

時系列の分解

— プログラム DECOMP の紹介 —

統計数理研究所 北 川 源 四 郎

(1986年9月 受付)

1. はじめに

この解説の目的は、時系列解析のためのパッケージ TIMSAC-84 (Akaike et al., 1985) 中のプログラム DECOMP の原理を簡単に説明し実例を用いながらその使用法および出力の意味、プログラム利用上の注意などを示すことにある。

DECOMP は非定常時系列をトレンド成分、季節成分等のいくつかの成分へ分解する。そのために、DECOMP では各成分に対して確率差分方程式で表わされる成分モデルを仮定している。これらのモデルが全体として一つの状態空間表現によって表わされることから、各成分の推定およびモデルの尤度の計算に効率的な逐次的計算アルゴリズムが利用できる。この観点からすると DECOMP は、ベイズの季節調整プログラム BAYSEA (Akaike and Ishiguro, 1980, 改良版が TIMSAC-84 中にある) のベイズ的モデル構成にもなる大規模な計算を効率よく実現したものといえる。しかし、状態空間モデルの利用は計算効率の向上だけに止まらず、定常 AR 項を追加したより複雑なモデルの同定も可能にしている。このモデルの利用によって、従来の方法ではトレンドがうねったものとなり、長期予測が極めて困難な場合にも合理的な予測ができるようになる。

第2節では、DECOMP のモデルと計算法を簡単に説明する。第3節では DECOMP への入力の方法と出力の見方を示しパラメータ設定上のいくつかの注意を与える。第4節では、長期予測などいくつかの問題について論じる。

DECOMP で用いた計算法は Kitagawa (1981) に示してある。モデルに関しては Kitagawa-Gersch (1984)、予測の問題に関しては Gersch-Kitagawa (1983) に、詳しく論じてある。また、実際の経済時系列のトレンド推定を行なった例としては浪花 (1985) がある。

2. DECOMP のモデル

DECOMP は時系列 $y(n)$ を次の様に5つの成分に分解する。

$$(1) \quad y(n) = t(n) + p(n) + s(n) + td(n) + w(n)$$

ただし、 $t(n)$ は、トレンド成分、 $p(n)$ は定常自己回帰 (AR) 成分、 $s(n)$ は季節変動成分、 $td(n)$ は曜日効果項、 $w(n)$ は観測雑音項である。各成分に対して次の様なモデルを仮定している。

2.1 成分モデル

<トレンド成分>

トレンド成分 $t(n)$ は m_1 階の確率差分方程式

$$(2) \quad \begin{aligned} (1-B)^{m_1}t(n) &= v_1(n) \\ v_1(n) &\sim N(0, \tau_1^2) \end{aligned}$$

に従っているものとする。ただし、 B は $Bt(n) \equiv t(n-1)$ で定義されるシフトオペレーターである。差分の階差 m_1 として通常は 1, 2 または 3 が用いられる。

<定常 AR 成分>

定常 AR 成分は m_2 次の自己回帰 (AR) モデル

$$(3) \quad \begin{aligned} p(n) &= \sum_{i=1}^{m_2} a(i)p(n-i) + v_2(n) \\ v_2(n) &\sim N(0, \tau_2^2) \end{aligned}$$

に従うものとする。トレンド成分が長期的な趨勢の変化を示すのに対し、この定常 AR 成分は大局的には無視できる局所的な変動成分である。

<季節変動成分>

周期 q の季節変動成分に対しては

$$(1-B^q)s(n) = 0$$

が近似的に成り立つ。これから

$$\sum_{i=0}^{q-1} B^i s(n) = 0$$

が導かれる。したがって、時間的な変化を許した季節変動成分のモデルとしては

$$(4) \quad \begin{aligned} \sum_{i=0}^{q-1} B^i s(n) &= v_3(n) \\ v_3(n) &\sim N(0, \tau_3^2) \end{aligned}$$

が考えられる。季節成分に傾向的变化が認められる場合には高次のモデル

$$\left(\sum_{i=0}^{q-1} B^i \right)^k s(n) = v_3(n)$$

がよいこともある。プログラム中ではこの次数 k は SORDER と書かれている。

<曜日効果項>

月次データにおいてひと月中の各曜日の数の違いの効果が曜日効果と呼ばれるものである。この効果は

$$td(n) = \sum_{i=1}^7 \beta_i(n) d_i^*(n)$$

と表現できる。ただし、 $d_i^*(n)$ は第 n 月中の i 番目の曜日 (日, 月, 火, 水, 木, 金, 土) の数、 $\beta_i(n)$ は第 n 月の時点における i 番目の曜日の係数である。ここで、一意性のために

$$\sum_{i=1}^7 \beta_i(n) = 0$$

という条件を加えておく。このとき、上記の曜日効果は

$$td(n) = \sum_{i=1}^7 \beta_i(n) d_i^*(n) = \sum_{i=1}^6 \beta_i(n) (d_i^*(n) - d_7^*(n)) \\ \equiv \sum_{i=1}^6 \beta_i(n) d_i(n)$$

と書ける。したがって、曜日効果のモデルとしては一般的に

$$(5) \quad \begin{aligned} \beta_i(n) &= \beta_i(n-1) + v_4(n) \\ td(n) &= \sum_{i=1}^6 \beta_i(n) d_i(n) \end{aligned}$$

