能性等の観点から，しばしば必要．

$\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ ($n=1, 2, \cdots$) を可測空間 (R_n, $\boldsymbol{B}_n$) ($n=1, 2, \cdots$) 上の確率変数列，P^{X_n}, P^{Y_n} を対応する確率分布とする．A_n ($\in \boldsymbol{B}_n$) を近似主領域，f_n^* (>0), g_n^* (>0) を (R_n, $\boldsymbol{B}_n$) 上で定義される σ-有限測度 μ_n に関する，Radon-Nikodym 導関数とする．次の距離を一様近似の評価の対象とする．

$$D(X_n,\ Y_n\ ;\ \boldsymbol{B}_n) \equiv \sup_{E\in B_n} |P^{X_n}(E)-P^{Y_n}(E)|. \tag{1}$$

定理

$$D(X_n,\ Y_n\ ;\ \boldsymbol{B}_n) \geqq \underline{V}^*/2+1P^{x_n}(A_n)-P^{Y_n}(A_n)|/2, \tag{2}$$

$$D(X_n,\ Y_n\ ;\ \boldsymbol{B}_n) \leqq \overline{V}^*/2+1-\{P^{X_n}(A_n)+P^{Y_n}(A_n)\}/2. \tag{3}$$

ここに $\underline{V}^*$, $\overline{V}^*$ は修正情報量を用いて表現される諸量（詳細略）．

例（自由度 n の t-分布の正規近似）

$$X_n \equiv X \sim f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$Y_n \sim g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$A_n = [-a,\ a]\ (a:\ \text{posit. const.},\ \geqq 3)$$

この時 $n \geqq 1$ に対し

$$D(X,\ Y_n\ ;\ \boldsymbol{B}) \geqq \frac{1}{2}\ell\,(e^{-\alpha_n})\cdot \max\,\{\tau_n(a),\ 0\}, \tag{4}$$

$$D(X,\ Y_n\ ;\ \boldsymbol{B}) \leqq \frac{1}{2}u(e^{-\beta_n})\cdot \max\,\{\varkappa_n(a), |\,\tau_n(a)\,|\} + \frac{\sqrt{n}\ e^{-a^2/2}}{\sqrt{2}\sqrt{(\pi-2)^2a^2+2\pi+2a}}. \tag{5}$$

ここに

$$\alpha_n = -\ln \frac{\sqrt{2}\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n}\Gamma(n/2)} + \frac{n+1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\ (\to 0,\ n\to\infty).$$

$$\beta_n = -\ln \frac{\sqrt{2}\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n}\Gamma(n/2)} + \frac{n+1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{n}\right) - \frac{a^2}{2}\ (\to 0,\ n\to\infty).$$

$$\varkappa_n(a) = 2\alpha_n\left\{1-e^{-a^2/2}\frac{\pi}{\sqrt{a^2+2\pi}+(\pi-1)a}\right\},$$

$$\tau_n(a) = 2\beta_n\left\{1-e^{-a^2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{(\pi-2)^2a^2+\pi}+2a}\right\},$$

$$\ell(t) = \frac{10t^{1/3}(1+t^{1/3})(1+t^{1/3}+t^{2/3})}{3+68t^{1/3}+98t^{2/3}+3t^{3/4}},$$

$$u(t) = \frac{(1+t^{1/3})(1+t^{1/3}+t^{2/3})(a+8t^{1/3}+t^{2/3})}{11+38t^{1/3}+11t^{2/3}},$$

$$\ell(1)=1/3,\ u(1)=1. \qquad (t>0).$$

空間地震パタンのベイズ型モデルによる統計解析

尾　形　良　彦

平面の中の閉じた領域に於て点の配置の座標 $W=\{(x_i,\ y_i)\ ;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ とこれに対するマーク $Z=\{z_i\ ;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ のデータが与えられているとする．ここで考えるモデルは位置 X が非定常ポアソン場で，マーク z_i は互いに独立であるものとする．マーク点過程 (W, Z) の危険度 (intensity) 関

数 (x, y, z) を

$$\text{Prob}\ \{\text{event in a volume}\ \Delta_x\times\Delta_y\times\Delta_z\}=\lambda(x, y, z)\,\Delta_x\Delta_y\Delta_z+o(\Delta_x\Delta_y\Delta_z)$$

