幾何学的対称性と確率模型

伊　藤　栄　明

1．連続状態の生存競争の方程式と保存量

次のような生存競争の方程式を考える．

$$\frac{d}{dt}P_i=P_i\left(\sum_{j=1}^{s}P_{i-j}-\sum_{j=1}^{s}P_{i+j}\right),\qquad P_i=P_{i+2s+1},\qquad i=1,2,\ldots,2s+1. \tag{1.1}$$

s を無限大にした極限として，方程式 (1.1) において i を連続変数 x にした

$$\frac{d}{dt}P(x,t)=P(x,t)\left(\int_{x-\pi}^{x}P(y,t)dy-\int_{x}^{x+\pi}P(y,t)dy\right) \tag{1.2}$$

を

$$P(x,t)=P(x+2\pi,t),$$

のもとで考える．この場合の保存量についてしらべる．単位円周上の点 $A_1, A_2, \ldots, A_{2r+1}$ を考える．それらの座標を $(\cos x_i, \sin x_i)$, $0\leqq x_i<2\pi$, $i=1,2,\ldots,2r+1$ とする．A_j から A_i への円周上の 2 つの道において，正の向き，すなわち反時計まわり，へ行く方が負の向きへ行くより近い場合に $x_j<x_i$ とし，そうでないとき $x_j>x_i$ とする．

$$x_{i+1},\ x_{i+2},\ \ldots,\ x_{i+r}<x_{i+r+1},\qquad 0\leqq x_i<2\pi, \tag{1.3}$$

が $i=1,2,\ldots,2r+1$ について成りたつとし，E_r はこれらを満す $x_1, x_2, \ldots, x_{2r+1}$ の集合であるとする．次の定理が得られる．

定理 1.

$$I_r=\int\underset{E_r}{\cdots}\int P(x_1,t)P(x_2,t)\cdots P(x_{2r+1},t)dx_1dx_2\cdots dx_{2r+1},\qquad r=0,1,2,\ldots$$

は方程式 (1.2) の保存量である．

2．円周上の確率密度と保存量

単位円周上の確率密度 $P(x)$, $0\leqq x<2\pi$, を考える．点 $A_1, A_2, \ldots, A_{2r+1}$ は互いに独立に同一の分布 $P(x)$ に従うものとする．A_i を通る直径により円周を 2 つの弧にわけたとき，それぞれに r 個ずつ点があるという事象を F_i とする．

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{2r+1}F_i\right)=(2r)!\int\underset{E_r}{\cdots}\int P(x_1)P(x_2)\cdots P(x_{2r+1})dx_1dx_2\cdots dx_{2r+1}$$

であり，このことより I_r の幾何確率という立場からの意味がわかる．次の定理が得られる．

定理 2.　$P(x)$ は円の中心に関して点対称であるとする．すなわち $P(x+\pi)=P(x)$ であるとする．そのとき

$$P_r\left(\bigcap_{i=1}^{2r+1}F_i\right)=\frac{1}{2^{2r}}$$

となる．

3. N 次元球面上の点対称な確率密度

N 次元単位球面は $\sum_{i=1}^{N+1} x_i^2=1$ であらわされる．その上の確率密度 $P(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1})$ を考える．これに従うランダムな点 $A_1, A_2, \ldots, A_{N+2}$ の位置は，互いに独立とする．そのなかから N 個の点の組 $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_N}$, $i_1<i_2<\cdots<i_N$, をえらび，それらと球の中心を通る超平面 $PL_{i_1i_2\cdots i_N}$ を考える．残りの2点が $PL_{i_1i_2\cdots i_N}$ の両側に1つずつあるという事象を $F_{i_1i_2\cdots i_N}$ とする．そのとき次の定理を得る．

定理3.　$P(x_1, x_2, \ldots, x_{N+1})$ が球の中心に関して対称であれば

$$P_r\left(\bigcap_{i_1<i_2<\cdots<i_N} F_{i_1i_2\cdots i_N}\right)=\frac{1}{2^{N+1}}$$

が成りたつ．

参考文献

[1] Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, *Prog. Theor. Phys.*, **78**, 507-510.
[2] 伊藤栄明 (1987). 戸田格子の保存量と生存競争の系の保存量，統計数理，**35**, 73-80.
[3] Itoh, Y. (1988). Integrals of a Lotka-Volterra system of infinite species, *Prog. Theor. Phys.*, **80**. (in press).

多次元正規分布の不完全モーメントについて

岡　﨑　　卓

1.　多変数正規分布において，通常のモーメントは容易に計算することができ，分散共分散行列による簡潔な表現が与えられていることは周知の通りであるが，絶対値モーメントや，より基本的な統計量である不完全モーメントについては次元数 n が小さい場合を除いて具体的表現が得られていない．すなわち正規確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の不完全モーメント $\mu_{m_1m_2\cdots m_n}=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_1^{m_1}x_2^{m_2}\cdots x_n^{m_n}fdx$ (f は確率密度関数）は $n\leqq3$ であれば直接積分が可能であり，その結果は個々のベキ m 毎に公式としてまとめられている．しかし $n\geqq4$ ではもはや積分計算の遂行が困難となるため相関係数の Tailor 展開による表現が与えられているに過ぎない．本報告では不完全特性関数を導入して，任意の次元数 n につき不完全モーメントを系統的に求める方法の概略を記す．

2.　通常の特性関数 $\Phi=\langle e^{iX\varphi}\rangle$ (φ: n 次元試験変数，$\langle\cdots\rangle$: 期待値，$i^2=-1$) に対応して変数 X_i に関する不完全特性関数 Ψ_i を

$$\Psi_i=\langle Y_ie^{iX\varphi}\rangle$$

と定義する．ここに $Y_i=Y(X_i)$ は階段関数 $Y(u)=0\ (u<0)$, $Y(u)=1\ (u\geqq0)$ である．この定義は二変数 X_i, X_j に関する不完全特性関数 $\Psi_{ij}=\langle Y_iY_je^{iX\varphi}\rangle$，更に全変数に関する不完全特性関数 $\Psi_{12\cdots n}=\langle Y_1Y_2\cdots Y_ne^{iX\varphi}\rangle$ に拡張される．不完全特性関数は不完全モーメントの母関数にあたり，任意ベキの不完全モーメントは Ψ の微分から求まる：$\mu_{m_1m_2\cdots m_n}=\left(\frac{\partial}{i\partial\varphi_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial}{i\partial\varphi_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\partial}{i\partial\varphi_n}\right)^{m_n}\Psi_{12\cdots n}\big|_{\varphi=0}$.

さて，階段関数 Y の Fourier 変換を用いれば，不完全特性関数は次のように特性関数 Φ に積分演算子を作用させた結果として表わされる．