と表現できる。ただし、簡単のために、DECOMP では、曜日係数 $\beta_i(n)$ は時間的に変化しないものと仮定し、システム雑音 $v_4(n)$ の項は除外している。

2.2 モデルの状態空間表現

各成分モデルは一般に

$$(6) \quad z(n) = \sum_{i=1}^m \alpha(i) z(n-i) + v(n)$$

という形で表現されている。これが状態空間表現

$$(7) \quad \begin{bmatrix} z(n) \\ z(n-1) \\ \vdots \\ z(n-m+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1) & \cdots & \alpha(m) \\ 1 & & \vdots \\ & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z(n-1) \\ z(n-2) \\ \vdots \\ z(n-m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} v(n)$$

$$z(n) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \begin{bmatrix} z(n) \\ \vdots \\ z(n-m+1) \end{bmatrix}$$

と同等であることは簡単に確かめられる。したがって(1)より時系列 $y(n)$ を表現するモデルとして

$$(8) \quad \begin{aligned} x(n) &= Fx(n-1) + Gv(n) \\ y(n) &= Hx(n) + w(n) \end{aligned}$$

が得られる。ただし

$$F = \begin{bmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & F_3 & \\ & & & F_4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & & \\ & G_2 & \\ & & G_3 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = [H_1 \quad H_2 \quad H_3 \quad H_4]$$

$$x(n) = \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \end{bmatrix}, \quad v(n) = \begin{bmatrix} v_1(n) \\ v_2(n) \\ v_3(n) \end{bmatrix}$$

である。各 $F_i, G_i, H_i, x_i(n), v_i(n)$ ($i=1, 2, 3, 4$) は成分モデルの状態空間表現から定まる。各 $x_i(n)$ の次元はそれぞれ m_1, m_2, m_3, m_4 である。ただし $m_3=(q-1)*\text{SORDER}$, m_4 は曜日調整項の存否によって6または0である。

2.3 各成分への分解

状態ベクトル $x(n)$ の作り方から分かる様に $x(n)$ の第1成分が $t(n)$, m_1+1 成分が $p(n)$, m_1+m_2+1 成分が $s(n)$, $m_1+m_2+m_3+i$ 成分が $\beta_i(n)$ である。したがって、データ $y(1), \dots, y(N)$ から状態ベクトル $x(n)$ の推定値が求められれば各成分への分解は自動的に実現されたことになる。

一般に、システムの状態空間表現 (8) が与えられると、カルマンフィルタにより状態ベクトルの推定値 $x(n|n-1)$ および $x(n|n)$ を、また固定区間 smoother により $x(n|N)$ を効率よく求めることができる。ここで、 $x(n|k)$ は観測値 $\{y(1), \dots, y(k)\}$ が得られたときの状態 $x(n)$ の推定値である。ただし、実際にはトレンドや季節成分の初期分散が無限大の場合にも高精度の推定ができるように、DECOMP では共分散行列の逆行列の平方根を逐次更新する Information square root filter/smoothers を用いている。(Kitagawa, 1981)

システム雑音 $v(n)$, 観測雑音 $w(n)$, および初期状態 $x(0)$ の共分散がそれぞれ

$$U(n)U(n)^t, V(n)V(n)^t, R(n)^tR(n)$$

で与えられるものとする。このとき、Information square root filter は次式により与えられる。

予測

$$\left[\begin{array}{c|c|c} U(n-1)^{-1} & 0 & 0 \\ \hline -S(n-1)^{-1}F^{-1}G & S(n-1)^{-1}F^{-1} & c(n-1) \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c|c} W(n) & T(n) & a(n) \\ \hline 0 & R(n)^{-1} & b(n) \end{array} \right]$$

$$x(n|n-1) = R(n)b(n)$$

フィルター

$$\left[\begin{array}{c|c} R(n)^{-1} & b(n) \\ \hline V(n)^{-1}H(n) & V(n)^{-1}y(n) \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} S(n)^{-1} & c(n) \\ \hline 0 & e(n) \end{array} \right]$$

$$x(n|n) = S(n)c(n)$$

ただし、上記の \rightarrow は直交変換 (Householder 変換, 修正 Gram Schmidt 変換など) による上三角行列への縮約を示す。また、 $R(n)$ および $S(n)$ はそれぞれ、 $x(n|n-1)$ および $x(n|n)$ の推定誤差共分散行列の逆行列の平方根分解である。

この過程で得られた結果を用いて、スムージングは次の逆方向の逐次式によって実現できる。

$$\begin{aligned} \hat{v}(n-1|N) &= W(n)^{-1}\{a(n) - T(n)x(n|N)\} \\ x(n-1|N) &= F^{-1}\{x(n|N) - G\hat{v}(n-1|N)\} \end{aligned}$$

2.4 パラメータ推定とモデル選択

(8) の状態空間表現は観測ノイズの分散 σ^2 , システムノイズの分散 $\tau_1^2, \tau_2^2, \tau_3^2$, 自己回帰係数 $a(1), \dots, a(m_2)$ を未知パラメータとして含んでいる。

このうち、観測ノイズの分散 σ^2 は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^N S(n)_{M+1, M+1}^2$$

によって簡単に推定できる。他のパラメータは

$$L = -\frac{N}{2}(\log 2\pi\hat{\sigma}^2 + 1) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^M \log \frac{S(n)_{ii}^{-1}}{R(n)_{ii}^{-1}} \right)$$

