $H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{M}^\alpha)$ を有限群の作用の不変量を用いて記述する.

G を有限群, $\mathscr{M}$ を有限型因子環とする. 群 G から $\mathscr{M}$ の自己同型全体のなす群 $\mathrm{Aut}\mathscr{M}$ への準同型写像 α: $G\mapsto\mathrm{Aut}\mathscr{M}$ を作用という.

$\mathscr{M}$ のユニタリー元 u は $\mathrm{Ad}u(x)=uxu^*$ でもって $\mathscr{M}$ の自己同型 $\mathrm{Ad}u$ を定める. このような自己同型を内部的自己同型といい, 内部的自己同型全体のなす群を $\mathrm{Int}\mathscr{M}$ と書く. 作用 α が外部的であるとは, $\alpha_g\in\mathrm{Int}\mathscr{M}$ ならば $g=e$ が成り立つときをいう. また, 2 つの作用 α,β が共役であるとは, すべての $g\in G$ に対して, ある $\mathscr{M}$ の自己同型 θ が存在して $\alpha_g=\theta\beta_g\theta^{-1}$ となるときをいう.

Jones (1980) は有限群の II_1 型因子環への作用の共役不変量を決定している. ここでは相対エントロピー $H(\mathscr{M}\,|\,\mathscr{M}^\alpha)$ を, この不変量を用いて表わすことを考える.

Jones の導出した不変量とは, ひとことでいえば以下のようになる. 有限群 G の作用 α: $G\mapsto\mathrm{Aut}\mathscr{M}$ が与えられたとき $K=K(\alpha)=\alpha^{-1}(\mathrm{Int}\mathscr{M})$ で定まる G の正規部分群と, さらに有限群 G とその正規部分群 K からコホモロジカルに定まる特性不変量 $\Lambda(\alpha)=[\mu,\lambda]$ と内部不変量 $\iota(\alpha)=(\iota_\omega)_{\omega\in\Omega}$ である. ここで, Ω は次のようにして得られる. 特性不変量 $[\mu,\lambda]$ の代表元 (μ,λ) を $\alpha_k=\mathrm{Ad}v_k(k\in K)$, $v_e=1$ となる $\{v_k\}_{k\in K}$ に付随して選んでおく. 2-コサイクル μ に対して K の μ-既約表現 (2-コサイクル μ でねじれの入った既約表現) 全体を $\mathrm{Rep}(K,\mu)$ とし, μ-既約表現のユニタリー同値類全体を $(K,\mu)\hat{}$ とする. 以下, 簡単のため μ-既約表現のユニタリー同値類全体 $(K,\mu)\hat{}$ を単に X と書く. このとき, 実は λ により μ-既約表現全体 $\mathrm{Rep}(K,\mu)$ への G-作用が定義され, これは X への G-作用を誘導する. この X への G-作用による軌道空間を Ω と表わす. これら不変量についての詳細は, 文献 Jones (1980) および Kawakami and Yoshida (1987) を参照して頂きたい.

さて，$v\cong \sum_{\chi\in X}\pi^{\chi}\otimes 1_{\chi}$ を v の μ-表現として因子分解する．この分解に対応して $\mathscr{M}$ の射影子 $f_{\chi}(\chi\in X)$, $\sum_{\chi\in X} f_{\chi}=1$ が定義され，π^{χ} の次元を d_{χ} と書き，軌道 $\omega\in\Omega$ に対して $e_{\omega}=\sum_{\chi\in\omega} f_{\chi}$, $|\omega|=$(軌道 ω 上の χ の個数) とおくと，次のことを得る．

各 $\chi, \chi'\in\omega$ に対して，$\tau(f_{\chi})=\tau(f_{\chi'})$, $d_{\chi}=d_{\chi'}$, したがって $\tau(e_{\omega})=|\omega|\tau(f_{\chi})$ $(\chi\in\Omega)$ であり，$d_{\omega}=d_{\chi}$ $(\chi\in\omega)$ と書いておく．また，$\alpha(e_{\omega})=e_{\omega}$ $(g\in G)$ となるので $e_{\omega}\in\mathscr{M}^{G}$ となり，したがって $e_{\omega}\mathscr{M}e_{\omega}$ は α-不変である．そこで，$e_{\omega}\mathscr{M}e_{\omega}$ への G-作用も同じく α と書くことにする．

