

列（解に影響しない制約式など）を検出したり，良い初期基底を得る．また，大規模問題などで長時間を要するときには退避機能を用いて再開することができる．

- 非線形な目的関数および制約条件を線形計画法の中で扱ったり，整数変数をもつ線形モデルを解く．

等が挙げられる．このMPS IIとTanabe (1987)の提案した解法Centered Newton (C-N)法を比較・検討した．1反復に要する計算の質的相異のため両者を単純に比較することはできないが，1つの目安とはなり得る．MPS IIの収束までの反復回数が問題のサイズに比例して増大するのに対してC-N法ではそれ程変化しない．ここに掲げた例は特殊ではあるが，現実問題もかなりスパースで構造化されていたり対角成分の周辺に非零要素が集中している場合も多い．

数理計画問題	問題の大きさ	非零要素数	MPSIIの反復回数		C-N法の反復回数	
			phase I	total	phase I	total
小さな問題	1	2 * 3	4	2	2	7
	2	2 * 4	6	2	2	6
	3	2 * 5	8	2	2	8
	4	2 * 6	10	2	3	8
栄養問題	11 * 28	171	2	17	4	13
輸送問題	1	7 * 15	27	7	10	8
	2	22 * 120	232	23	36	11
修正 Klee-Minty	16 * 32	47	16	18	3	9

参 考 文 献

- HITAC マニュアル (1981). 数理計画システム解説編, 8080-7-093-10.
 HITAC マニュアル (1981). 数理計画システム文法操作編, 8080-7-103-10.
 Tanabe, K. (1987). Complementarity-enforcing centered Newton method for mathematical programming: Global method, 統計数理研究所 共同研究リポート No. 5, 118-144.
 Tanabe, K. (1988). Centered Newton method for mathematical programming, *Proceedings of the 13th IFIP Conference*, 197-206, Springer, New York-Berlin.

Centered Newton Method for Linear Programming: Exterior Point Method

田 辺 國 士

内点法による線形計画問題の一解法として中心化ニュートン法 (Tanabe (1987, 1988), 田辺 (1989)) を先に提案したが，本稿ではこれを外点法に拡張する．この反復解法は，ほとんど任意の初期値から反復を開始することができ，内点法における初期値設定の困難を解消している．

次のふたつの線形計画問題は，一方が解けると他方も解けたことになる．

主問題. $Ax = b, x \geq 0$ のもとで $c'x$ を最小化せよ．

双対問題. $A'y \leq c$ のもとで $b'y$ を最大化せよ．

ただし、 A は階数 m の $m \times n$ 行列 ($m < n$)、 x と c は n -項列ベクトル、 y と b は m -項列ベクトルとする。また可能集合は空でないと仮定する。これらの問題を解くことは連立 2 次方程式・不等式系

$$\Phi_A(x, y, s) \equiv \begin{pmatrix} A'y + s \\ Ax \\ [x]s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0,$$

を解くことと同値である。ただし、 $[x]$ は x の要素と (順序をふくめて) 同じ要素をもつ対角行列とし、 s は n -項列ベクトルとする。 $R_+^n \times R^m \times R_+^n$ から $R^n \times R^m \times R_+^n$ への写像 Φ_A を中心平坦化写像とよぶ。中心多様体 (曲線) C を線形集合 $D \equiv \{(c, b, u) : u_1 = \dots = u_n \geq 0\}$ の写像 Φ_A による原像 $C \equiv \Phi_A^{-1}(D)$ と定義し、中心化ニュートン法をこの系に適用すると、中心化ニュートンベクトル $\Delta_\rho \equiv \Delta_\rho(x, y, s) \equiv (\Delta x, \Delta y, \Delta s)$ が連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} & A^t & I \\ A & & \\ [s] & & [x] \end{bmatrix} \Delta_\rho = - \begin{bmatrix} A^t y + s - c \\ Ax - b \\ [x]s \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

の解として決定される。ただし、 u_i はベクトル u の第 i 要素とし、 $\sigma \equiv (x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)/n$ 、 $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 である n -項列ベクトルとし、 (x^t, y^t, s^t) を (x, y, s) などと略記する。このとき、 Δ_0 はニュートンベクトル、 Δ_1 は中心化ベクトルであり、 $\Delta_\rho = (1-\rho)\Delta_0 + \rho\Delta_1$ となる。中心化ニュートンベクトルが定めるベクトル場を考察しよう。 (x^0, y^0, s^0) を初期値とする自励系 $d(x, y, s)/dt = \Delta_\rho(x, y, s)$ の解を $(x(t), y(t), s(t))$ と記す。

定理. 任意の y^0 、非負条件を満たす任意の $x^0 > 0$ 、 $s^0 > 0$ に対して自励系の解が $0 \leq t < M$ で存在して、次の第一積分が成り立ち、これにより解曲線が定まる。

$$A^t y(t) + s(t) - c = e^{-t}(A^t y^0 + s^0 - c),$$

$$Ax(t) - b = e^{-t}(Ax^0 - b),$$

$$x_i(t)s_i(t) - x_j(t)s_j(t) = e^{-t}(x_i^0 s_i^0 - x_j^0 s_j^0), \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$$x_1(t)s_1(t) + \dots + x_n(t)s_n(t) = e^{-(1-\rho)t}(x_1^0 s_1^0 + \dots + x_n^0 s_n^0).$$

さらに、両問題の最適解 x^* 、 y^* が一意的であるならば $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$ 、 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$ 。

