$$\Psi_i=p_i\Phi=\left(\frac{1}{2}+q_i\right)\Phi, \qquad \Psi_{ij}=p_ip_j\Phi=\left(\frac{1}{2}+q_i\right)\left(\frac{1}{2}+q_j\right)\Phi,$$
$$\Psi_{12\cdots n}=p_1p_2\cdots p_n\Phi=\left(\frac{1}{2}+q_1\right)\left(\frac{1}{2}+q_2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+q_n\right)\Phi,$$

ここで φ の任意関数 F に対し $q_iF(\varphi)=\left[\int\cdots\int d\phi\,\frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}(\phi_i-\varphi_i)}\prod_{k\neq i}^{n}\delta(\phi_k-\varphi_k)\right]F(\phi)$ である．先ず初等的計算によって $\Psi_i=\left[\frac{1}{2}+N(K_i(\varphi))\right]\Phi$ $\Big(N(u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^u e^{-t^2/2}dt,\ K_i(\varphi)=\sum_{k\neq i}^{n}\frac{B_{ik}}{\sqrt{B_{ii}}}\boldsymbol{i}\varphi_k,\ B$：分散共分散行列$\Big)$ を知れば，順次 Ψ_{ij}，Ψ_{ijk} を求め最終的に全変数に対する $\Psi_{12\cdots n}$ の具体的表現を得ることができる．但し，これは一般に無限級数の形をとるので，相関係数の変数変換あるいは繰り込みの技法によって簡明且つ収束性の良い級数に改めることが今後の課題と考えられる．

負の二項分布の母数の推定

安 楽 和 夫

$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ を負の二項分布

$$P(x)=\binom{1/\theta+x-1}{x}\left(\frac{1}{1+\theta\mu}\right)^{1/\theta}\left(\frac{\theta\mu}{1+\theta\mu}\right)^x, \qquad x=0,1,2,\ldots,\quad \mu>0,\ \theta\geqq 0,$$

からの標本とすると，統計量 $t=\sum x_i$ は μ の完備十分統計量であり，$\bar{x}$ は μ の一様最小分散不偏推定量である．これは最尤推定量，モーメント推定量でもあり，妥当な推定量と思える．一方，θ の推定については，これまで最尤法とモーメント法が重視されてきたが，t を与えたときの条件付尤度から θ を推定する方法が有力と考えられる（Kalbfleisch and Sprott (1973)）．最尤推定量および条件付最尤推定量はそれぞれ，$(n-1)s^2/n>x$，$s^2>x$ のとき，推定方程式

$$ULE(\boldsymbol{x};\theta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{x_i}\frac{j-1}{1+\theta(j-1)}+n\frac{1}{\theta^2}\log(1+\bar{x}\theta)-n\frac{\bar{x}}{\theta}=0$$
$$CLE(\boldsymbol{x};\theta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{x_i}\frac{j-1}{1+\theta(j-1)}-\sum_{i=1}^{t}\frac{i-1}{n+\theta(i-1)}=0$$

で与えられる．またこの2つの推定関数については，不等式

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{x}}{1+\theta\bar{x}}<CLE(\boldsymbol{x};\theta)-ULE(\boldsymbol{x};\theta)<\frac{\bar{x}}{1+\theta\bar{x}},$$

が成り立つ．θ が真の母数に一致するとき，$CLE(\boldsymbol{x};\theta)$ の期待値は0となるので，$ULE(\boldsymbol{x};\theta)$ は負の偏りをもつ．また推定方程式の解の一意性を仮定すれば，常に条件付最尤推定量が最尤推定量より大きいことが分かる．

Godambe (1980) は期待値0の推定関数の族の中で条件付最尤推定関数が最適であることを示したが，最尤推定関数がこの族に入ってないので，この基準では比較できない．そこでシミュレーションによりこの2つの推定量とモーメント推定量について，バイアス，平均自乗誤差の比較を行った．その結果，条件付推定量の良さが認められた．特にいくつかの母集団に共通の θ を推定する場合には，他よりも完全に優れていることが分かった．

参 考 文 献

[1] Godambe, V. P. (1980). *Biometrika,* **67**, 155-162.
[2] Kalbfleisch, J. D. and Sprott, D. A. (1973). *Sankhyā,* **35**, 311-328.