によってモデルの対数尤度を求め、準ニュートン法 (BFGS 公式) によって数値的に最尤推定値を求めている。ただし、 M は $x(n)$ の次元である。

DECOMP の一般形はトレンド、定常 AR、季節成分、曜日効果項および観測雑音項の 5 成分からなっている。しかし、実際のデータにおいては、これらの成分のうち一部は無いと見なした方がよいことが多い。どの成分を用いたらよいかの決定はモデル選択の問題として取扱うことができる。数値的に最大化された対数尤度を \hat{L} とするとき AIC は

$$AIC = -2\hat{L} + 2(m_2 + l + 1)$$

により評価できるので、考えられる成分の組み合わせのうち、AIC を最小とするものを用いることにより予測の意味で最適な分解が得られる。

3. DECOMP の使用法

ここでは、TIMSAC-84 のモノグラフ中の出力例を用いながらプログラム DECOMP への入力の方法および出力の意味などを解説する。

3.1 DECOMP への入力

DECOMP を実行させるためには、NAMELIST 文による制御パラメータと解析の対象となる原データの二種類の入力が必要である。

〈制御パラメータの入力〉

プログラムの制御パラメータとして次のようなものがある。制御パラメータには標準値が設定されているので、変更する必要があるものだけを NAMELIST 文を用いて入力すればよい。入力は BATCH JOB の場合にはカードリーダー等から、TSS の場合には端末から行なう。

制御パラメータ	標準値	説明
M ₁	2	トレンドの次数
M ₂	0	AR 次数
PERIOD	12	一周期中の季節数 = 4 4 半期データ = 12 月次データ
SORDER	1	季節成分の階差次数
MT	1	原データ入力機番 = 5 カードリーダー
LOG	0	= 0 原データのまゝ解析する = 1 対数変換したデータを解析する
TRADE	0	= 1 曜日調整を行なう

TAU 2(1)	5×10^{-3}	初期推定値
TAU 2(2)	0.8	//
TAU 2(3)	10^{-5}	//
PAC(i)	$0.88(-0.6)^{i-1}$	AR モデルの PARCOR (偏自己相関係数) の初期推定値 ($i=1, \dots, M_2$)
IPR	7	出力レベルの制御
IDIF	1	GRADIENT 推定のための数値差分 =1 片側差分 =2 両側差分
MESH	1	グラフの座標上に mesh をかく =0 かかない
BSPAN	300	区分的にモデルを推定する場合の基本区間長 (通常はデータ数より大きくとっておいた方がよい.)
ISPAN	100	初期ベクトル推定のために行なう後向きフィルタの区間長
YEAR	なし	データの初年度 (TRADE=0 のときには不要)
PRED	0	長期予測の要不要
MISING	0	欠測値の有無
OUTLIR	0	異常値の有無
M ₅	0	外部説明変数の数

ただし、現在のところ PRED, MISING, OUTLIR, M₅ は 0 しか使えない。
後に示す計算例の場合には

△&PARAM △ M₂=2, &END

と入力した。ただし△は空白を示す。パラメータを変更せず、標準モデルを用いる場合には

△&PARAM △, &END

と入力すればよい。

〈原データの入力〉

原データは機番 1 の入力装置 (NAMELIST 文により変更された場合にはその機番) から入力される。原データは常に次のフォーマットに従っているものと仮定する。

レコード番号	内 容	フォーマット
1	データのタイトル	(20A4)
2	データ数	(I5)
3	データのフォーマット	(20A4)
4以降	データ Y(1), ..., Y(N)	3で指定されたフォーマット

以下の例では次のデータが用いられた。

```

BLSFOOD (1967-DEC.1979)
  156
(12F5.0)
1720 1702 1707 1708 1727 1789 1829 1880 1920 1872 1811 1771
1706 1685 1690 1700 1711 1788 1819 1919 1914 1867 1804 1776
1719 1710 1707 1711 1724 1784 1827 1936 1921 1853 1820 1778
1731 1727 1723 1711 1727 1787 1817 1916 1900 1844 1795 1758
1708 1693 1689 1685 1705 1761 1811 1898 1895 1816 1783 1744
1697 1675 1682 1675 1690 1761 1785 1862 1860 1803 1747 1707
1661 1654 1651 1641 1651 1705 1738 1811 1821 1786 1749 1711
1666 1649 1661 1643 1659 1696 1722 1822 1828 1767 1707 1660
1594 1571 1575 1572 1593 1643 1681 1780 1791 1742 1692 1655
1619 1615 1605 1612 1637 1685 1728 1813 1817 1754 1710 1672
1638 1632 1638 1645 1658 1717 1747 1829 1840 1765 1725 1698
1665 1655 1668 1664 1669 1722 1749 1823 1830 1774 1746 1724
1685 1666 1676 1666 1679 1728 1750 1829 1835 1782 1736 1706
    
```

3.2 DECOMP の出力の説明

DECOMP の出力には数値と図がある。数値はプリンタ（又は端末）、図はレーザープリンタ（又はプロッタ）へ出力される。

〈数値出力〉

DECOMP が実行され、NAMELIST 文が入力されると、まず、次の様な出力が得られる。

```

--- PROGRAM DECOMP ---
M1      = 2
M2      = 2
M3      = 11
M4      = 0
M5      = 0
M       = 15
L       = 3
PERIOD  = 12
SORDER  = 1
BSPAN   =400
ISPAN   =100
MISING  = 0
OUTLIR  = 0
LL      = 3
    
```