一般に，相対エントロピー $H(\mathscr{M}|\mathscr{N})$ の計算においては，相対可換子環 $\mathscr{N}'\cap\mathscr{M}$ の構造を詳しく調べる必要がある．ここでは，$H(\mathscr{M}|\mathscr{M}^{\alpha})$ の計算を $\mathscr{M}$ と $\mathscr{M}^{G}$ の間に $\mathscr{M}^{K}$ を挟むことにより行なうことになるので，相対可換子環$(\mathscr{M}^{G})'\cap\mathscr{M}$ および $(\mathscr{M}^{K})'\cap\mathscr{M}$ の構造を解析する必要があることだけを述べておく．詳細は Kawakami and Yoshida (1987) にゆずることにしたい．さて，結果は以下のようになる．

定理 4.1. $\mathscr{M}$ を有限型因子環とし，α を有限群 G の $\mathscr{M}$ への作用とする．このとき，上で述べた記号を用いて

$$H(\mathscr{M}|\mathscr{M}^{\alpha})=\log|G/K|+\sum_{\omega\in\Omega}\tau(e_{\omega})\log\frac{d_{\omega}^{2}|\omega|}{\tau(e_{\omega})} \tag{4.1}$$

$$=\log|G/K|+\sum_{\chi\in X}\tau(f_{\chi})\log\frac{d_{\chi}^{2}|\omega|}{\tau(f_{\chi})} \tag{4.2}$$

を得る．

この式の導出は次のように2段階に分けて行なわれる．まず，第1章で導いた公式を用いることにより，以下のような結果を得る．

$$H(\mathscr{M}|\mathscr{M}^{G})=\sum_{\omega}-\tau(e_{\omega})\log\tau(e_{\omega})+\sum_{\omega}\tau(e_{\omega})H(\mathscr{M}_{e_{\omega}}|\mathscr{M}_{e_{\omega}}^{G}) \tag{4.3}$$

次に，各 $\omega\in\Omega$ に対して $H(\mathscr{M}_{e_{\omega}}|\mathscr{M}_{e_{\omega}}^{G})$ の計算を行なう．この計算にも第1章で導いた公式を用いることになる．

$$H(\mathscr{M}_{e_{\omega}}|\mathscr{M}_{e_{\omega}}^{G})=H(\mathscr{M}_{e_{\omega}}|\mathscr{M}_{e_{\omega}}^{K})+H(\mathscr{M}_{e_{\omega}}^{K}|\mathscr{M}_{e_{\omega}}^{G}) \tag{4.4}$$

$$=\log|\omega|d_{\omega}^{2}+\log|G/K| \tag{4.5}$$

(4.3) と (4.5) より

$$H(\mathscr{M}|\mathscr{M}^{G})=\sum_{\omega}\tau(e_{\omega})\{\log|G/K|+\log(|\omega|d_{\omega}^{2}/\tau(e_{\omega}))\} \tag{4.6}$$

$$=\log|G/K|+\sum_{\omega\in\Omega}\tau(e_{\omega})\log\frac{d_{\omega}^{2}|\omega|}{\tau(e_{\omega})} \tag{4.7}$$

となる．定理の第2式 (4.2) は $\tau(e_{\omega})=|\omega|\tau(f_{\chi})$ $(\chi\in\omega)$ なる関係を用いれば直ちに得られる．

さて，この公式に用いられている量は，すべて有限群の作用の共役不変量であることに注意して頂きたい．特に，内部不変量 $\iota(\alpha)=(\iota_{\omega})_{\omega\in\Omega}$ は $\iota_{\omega}=\tau(e_{\omega})$ $(\omega\in\Omega)$ として現われる．した

がって，相対エントロピー $H(\mathscr{M} \mid \mathscr{M}^G)$ も有限群の作用の共役不変量になることがわかる.

さて，定理より，有限群 G とその正規部分群 K，およびそれから定まる特性不変量 $[\lambda, \mu]$ を固定したとき，相対エントロピーは $\log|G/K|$ と $\log|G|$ の間の値を取ることがわかる．実は，超有限 II_1 型因子環 $\mathscr{R}$ の場合には，$\log|G/K| \leqq c \leqq \log|G|$ なる任意の値 c に対して $H(\mathscr{R} \mid \mathscr{R}^{\alpha})=c$ となる有限群 G の作用 α が存在する．また，相対エントロピー $H(\mathscr{R} \mid \mathscr{R}^{\alpha})$ が最大値 $\log|G|$ を達成するのは，作用 α が Jones の構成したモデル作用の共役類に限られることもわかる.

