法では精度よく分布のパーセント点を求めることは難しい．そこで，推定量のバイアスと分布の歪を補正して，精度よく信頼区間を構成することが必要となってくる．この問題に対して，次のような方法が提示され，改良が試みられている．

1. Cornish-Fisher 展開に基づく方法（例えば，Hall (1983, *Ann. Statist.*)）
2. 推定量の変換によって分布の歪を補正し，同時にバイアス修正を行う方法（Konishi (1987, in Advances in Multivariate Statistical Analysis, (ed. A. K. Gupta))）
3. バイアス修正，歪の補正を行ったブートストラップ信頼区間（Efron (1987, *J. Amer. Statist. Assoc.*)）

2と3の方法は，共にその理論的基礎を推定量の変換（正規化・分散安定化変換）に置いているが，両者には大きな違いがある．すなわち，2の方法が観測値の持つ情報に基づいて変換の関数型を具体的に求めているのに対して，3の方法では関数型を知る必要はなく，その存在のみを仮定している．観測値からの反復抽出によってブートストラップ分布を推定する過程で，関数型についての情報を得ていると考えられる．しかし，3の方法では，例えば分散共分散行列の関数として表されるような母数に対して，信頼区間を構成することは難しく，さらに改良が必要である．

ここでは，2の推定量の変換に基づく方法と，3のブートストラップ信頼区間との関係を理論的に明かにし，攪乱母数を含むモデル，ノンパラメトリックの場合において，ブートストラップ信頼区間に含まれる歪の補正方法について検討した．

対称性の検定について

安　芸　重　雄

検定統計量のうち，その漸近分布が Wiener 過程の簡単な関数で与えられるものとしては，対称性の検定統計量がよく知られている（Butler (1969), Rothman and Woodroofe (1972) 等）．これらの統計量の漸近分布を導出することに対して基本的となる極限定理を一般化して，次のように述べることができる．G_1 を $[0, 1]$ 上の分布関数とする．$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ は独立に G_1 に従う確率変数列，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ は独立同分布確率変数列で，任意の Y_i とも独立であるとする．さらに，$E\xi_1=0$, $E\xi_1^2=1$ を仮定する．$D[0, 1]$ 上の確率要素 $u_n(t)$ を $u_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i I_{[0,t]}(Y_i)$ と定義する．

定理 1.　上の仮定のもとで，$u_n(t)$ は $D[0, 1]$ において $W(G_1(t))$ へ弱収束する．

さて，次のような仮説検定問題を考える．F を $[0, 1]$ 上の分布関数とする．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立に F に従う確率変数列とし，$0<\alpha<1$ を与えられた定数とする．定理1を用いることによって，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ に基づいて F に関する次の仮説を検定することができる．

仮説：$[0, 1]$ 上の或る分布関数 G が存在して，

$$F(t)=\begin{cases} \alpha G(2t) & 0\leqq t\leqq \dfrac{1}{2}, \\ \alpha+(1-\alpha)(1-G(2-2t)) & \dfrac{1}{2}<t\leqq 1, \end{cases}$$

と書ける．

この仮説は $t=1/2$ を境にして右と左で分布の形が（定数倍を除いて）等しいということを意味しており，対称性の仮説の自然な拡張になっている．

この報告は，文献 Aki (1987) に基づいている．

参考文献

[1]　Aki, S. (1987). On nonparametric tests for symmetry, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **39**, 457-472.

[2] Butler, C. (1969). A test for symmetry using the sample distribution function, *Ann. Math. Statist.*, **40**, 2209-2210.

[3] Rothman, E. D. and Woodroofe, M. (1972). A Cramér-von Mises type statistic for symmetry, *Ann. Math. Statist.*, **43**, 2035-2038.