これによって NAMELIST 文および標準値によって指定されたパラメータを確認できる。ただし

$$M_3 = (\text{PERIOD} - 1) * \text{SORDER}$$

L = システム雑音の次元

= M_1, M_2, M_3 のうち 0 でないものの個数

$LL = M_1, \dots, M_5$ のうち 0 でないものの個数

である。

次に、機番 MT から原データが入力されると次のような出力が得られる。

```

<< ORIGINAL DATA X(I) (I=1,N) >>      N = 156      FORMAT =(6F5.0)
BLSALLFOOD (1967-DEC 1979)

MEAN      = 0.17374808D+04
VARIANCE  = 0.65580445D+04
SKEWNESS  = 0.38253824D+00
KURTOSIS  = 0.26077231D+01
    
```

これにより、入力されたデータのデータ数、入力フォーマット、タイトル等が確認できる。ここでサブルーチン AREA によって、作業領域 WORK (150000) に必要な変数が割りあて

られる。作業領域が不足する場合に警告を出して実行中断されるので、印刷された Suggestion に従って、作業領域の大きさ又はモデルの変更を行えばよい。

次に、サブルーチン EPARAM は BFGS 公式による非線形最適化によって、モデルのパラメータの最尤推定値 $\text{TAU2}(i)$ ($i=1, \dots, L$), $\text{AR}(i)$, ($i=1, \dots, M_2$) を求める。この過程で次の様な出力が得られる。ただし、非線形最適化が成功した場合にはこの部分はそれほど気にしなくてよい。(IPR=0, 2 などと指定することによりこの部分を圧縮することができる。)

PARAMETER : 非線形最適化中のパラメータベクトル。ただし、適当な変数変換がほどこされている。

GRADIENT : 評価関数 (対数尤度の符号を変えたもの) のパラメータに関する偏微分よりなる, Gradient.

RAM : 線形探索中のステップ幅

E : そのときの関数値

最尤モデルが求まると改ページされて次の様な出力が得られる。

```

--- DATA ---
BLSALLFOOD (1967-DEC 1979)                N = 156

--- MODEL ---
M1 = 2      M2 = 2      M3 = 11      M4 = 0      M5 = 0

--- PROGRAM DECOMP ---
DATE: 86-01-07      TIME: 11 37 23

      <<< INITIAL ESTIMATES >>>

-- PARAMETER VECTOR ---
-0.142926D+01  0.643501D+00 -0.156447D+01  0.135959D+01
-0.626937D+00

-- GRADIENT --
-0.259923D+01 -0.709703D+00  0.898197D+00 -0.182112D+01
 0.340473D+01

LIKELIHOOD =    -583.774      SIG2 =  0.30640763D+02
AIC         =    1179.548

      I      TAU2(I)      AR(I)      PARCOR(I)
      1  0.50000000D-02      1.34464000      0.88000000
      2  0.80000000D+00      -0.52800000      -0.52800000
      3  0.10000000D-04

      <<< FINAL ESTIMATES >>>

-- PARAMETER VECTOR ---
-0.142490D+01  0.929922D+00 -0.157101D+01  0.139930D+01
-0.648741D+00

-- GRADIENT --
 0.178407D-01 -0.762685D-02 -0.218600D-01 -0.558115D-02
-0.402997D-01

LIKELIHOOD =    -583.611      SIG2 =  0.28818429D+02
AIC         =    1179.222

      I      TAU2(I)      AR(I)      PARCOR(I)
      1  0.53119957D-02      1.36900662      0.88679731
      2  0.90078678D+00      -0.54376497      -0.54376497
      3  0.11726031D-07

CPU TIME =      39.09

```


BLSALLFOOD (1967-DEC 1979)

M1 = 2	LKFD = -583.61
M2 = 2	AIC = 1179.22
M3 = 11	SIG2 = 28.81739616
M4 = 0	TAU1 = 0.00531199
M5 = 0	TAU2 = 0.90078649
	TAU3 = 0.00000001