ところで，有限群の作用の共役不変量は幾何学的な解釈が可能である．この幾何学的な解釈をもとにすれば，有限群とその正規部分群を与える毎に内部不変量は単体を用いて表現できることがわかる．そして，この単体上に相対エントロピーの値によってポテンシャルが与えられると考えると，有限群の作用の共役類のグラフィカルな表示が可能となる．以下に 3 次対称群

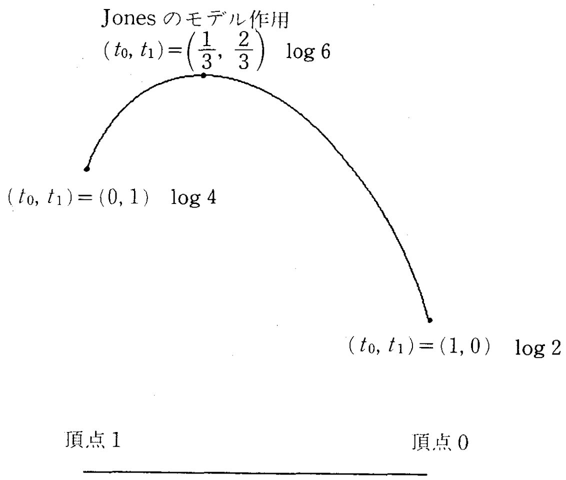

図 1.

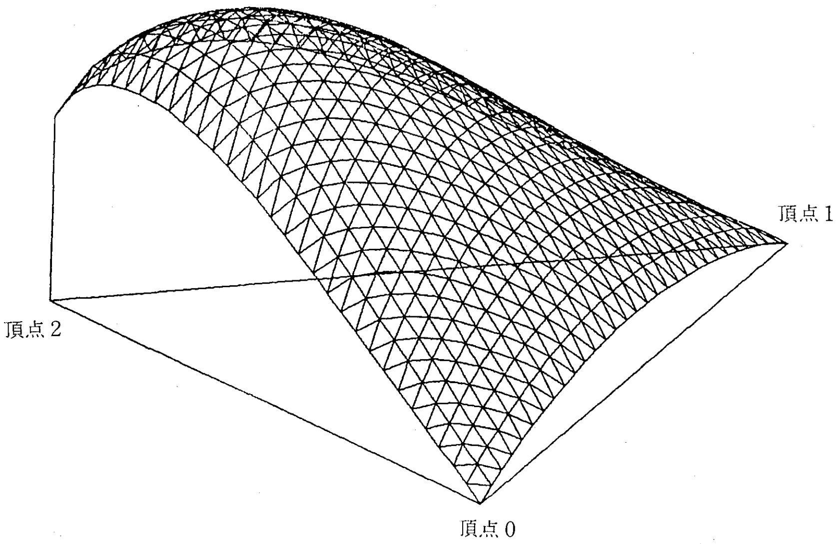

図 2.

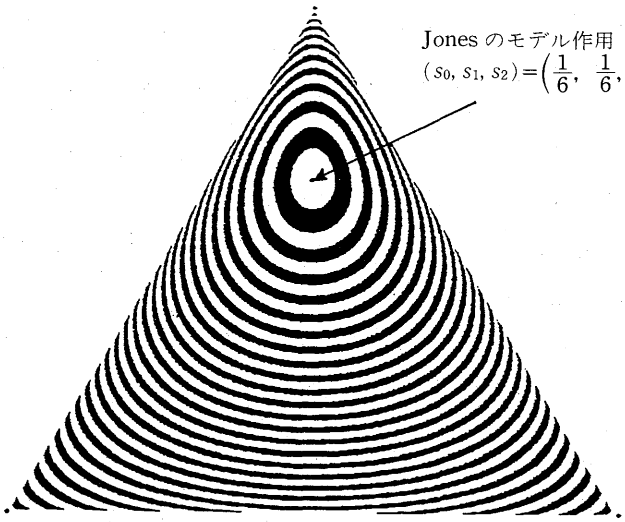

図 3.