と定義されたものとすると上の仮定から

$$\lambda(x, y, z)=\mu(x, y)\,f(z\,|\,x, y)$$

と表すことができる，但し $\mu(x, y)$ は位置 X の危険度関数であり $f(z\,|\,x, y)$ は位置に対してのマークの条件付確率密度分布である．いま μ と f のそれぞれを互いに独立なパラメータ θ と ξ で特徴づけると，上のデータに対するモデルの尤度は2つの成分の積 $L_1(\theta)\cdot L_2(\xi)$ で表すことができる．

我々の興味の一つは危険度 $\mu_\theta(x, y)$ を推定することである．その為にこれを B スプライン関数の指数族で表現する．2次元 B スプライン関数は通常，大量のパラメタが必要であるので，最尤法で推定しようとすると推定された曲面は不必要に大きく激しく振動したものになる．振動の激しさを見る量として曲面の一次微分または二次微分の2乗の積分を考えると，これらが少なければそれぞれの意味で滑らかで穏やかな曲面ということになる．このような振動をおさえることとデータに良く適合する曲面を求めることの調節が必要となってくる．この調節を特徴づけるパラメタ(hyperparameters)の最適値を決める為には良く知られているようにABICが有用である．但しABICの計算に於て，尤度が非正規なので，石黒・坂元（1983等）が用いたように事後分布を正規近似して積分することにする．

もう一つの興味はマークの分布 $f_\xi(z\,|\,x, y)$ が位置 (x, y) について如何に変わっているかを見ることである．例えば地震マグニチュード分布のいわゆる b 値に関連して

$$f(z\,|\,x, y)=\beta(x, y)e^{-\beta(x, y)z}$$

を考えて $\beta(x, y)$ の空間的な変化を見ることは大変興味深いことである．その為に $\beta(x, y)$ を2次元 B スプラインの指数族で表し $L_2(\xi)$ を使って上記と同様の手続きで推定曲面が得られる．

セパレート推測における尤度関数の解析

久保木 久 孝

セパレート推測とは，原モデルと原データの一部から，興味の対象となっている一部の母数に関する推測を行うことである．この為の基本的手続きは次の2つである：(a) 原モデルを適当な統計的構造をもつサブモデルに分解する；(b) 当該母数の推測における各サブモデルの有効性を適当な尺度を使って調べる．ここでは，これらに関する理論展開の基礎となる以下の話題—条件付密度の smoothness；統計量の条件付平均値の微分可能性；etc.—を測度論的に厳密に議論することを目差した．

この目的の為，一種の"averaging operator"を導入した（Pitman (1979)；Kuboki (1984)）．特にそれが確率密度に作用している場合が，conditioning および密度の factorization などとの関連で重要であるので，その場合についての結果も与えた．

以下では，密度の族の smoothness という概念をめぐる話題についてだけ言及する．データ X の従うモデルを $\mathscr{P}_\Theta=\{P_\theta:\ \theta\in\Theta\}$；$\sigma$-有限測度 m に関する P_θ の密度を p_θ とする．ここで，Θ は R^n の開区間；$\theta={}^t(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ である．p_θ は次の意味で微分可能とする：$p'_\theta={}^t(p'_{1\theta}, \cdots, p'_{n\theta})$ が存在し，任意の $l={}^t(l_1, \cdots, l_n)\in R^n$ に対し各 $\theta\in\Theta$ で，$\lim_{v\to 0}(p_{\theta+vl}-p_\theta)/v={}^tlp'_\theta$, a.e.m. $\mathscr{P}_\Theta$ には Hellinger の距離 $\rho_p(\cdot, \cdot)$ を考える．$\liminf_{v\to 0} 4\rho_p^2(\theta+vl, \theta)/v^2$ を $s_p^2(\theta\,|\,l)$ とおき，これを族 $\{p_\theta\}$ の sensitivity と言う．$\dot{p}_\theta=p'_\theta/\sqrt{p_\theta}$, $x\in\{x:\ p_\theta(x)>0\}$；$\dot{p}_\theta=0$, その他とおくと，$\{p_\theta\}$ の情報量行列は $I_p(\theta)=[\int\dot{p}_\theta\,{}^t\dot{p}_\theta\,dm]$ と書ける．一般に，$s_p^2(\theta\,|\,l)\geqq{}^tlI_p(\theta)\,l$ である．次の定義は Pitman (1979) による．