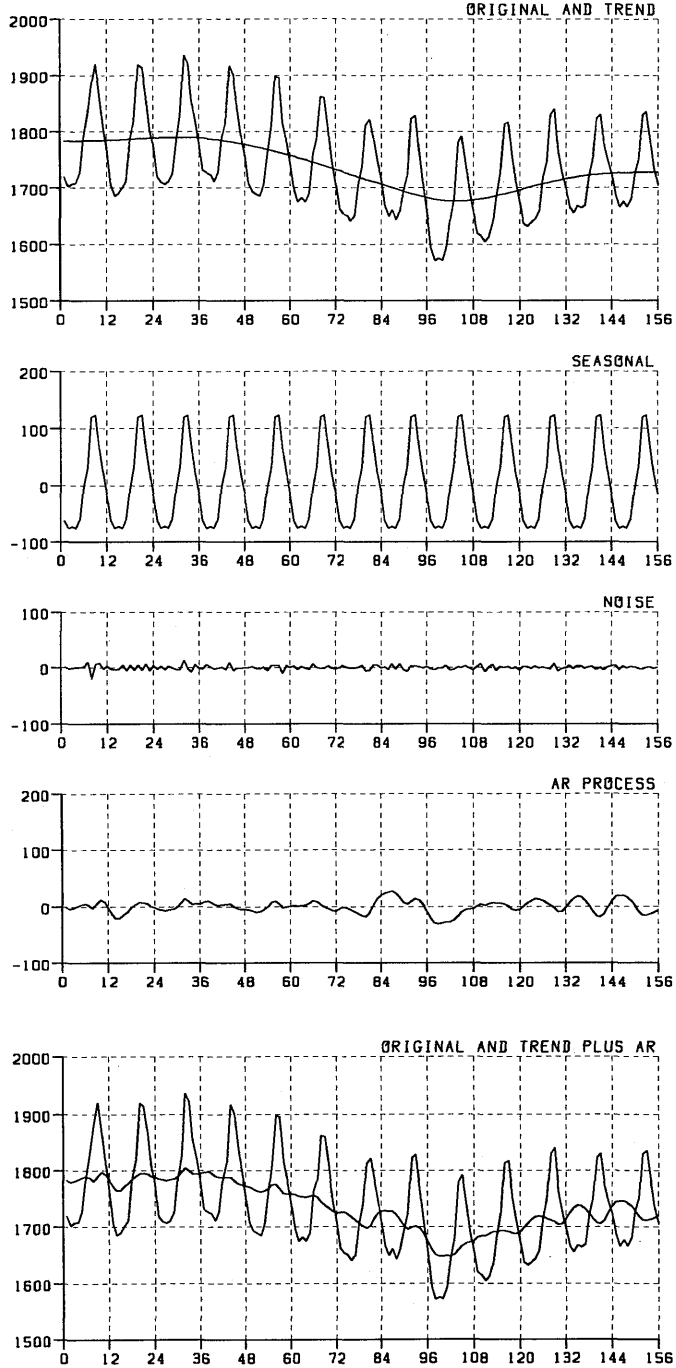


図 1. BLSFOOD データ, $M_2=2$

このページには、データ名、モデル、計算日時、初期推定値および最尤推定値がまとめられている。保存するのはこのページだけでよい。

〈図による出力〉

以下に示すような図が得られる。図の枚数はモデルによって異なる。

図1は上から順に

1. 原データ $y(n)$ とトレンド成分 $t(n)$ の推定値
2. 季節変動成分 $s(n)$ の推定値
3. 観測雑音 $w(n)$ の推定値
4. 自己回帰成分 $p(n)$ の推定値
5. トレンドと自己回帰成分の和および原データ

を表わしている。

3.3 パラメータの設定上の注意

〈標準的なモデル〉

典型的な経済時系列に見られる様なトレンドと季節成分を持った時系列の分解を行なうため

BLSALLFOOD (1967-DEC 1979)

M1 = 2	LKFD = -606.29
M2 = 0	AIC = 1218.58
M3 = 11	SIG2 = 30.30735015
M4 = 0	TAU1 = 0.97658033
M5 = 0	TAU2 = 0.00000014

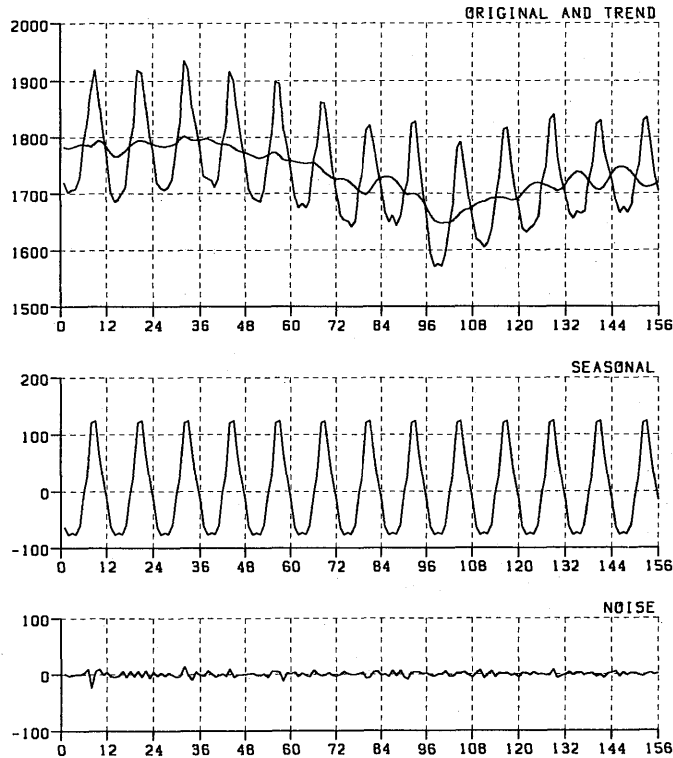


図2. BLSFOOD データ, $M_2=0$

には

△&PARAM △, &END

によって標準モデル $y(n)=t(n)+s(n)+w(n)$ を推定すればよい。図2にこのモデルによって得られた結果が例示されている。

〈うねったトレンドが得られた場合〉

通常は、上記の標準的なモデルによって良い結果が得られることが多い。しかし、場合によっては図2の様なうねったトレンドの推定値が得られることがある。この様にうねったトレンドが得られた場合の長期予測の問題点は Gersch-Kitagawa (1983) で論じた。この様な場合にはむしろ、一階階差 $m_1=1$ のモデルの方がよいあてはまりを示すことがある (AIC が小さくなる)。また、図1で示したモデル

$$y(n)=t(n)+p(n)+s(n)+w(n)$$

が、さらによいことが多い。実際

$$M_1=1, M_2=0 \text{ のとき } AIC=1191.54$$

$$M_1=2, M_2=0 \text{ のとき } AIC=1218.59$$

$$M_1=2, M_2=2 \text{ のとき } AIC=1179.22$$

となり、この場合には図1のモデルが最もよい。

〈集計されたデータ〉

図3は合衆国センサス局による Wholesale Hardware (1967年1月—1979年11月, $N=155$) データである。この様に集計によって得られたデータは、値の増加に比例して、その変動が大きくなるものが多い。この様な場合