$\mathfrak{S}_3$ の場合に，どのような表示になるかを例示しておく．

3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の正規部分群には $\{e\}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_3$ の 3 つがある．ここで $\{e\}$ は単位元からなる自明な群であり，$\mathfrak{A}_3$ は 3 次交代群である．

コホモロジカルに定まる特性不変量に関しては，3 次対称群 $\mathfrak{S}_3$ の場合，各々の正規部分群 $\{e\}, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{S}_3$ に対して，特性不変量のクラスはすべて自明となり，2-コサイクルでねじれた μ-既約表現は考える必要がない．したがって，軌道空間 Ω を考えるときは，単に既約表現を用いればよいことになる．さて，各正規部分群について，それぞれ見ていくことにする．

（a）　$K=\{e\}$ のとき：
このときは，ただひとつの外部的な作用の共役類だけである．したがって，1 点のみである．

（b）　$K=\mathfrak{A}_3$ のとき：
この場合の内部不変量 $\iota(\alpha)$ は

$$\iota(\alpha)=(t_0, t_1), \quad t_0+t_1=1, \quad t_i \geqq 0, \quad i=1, 2$$

なる単体で表わされる．この単体上のポテンシャルの図は，図 1 のようになる．

（c）　$K=\mathfrak{S}_3$ のとき：
$\mathfrak{S}_3$ の既約表現全体には，2 つの 1 次表現 χ_0, χ_1 とひとつの 2 次表現 π がある．そこで，χ_0, χ_1, π の添字をそれぞれ 0, 1, 2 と付け直しておくと，内部不変量 $\iota(\alpha)$ は

$$\iota(\alpha)=(s_0, s_1, s_2), \quad s_0+s_1+s_2=1, \quad s_i \geqq 0, \quad i=1, 2, 3$$

なる 2-単体において s_0 と s_1 とを同一視したもので表わされる．この場合のポテンシャルの図は，図 2 のような曲面になり，またこの曲面の等ポテンシャル曲線の図は，図 3 のようになる．ただし，これらの図では s_0 と s_1 とは同一視される．

この詳解では有限群について，その作用と相対エントロピーの関係について見たが，一般の局所コンパクト群についても相対エントロピーが有限値になる特徴付け，およびその値の評価も可能である．これらについてはKawakami and Yoshida (1988) を参照して頂くことにする．

参考文献

Connes, A. and Størmer, E. (1975). Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, *Acta Math.,* **134**, 288-306.

Jones, V. (1980). Actions of finite groups on the hyperfinite type II_1 factor, *Mem. Amer. Math. Soc.,* **237**.

Jones, V. (1983). Index for subfactors, *Invent. Math.,* **72**, 1-25.

Kawakami, S. and Yoshida, H. (1987). Actions of finite groups on finite von Neumann algebras and the relative entropy, *J. Math. Soc. Japan,* **39**, 609-626.

Kawakami, S. and Yoshida, H. (1988). Reduction theory on the relative entropy, *Math. Japon.,* **33**, 975-990.

Pimsner, M. and Popa, S. (1986). Entropy and index for subfactors, *Ann. Sci. École. Norm. Sup.,* **19**, 57-106.

Pimsner, M. and Popa, S. (1988). Iterating the basic construction, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **310**, 127-134.

Popa, S. (1989). Relative dimension, tower of projections and commuting squares of subfactors, *Pacific J. Math.,* **137**, 1-27.

Yoshida, H. (1989). 相対エントロピーと指数，京都大学数理解析研究所講究録，**688**, 14-24.

Non-commutative Analysis and the Relative Entropy

Hiroaki Yoshida
(The Institute of Statistical Mathematics)

In the latter of 1920's, the quantum theory was born. To describe the quantization mathematically, von Neumann had investigated operators acting on Hilbert spaces. From his researches, the theory of operator algebras had appeared.

The following question will grow naturally. What is non-commutative analysis? We should regard it as the analysis of quantized objects. It is spreaded over many fields in mathematics at present. However, we know that the theory of operator algebras is the most essential part of non-commutative analyses.

Since commutative von Neumann algebras can be represented as function spaces on measure spaces, we find that general von Neumann algebras are the "quantum" analogue of measure spaces. Especially, we see that von Neumann algebras called of finite type correspond to "quantized" probability spaces.

In this note, we shall concentrate our interest on the relative entropy in finite von Neumann algebras introduced by Pimsner and Popa. At first, we see that this relative entropy is one of the extensions of the relative entropy in the probability theory. Then, we give some technical formulas for evaluating the values of the relative entropy. As an application of these results, we investigate the relation between the actions of finite groups and the values of the relative entropy for factors of type II_1 using the fixed point algebras. At last, we show the conjugate classes of the actions of the symmetric group $\mathfrak{S}_3$ graphically.

The technical terms and notions of the theory of operator algebras are not so familiar. So, we shall begin with the explanation of them comparing with those in the probability theory.

Key words: Relative entropy, von Neumann algebras, actions of groups.