統計数理 第33巻 第1号 (1985)

線分の制約つきのランダムな分割

統計数理研究所　伊　藤　栄　明

(1985年2月　受付)

1次元ランダムパッキングは路上駐車の問題として知られている．長さ x の区間 $[0, x]$ に長さ1の棒をランダムにつめられるだけつめて行く．最初の棒 I_1 の左端は $[0, x-1]$ 上の一様分布により定められる．$I_1, I_2, \cdots, I_k$ の棒がすでにつめられていたとすれば I_{k+1} は残りの可能な場所から一様な確率によりえらばれるとし，これ以上つめこむすきまがなくなるまでこれを続けるものとする．このようにしてつめこまれた棒の数の期待値を $m(x)$ とすると

(1)
$$\begin{aligned} &m(x+1)=\frac{2}{x}\int_0^x m(y)dy+1,\ 1\leqq x,\\ &m(x)=0,\ 0\leqq x<1 \end{aligned}$$

がなりたつ．1次元ランダムパッキングにより生じるすきまの最小値 $L(x)$ が h 以上である確率 $\Pr(L(x)\geqq h)$ を $f(h, x)$ とおくと

(2)
$$\begin{aligned} &f(h, x+1)=\frac{1}{x}\int_0^x f(h, x-y)f(h, y)dy,\ 1\leqq x,\\ &f(h, x)=\begin{cases} 0 & 0\leqq x<h\\ 1 & h\leqq x<1, \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ．(Itoh (1980))．すきまの最大値 $M(x)$ が h 以下である確率 $\Pr(M(x)\leqq h)$ を $f(h, x)$ とおくと

(3)
$$\begin{aligned} &f(h, x+1)=\frac{1}{x}\int_0^x f(h, x-y)f(h, y)dy,\ 1\leqq x,\\ &f(h, x)=\begin{cases} 1 & 0\leqq x\leqq h\\ 0 & h<x<1, \end{cases} \end{aligned}$$

が成りたつ．長さ $l(\geqq d)$ 以上のあいた場所があるときに限り d の長さの棒をつめることができるように1次元ランダムパッキングを拡張する．$l=d=1$ が上述の場合である．もうひとつの典型的な場合として $l=1$, $d=0$ なる場合を考える．これは長さ x の棒をランダムに長さがすべて1以下になるまで切って行くという問題である．切り口の数の期待値を $m(x)$ とすると

(4)
$$\begin{aligned} &m(x)=\frac{2}{x}\int_0^x m(y)dy+1,\ 1\leqq x,\\ &m(x)=0,\ 0\leqq x<1, \end{aligned}$$

が成りたつ．

切られた棒の長さの最小値を，$L(x)$ とし，$f(h, x)=\Pr(L(x)\geqq h)$ とおくと，

$$
(5) \qquad \begin{aligned} & f(h, x)=\frac{1}{x} \int_0^x f(h, x-y) f(h, y) d y, \quad 1 \leqq x, \\ & f(h, x)= \begin{cases}0 & 0 \leqq x<h \\ 1 & h \leqq x<1,\end{cases} \end{aligned}
$$

を満たす.

切られた棒の長さの最大値を $M(x)$ とし, $\operatorname{Pr}(M(x) \leqq h)=f(h, x)$ とおくと,

$$
(6) \qquad \begin{aligned} & f(h, x)=\frac{1}{x} \int_0^x f(h, x-y) f(h, y) d y, \quad 1 \leqq x, \\ & f(h, x)= \begin{cases}1 & 0 \leqq x \leqq h \\ 0 & h<x<1,\end{cases} \end{aligned}
$$

を満す.

ランダムパッキングからみちびかれる方程式にはおくれがあるが, 上記の制約つきランダムな分割よりみちびかれる方程式にはおくれがない. これらの解の挙動については別の機会に論じたい.

参 考 文 献

Itoh, Y. (1980). On the minimum of gaps generated by one-dimensional random packing, *J. Appl. Prob.*, **17**, 134-144.

Renyi, A. (1958). On a one dimensional problem concerning space filling, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **3**, 109-127.

Note on a restricted random cutting of a stick

Yoshiaki Itoh
(Institute of Statistical Mathematics)

Consider a car parking problem. If there is a space not has than $l(\geqq d)$, one can park a car of length d. When $l=d$, the problem is discussed by Renyi (1958). Another typical situation is the case $d=0$, which can be considered as a restricted random cutting of a stick. Consider a stick of length x, and cut the stick successively at random untill there remains no stick not less than 1. The expected number of sticks is obtained from the equation (4). Let the minimum of the lengths of sticks be $L(x)$, and put $\Pr(L(x)\geqq h)=f(h, x)$, $f(h, x)$ satisfies the equation (5). Let the maximum of the lengths of sticks be $M(x)$ and put $f(h, x)=\Pr(M(x)\leqq h)$, $f(h, x)$ satisfies the equation (6).