&PARAM △ LOG=1, その他の指定, &END

として、データを対数変換した方がよいことが多い。これは原データに対しては乗法型のモデルを考えていることに相当する。図3のデータの場合

$$LOG=0 \text{ のとき } AIC=1746.16$$

$$LOG=1 \text{ のとき } AIC=142.42$$

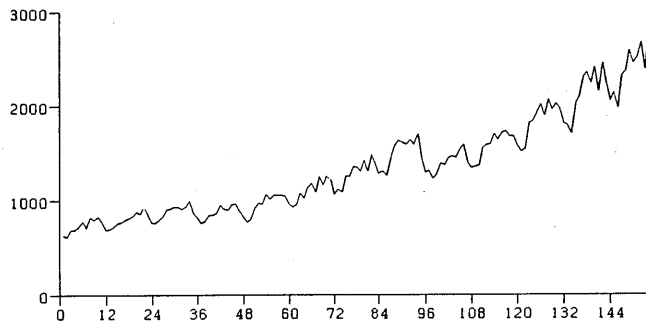


図3. WHARD データ

WHOLESALE HARDWARE, 1/67 - 11/79

M1 = 2 LKFD = 449.70
 M2 = 2 AIC = 72.98
 M3 = 11 SIG2 = 0.00004847
 M4 = 6 TAU1 = 0.01522475
 M5 = 0 TAU2 = 0.99866589
 TAU3 = 0.02429316