極値統計量の近似分布理論

松縄 規

連続型分布からの準極値統計量の分布に関するhalf variationの意味での一様近似について考察し，従来の筆者による結果を改善した．

$X_{n,1}<X_{n,2}<\cdots<X_{n,n}$ をpdf. $f(x)$, cdf. $F(x)$ を持つ連続型分布からの無作為標本に基づく順序統計量とする．α, β をextended real numbersとし，区間 (α, β) を $f(x)$ のsupportとする．

$\boldsymbol{X}_{n,k}=(X_{n,1}, \ldots, X_{n,k})$ を k lower extremesとする．ここに k は n に従属して変動するものとする．これに対応してpdf.が次式で与えられる確率変数 $\tilde{\boldsymbol{X}}_{n,k}=(\tilde{X}_{n,1}, \ldots, \tilde{X}_{n,k})$ を考える：

$$q_n(\boldsymbol{x}_k)=\frac{n^k}{\gamma_{n,k}}e^{-nF(x_k)}\prod_{i=1}^{k}f(x_i) \qquad (\alpha<x_1<x_2<\cdots<x_k<\beta)$$

ここに $\boldsymbol{x}_k=(x_1, \ldots, x_k)$ であり

$$\gamma_{n,k}=\int_0^n \frac{x^{k-1}e^{-x}}{\Gamma(k)}dx \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

$\boldsymbol{X}_{n,k}$, $\tilde{\boldsymbol{X}}_{n,k}$ を基に次の標準化された確率変数を考える．

$$\boldsymbol{X}^*_{n,k}\equiv(\boldsymbol{X}_{n,k}-\boldsymbol{b}_{n,k})/a_{n,k}, \quad \tilde{\boldsymbol{X}}^*_{n,k}\equiv(\tilde{\boldsymbol{X}}_{n,k}-\boldsymbol{b}_{n,k})/a_{n,k}$$

ここに $a_n(>0)$, b_n は標準化定数，$\boldsymbol{b}_{n,k}=(b_n, \ldots, b_n)$ は k 項ベクトル．次の結果を得る：

定理1. $\boldsymbol{X}^*_{n,k}$ と $\tilde{\boldsymbol{X}}^*_{n,k}$ が $(\boldsymbol{B})_d$-型一様漸近同等となるための必要十分条件は，$k/n\to 0$ $(n\to\infty)$ となることである．

$\hat{\boldsymbol{X}}_{n,k}=(\hat{X}_{n,1}, \ldots, \hat{X}_{n,k})$ をpdf.が次式で与えられる確率変数とする：

$$\hat{p}^*_n(\boldsymbol{x}_k)=\exp[-v_n(x_k)]\cdot\prod_{i=1}^{k}v'_n(x_i), \quad \boldsymbol{x}_k\in B_{n,k}.$$

ここに $v_n(x)$ は非負，非減少関数，$v'_n(x)=dv_n(x)/dx>0$.

$$B_{n,k}=\{\boldsymbol{x}_k \mid 0\equiv v_n(\alpha)<v_n(x_1)<\cdots<v_n(x_k)<k\lambda_n\},$$

λ_n は $k/n\to 0$ $(n\to\infty)$ の条件下で $\delta_{n,k}\equiv(k/n)\lambda_n\to 0$, $\lambda_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ となる数列．次の定理を得る：

定理2. $k/n\to 0$ $(n\to\infty)$ かつ

$$\varepsilon_n\equiv\sup_{L_n}\left|\frac{na_nf(a_nx+b_n)}{v'_n(x)}-1\right|=O(\sqrt{\lambda_n/n^\beta}), \qquad (\beta\geq 1)$$

とする．但し，$L_n=\{x \mid 0<v_n(x)/n<\delta_{n,k}\}$．この時，次の一様近似が成立する．

$$\boldsymbol{X}^*_{n,k} \sim \hat{\boldsymbol{X}}_{n,k}\ (\boldsymbol{B})_d \qquad (n\to\infty).$$

注. 上述の $v_n(x)$, a_n, b_n は k がfixの場合のN.B. Smirnovの関数および安定化定数に取ってよい．