Multivariate Heteroscedastic Method についての成果概要*

統計基礎研究系（客員）東京理科大学理学部 塩 谷 実

Heteroscedastic Method（以下 H-法と書く）は，異なる共分散行列を持つ正規母集団 Π_i: $N_p(\boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i)$, $i=1,\ldots,k$ の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_i$, $i=1,\ldots,k$ に関する推測方法を構成するために提案されたもので，Stein (1945), Chatterjee (1959) の2段階標本抽出法を基礎としている．研究点をはっきりさせるため，$k=1$ とし，番号 i を除いて説明する．

(1) 母集団 Π から N_0 個の観測値をとり $\bar{\boldsymbol{x}}=(1/N_0)\sum_{r=1}^{N_0}\boldsymbol{x}_r$, $V=\sum_{r=1}^{N_0}(\boldsymbol{x}_r-\bar{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}_r-\bar{\boldsymbol{x}})'$, $S=V/n$, $n=N_0-1(\geqq p)$ を計算する ($V\sim W_p(\Sigma, n)$, Wishart 分布).

(2) $N=\max\{N_0+p^2, [c\cdot \mathrm{tr}(TS)]+1\}$, $T>0$, $c>0$ で given.

(3) $N-N_p$ 個の観測 $\boldsymbol{x}_{N_0+1},\ldots,\boldsymbol{x}_N$ を行う． $X: p\times N=[\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{N_0}, \boldsymbol{x}_{N_0+1},\ldots,\boldsymbol{x}_N]$.

(4) 次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすように $A_l: p\times N=[\boldsymbol{a}_{l1},\ldots,\boldsymbol{a}_{lN_0}, \boldsymbol{a}_{l,N_0+1},\ldots,\boldsymbol{a}_{lN}]$, $l=1,\ldots,p$; を構成する．

(i) $\boldsymbol{a}_{l1}=\cdots=\boldsymbol{a}_{lN_0}\equiv\boldsymbol{a}_{l0}$ $(l=1,\ldots,p)$

(ii) $A_l\boldsymbol{j}_N=\boldsymbol{e}_l$; $\boldsymbol{j}_N=(1,\ldots,1)'_{N\times1}$, $\boldsymbol{e}_l=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)'$

(iii) $AA'=\dfrac{1}{c}T^{-1}\otimes S^{-1}$, $A: p^2\times N=[A_1', A_2',\ldots,A_p']'$

(5) 基礎統計量を構成するための新しい確率ベクトル $\boldsymbol{z}$ を

$$\boldsymbol{z}: p\times1=(\mathrm{tr}(A_1X'), \mathrm{tr}(A_2X'),\ldots,\mathrm{tr}(A_pX'))$$

と定義する．

この $\boldsymbol{z}$ に対して $E(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{\mu}$, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{z})=(cT)^{-1}\dfrac{p-n}{n-p-1}$ と求まり，Σ に依存しない，

$$f(\boldsymbol{z})=\left|\frac{1}{2\pi}(cT)\right|^{1/2}E_q\left[q^{-p/2}\exp\left\{-\frac{1}{2q}(\boldsymbol{z}-\mu)'(cT)(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\mu})\right\}\right]$$

は容易に証明できる．ここに $q=n\,\mathrm{tr}(W)$, $W\sim W_p(I_p, n)$ である．

H-法において k 個の母集団の平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}_i$, $i=1,\ldots,k$ に関する推測を考える場合，同じ $c>0$, T および第1段の標本の大きさ N_0 を用い上記の手続きで，全体の標本の大きさ N_i, 行列 $A^{(i)}$: $p^2\times N_i=[A_1^{(i)\prime}, A_2^{(i)\prime},\ldots,A_p^{(i)\prime}]'$ を求め，そして，これらに基づいて確率ベクトル $\boldsymbol{z}_i$, $i=1,\ldots,k$ を作る．推測に使われる統計量はこの $\boldsymbol{z}_i$ の関数で，いまそれを $L(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_k)$ としておく．たとえば $u=\dfrac{c}{p}\boldsymbol{z}'T\boldsymbol{z}$, $w=\dfrac{c}{2p}(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2)'T(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z}_2)$ などである．

さて，上に概要を述べた中で，応用が具体的になされるためには種々解決されなければならない問題があり，昭和61年度以来逐次研究解決してきた．以下に問題および解決した点を個条書きして，それを発表した論文を指摘する．

(I) 確率変数 $\boldsymbol{z}$, 統計量 $L(\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_k)$ 特に u, w の null-分布，一般分布：$p=1,2$ の時には正確な分布（あるものは既知），$p\geqq3$ の場合には漸近展開による近似分布（論文 [3], [4]）.

(II) 行列 A: $p^2\times N=[A_1', A_2',\ldots,A_p']'$ の具体的な構成：存在性は証明されていたが，これを実際に計算できるように1つの方法を提案したのが，百武弘登（広島大学）である（論文 [2]）.

(III) 定数 c の決め方について：これは推測目的に応じて要求される条件を満たすように選ばれなければならない．そしてこの c を用いて第2段の標本抽出を行うための N が決められる．

(a) 一定の区間幅を持つ同時信頼区間の構成例（論文 [4]）

(b) 第2種の過誤確率を与えられた値にする Behrens-Fisher 問題に対する1つの解（論文 [5]）

---

* 都合で当日には報告されなかったが，要旨のみ載せる．

(IV)　(2)で定められる標本の大きさ N は確率変数である．この N の平均，標準偏差の上限，下限の評価（論文［6］）．

以上のように，H-法で推測が行われる場合，具体的なデータ解析を行い得る準備は殆どでき上ったと思われる．残っている問題が1つあり，重要なものである．それは「(II)で A の構成について触れたが，これに一意性がない．これの合理的な選択方法を研究すること」である．

参考文献

[1] Chatterjee, S. K. (1959). On an extension of Stein's two-sample procedure to the multinormal problem, *Calcutta Statist. Assoc., Bull.,* 8, 121-148.

[2] Hyakutake, H. (1986). A construction method of certain matrices required in multivariate heteroscedastic method, *Ann. Inst. Statist. Math.,* **38**, 523-528.

[3] Hyakutake, H., Siotani, M., Li Chu-yu and Mustafid (1986). Distributions of some statistics in heteroscedastic inference method—Power functions and percentage points—, *J. Japan Statist. Soc.,* **16**, 7-20.

[4] Hyakutake, H. and Siotani, M. (1987). The multivariate heteroscedastic method : distributions of statistics and an application, *American J. Math. & Manag. Sci.,* **7**, 89-111.

[5] Siotani, M. (1987). Multivariate Behrens-Fisher Problem by heteroscedastic method, in *Advances in Multivariate Statistical Analysis* (Pillai's Memorial Volume), (ed. A. K. Gupta), Reidel Publishing Co., 327-340.

[6] Hyakutake, H. and Siotani, M. (1988). Mean and variance of sample size in multivariate heteroscedastic method (accepted for publishing in the volume honoring I. Olkin).