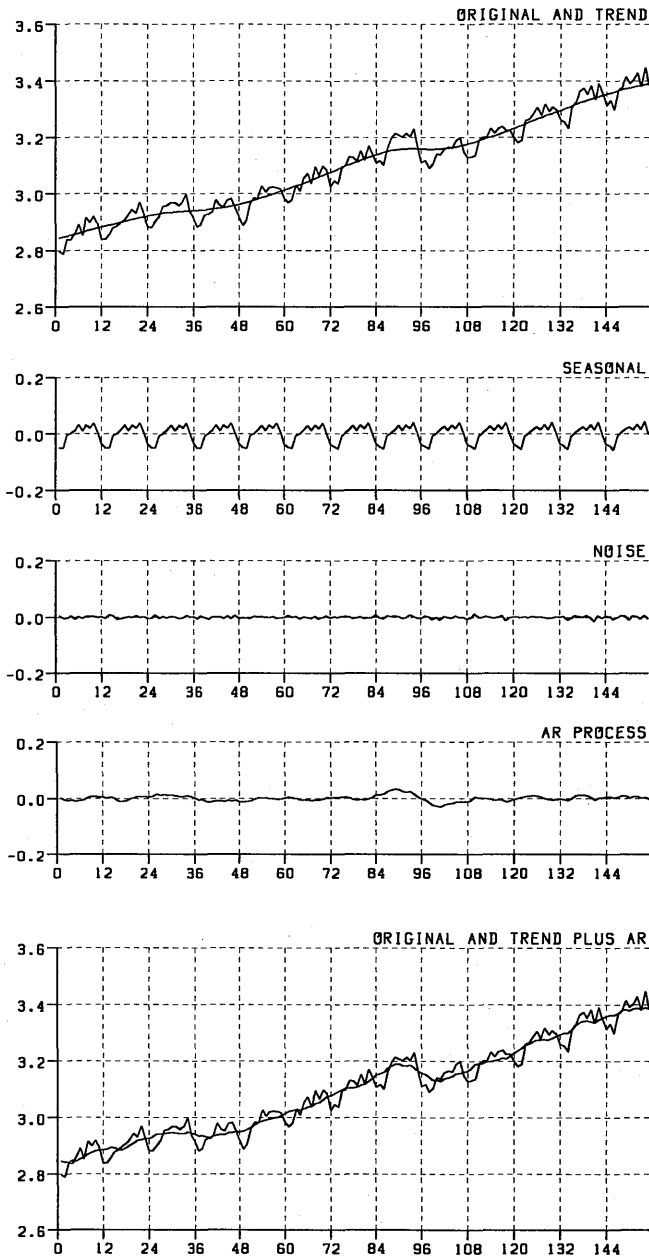


図4. WHARD データ, TRADE=1

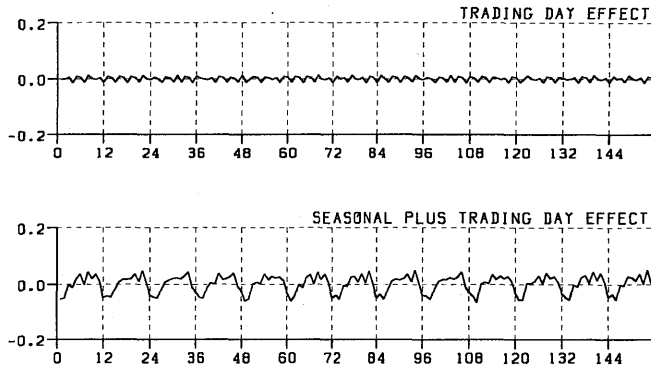


図4. つづき

となり、対数変換をほどこした方がずっとあてはまり良いことがわかる。

〈曜日効果がある場合〉

経済関係の月次データの場合には、その値がひと月中に含まれる曜日の数の違いに強く依存しているものがある。この様な場合には

&PARAM Δ TRADE=1, その他の指定, &END

として、曜日効果項を加えたモデルを求めればよい。図3のデータの場合

TRADE=0, LOG=1 AIC=142.42

TRADE=1, LOG=1 AIC= 75.12

となって、曜日効果を考慮した方がずっとあてはまりが良いことがわかる。図4はこのモデルによる分解を示したものである。曜日効果項は他の変動とくらべてそれほど大きくない様に見える。しかし、季節成分と曜日効果の和と原データを比較してみると、通常季節調整ではランダムな変動と見なされる部分の多くが、曜日効果によって説明できることがわかる。

BLSALLFOOD (1967-DEC 1979)

M1 = 2	LKFD = -576.31
M2 = 0	AIC = 1158.62
M3 = 11	SIG2 = 34.67429161
M4 = 0	TAU1 = 0.35443010
M5 = 0	TAU2 = 0.00000008

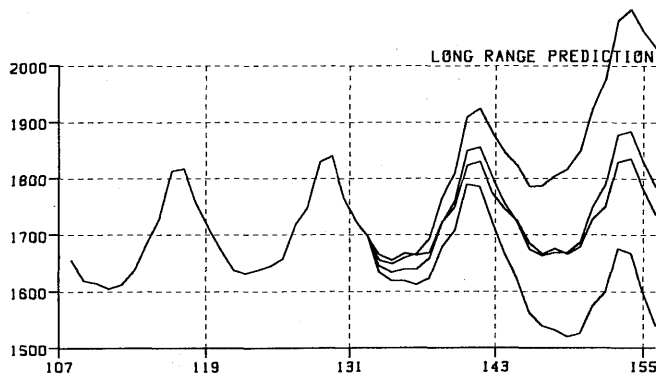
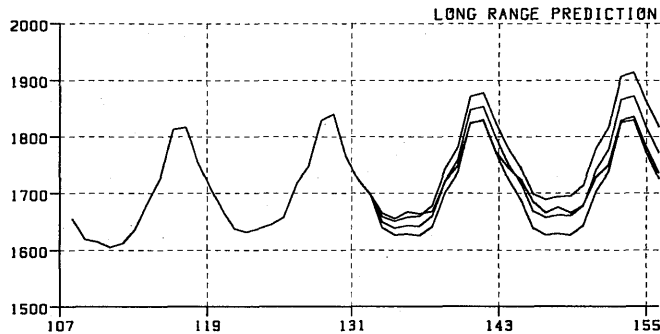


図5-1. BLSFOOD データ, PRED=133

BLSALLFOOD (1967-DFC 1979)

M1 = 2	LKFD = -558.15
M2 = 2	AIC = 1128.29
M3 = 11	SIG2 = 25.64365386
M4 = 0	TAU1 = 0.00555887
M5 = 0	TAU2 = 0.99999780
	TAU3 = 0.00000001

図 5-2. BLSFOOD データ, PRED=133, $M_2=2$

4. 長期予測について

DECOMP で用いたモデル

$$y(n) = t(n) + p(n) + s(n) + w(n)$$

は長期的な予測を想定して導入したものである。図 1, 2 で用いたデータを用いながら、長期予測の観点から上記のモデルと標準的な季節調整モデル

$$y(n) = t(n) + s(n) + w(n)$$

の違いを検討してみよう。予測値と実際の値の比較を行なうために $N=156$ 個のデータのうち前半の 132 個のデータだけを用いてパラメータ推定、状態推定を行ない、残りの 24 個の観測値は長期予測値との比較だけに用いることにする。

図 5-1 と 5-2 はそれぞれ標準的な季節調整モデルと定常 AR 成分を含んだモデルによる長期予測の結果で、実測値、長期予測値および \pm (標準偏差値) を表わす。図 5-1 の予測値は実測値と比較的に近いが、 \pm (標準偏差値) の幅が爆発的に増大していることから見ると、これはむしろ偶然の一致と考えた方がよいだろう。実際、 $n=131$ を基点として長期予測を行なうと、長期予測値は下方へ大きく偏移する。この例のように推定されたトレンドがうねっている場合には、長期予測の精度は極めて悪いと考えるべきである。これに対して図 5-2 に見られる様に、定常 AR 項を含んだモデルによれば、かなり精度のよい長期予測が実現できる。

このモデルの長期予測の能力の違いは次のように説明できる。長期予測においては、その予測誤差分散は

$$V_{n+1} = FV_nF^t + GQG^t$$

によって増大する。とくにランダムウォーク型のモデルが用いられたトレンド成分では、その予測誤差分散は予測区間とともに一様に増大する。したがって、精度のよい長期予測を行なうためには τ_1^2 の小さいモデルでよいあてはまりを実現する必要がある。ところが標準的な季節調整モデルによって、うねったトレンドが得られた場合には、トレンドモデルのノイズの分散 τ_1^2 の最尤推定値として比較的大きな値が選ばれることになり (0.354) 予測精度は著しく低下する。一方、定常 AR 項を含んだモデルでは、局所的な傾向の変化は AR 項が吸収するため、 τ_1^2 は小