外点法的中心化ニュートン法のアルゴリズム. 定理の条件を満たす任意の初期値から出発して、反復公式

$$(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) = (x^k, y^k, s^k) + \alpha \Delta_0(x^k, y^k, s^k) + \beta \Delta_1(x^k, y^k, s^k)$$

によって、系列 $\{(x^k, y^k, s^k)\}$ を生成する。ステップ幅 α, β は、条件

$$x^{k+1} > 0, \quad s^{k+1} > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 0 \leq \beta,$$

$$\mu(x^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1}) < (1-\delta)\mu(x^k, y^k, s^k)$$

を満たす組み合わせの中で α の値が (実際計算においては近似的に) 最大になるように選ぶ。ただし、 δ は小さな正数、

$$\log \mu \equiv (\omega/n) \log \left\{ \left(\prod_{i=1}^n x_i s_i \right)^n / \left(\prod_{i=1}^n x_i s_i \right) \right\}$$

$$+ \log(\|A^t y + s - c\|_1 + \|Ax - b\|_1 + x_1 s_1 + \dots + x_n s_n)$$

とし、 $\|\cdot\|_1$ は 1-ノルムとし、 ω は適当な正数とする。

参 考 文 献

- Tanabe, K. (1987). Complementarity-enforcing centered Newton method for mathematical programming: Global method, ISM Cooperative Research Report, 5, 118-144.
 Tanabe, K. (1988). Centered Newton method for mathematical programming, *System Modelling and Optimization* (eds. M. Iri and K. Yajima), 197-206, Springer, New York.
 田辺國士 (1989). 中心化ニュートン法, オペレーションズ・リサーチ, 34, 135-138.

統計基礎研究系

尺度混合分布の確率密度関数の漸近展開の誤差評価

清 水 良 一

標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数 X の尺度混合 $Y = \sigma X$ の分布関数 $F(x)$ を $N(0, 1)$ の分布関数 $\Phi(x)$ の周りで展開する問題を考える。ただし, σ は X と独立で, 1 の近傍で変動する確率変数であるとする。 $N(0, 1)$ の確率密度関数を ϕ とし, 簡単の為に k は 2 またはそれ以上の偶数とすると, $F(x)$ は

$$G_k(x) = \Phi(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^j j!} H_{2j-1}(x) \cdot E(\sigma^2 - 1)^j \cdot \phi(x)$$

で近似され, その誤差は上限 $\Delta_k \equiv C_k \cdot \{E(\sigma^2 - 1)^k + E(\sigma^{-2} - 1)^k\}$ をもつ。すなわち, 任意の x に対して $|F(x) - G_k(x)| \leq \Delta_k$ である。ただし, H はエルミート多項式, C_k は k だけで決まる正の数である。しかし, 分布関数のこの近似は, いろいろな事象の確率を十分によく近似しているという保証を与えてくれる訳ではなく, とくに, 多変量の場合にはこの種の誤差評価では余り役に立つとは思われない。

いま, $f_+(\xi) \equiv \xi^{-1/2} \exp(-x^2 \xi^{-1}/2)$ を ξ の関数と見て, $\xi = 1$ の周りで $k-1$ 次の項まで展開する。 $(\xi-1)^j$ の係数は $H_{2j}(x) \cdot f_+(1)/2^j j!$ で与えられる。誤差項 $\delta_{+k}(\xi, x)$ は絶対可積分であり, その積分を $(\xi-1)^k, (\xi^{-1}-1)^k$, および $(\xi^{-1}-1)^{k+2}$ の一次式で評価することが出来る。任意の正の数 σ に対して $\phi(x/\sigma)/\sigma$ は $f_+(\xi)$ によって $\phi(x/\sigma)/\sigma = f_+(\sigma)/\sqrt{2\pi}$ と書けるので, $\phi(x/\sigma)/\sigma$ を $\phi(x)$ の周りで展開し, その誤差評価を得ることが出来る。このことから, 確率変数 Y の確率密度関数 $f(x) = E(\phi(x/\sigma)/\sigma)$ は $G_k(x)$ の導関数 $G'_k(x)$ によって十分によく近似されることが分かる。とくに, 任意のボレル集合 A に対して事象 $Y \in A$ の確率は $G'_k(x)$ の A 上の積分で近似され, その誤差は $C_k \cdot \{(\sigma^2 - 1)^k + (\sigma^{-2} - 1)^k + (\sigma^{-2} - 1)^{k+2}\}$ を越えない。確率密度を展開する方法は, X が多次元正規分布, Σ が単位行列 I の近くで変動する正定値確率行列の場合について $Y = \Sigma^{1/2} X$ の分布の漸近展開に拡張して使うことが出来るものと期待される。いまの場合, $F(x) - G_k(x)$ の符号変化が高々 $2K$ 回であることから, 上の誤差評価は $|F(x) - G_k(x)| \leq \Delta_k$ から容易に得られるのであるが, これを多変量の場合に拡張して使うことは, 少なくとも初等的な方法では出来そうもない。なお, $f_+(\xi)$ の代りに $f_-(\xi) \equiv f_+(1/\xi)$ を使うことによって, σ^2 を σ^{-2} で置き換えた展開も可能であり, 同様の上限が得られる。

 L_1 ノルムを用いた適合度検定について

安 芸 重 雄

Shepp (1982), Rice (1982), Johnson and Killeen (1983) 等によって, Brownian bridge の L_1 ノルムの分布が明らかになった。これらの結果により, $T_n = \int_0^1 |\sqrt{n}(F_n(x) - F(x))| dF(x)$ という形の適合