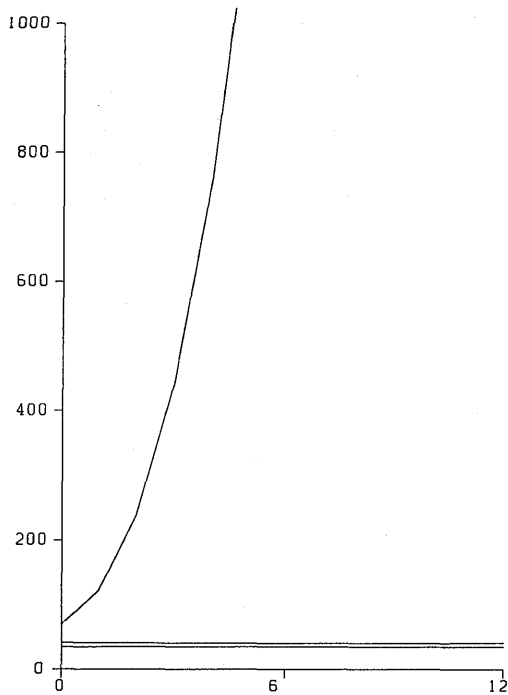


図 6-1. 図 5-1 のモデルの長期予測誤差分散の分解

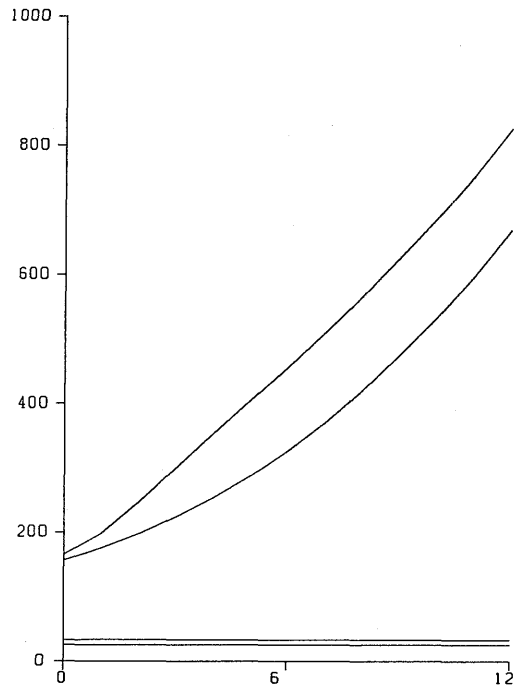


図 6-2. 図 5-2 のモデルの長期予測誤差分散の分解

さくおさえられ(0.0056), AR モデルによる予測誤差分散は定常分散でおさえられるので, 全体としての予測誤差分散はずっと小さいものになる. 図 6-1 は標準的モデルによる長期予測の誤差分散の分解である. よこ軸は予測期間, たて軸は予測誤差分散である. 下から順に $w(n)$, $w(n)+s(n)$, $w(n)+s(n)+t(n)$ の誤差分散を示しており, 予測区間の増加とともに $t(n)$ の分散が急激に増加する様子がわかる. 図 6-2 は AR 成分を加えた場合である. 最も上の曲線が $w(n)+s(n)+t(n)+p(n)$ の誤差分散を表わしている. 予測期間が短い場合には $w(n)+s(n)+t(n)+p(n)$ の分散は $w(n)+s(n)+t(n)$ の分散よりずっと大きいが, その差は予測期間が増大すると一定値に収束してしまう. 一方, $t(n)$ の分散は急激に増大するが, 図 6-1 と比較するとずっと小さくおさえられている.

謝 辞

図 6 の計算プログラムを作成した武川文さんおよび原稿を整理した山崎洋子さんに感謝の意を表します. また, 適切なコメントを頂いたレフェリーに感謝いたします.

参 考 文 献

- Akaike, H. et al. (1985). TIMSAC-84 Part 1, *Computer Science Monographs*, 22, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Akaike, H. and Ishiguro, M. (1980). BAYSEA, A Bayesian seasonal adjustment program, *Computer Science Monographs*, 13, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.

- Gersch, W. and Kitagawa, G. (1983). The prediction of time series with trends and seasonalities, *Journal of Business and Economic Statistics*, **1**, 253-264.
- Kitagawa, G. (1981). A nonstationary time series model and its fitting by a recursive filter, *Journal of Time Series Analysis*, **2**, 103-116.
- Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984). A smoothness priors state space modeling of time series with trend and seasonality, *J. Amer. Statist. Ass.*, **79**, No. 386, 378-389.
- 浪花貞夫 (1985). 経済時系列におけるトレンドの推定, *金融研究*, **4**, 第4号, 60-93.

Decomposition of a Nonstationary Time Series
— An Introduction to the Program DECOMP —

Genshiro Kitagawa

(The Institute of Statistical Mathematics)

A procedure for the decomposition of a nonstationary time series into several possible components is shown. They include trend, seasonal, autoregressive, trading day effect and white noise components. An appropriate model is assumed for each component. They are expressed in state space model form and the smoothed estimates of the components are obtained by the fixed interval smoothing algorithm. The parameters of the model such as the variances of the noise to the component models and the autoregressive coefficients are estimated by maximizing the likelihood of the model which can be evaluated by using the square root information filter.

The usage of the computer program DECOMP which realizes the procedure is exemplified by explaining the sample input and sample output for economic time series. Some remarks on the selection of the parameters of the program are given. Increasing horizon prediction with the fitted model is also discussed.